ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974
Seria: Budownictwo z. 35 Nr kol. 408

Jan Kubik

STATYKA UKŁADÓW STARZEJĄCYCH SIĘ

Streszczenie. W pracy podano sposób wyznaczania stanu naprężeń i przemieszczeń w pewnej klasie układów wykonanych z materiałów podlegających procesowi starzenia się. Problem sformułowano w postaci równania macierzowego, którego rozwiązanie pozwala na wyznaczenie stanu naprężeń i przemieszczeń układu. Uzyskane równanie można przez podstawienie sprowadzić do równania macierzowego, odpowiadającego pewnemu zagadnieniu lepkosprężystemu, które już łatwiej rozwiązać (por. [5, 6]).

1. Wstęp

Związki między uogólnionymi siłami a przemieszczeniami w lepkosprężystych układach odkształcalnych, które podano w pracach [5, 6] pozwoliły na skonstruowanie równań statyki dla tych układów. Ogólna postać tych związków pozwala również wydedukować równanie statyki układów podlegających starzeniu. W pracy [6] podano nawet ogólną postać równań metody przemieszczeń odpowiadających tym materiałom, naświetlając jednocześnie trudności, jakie wynikają w trakcie ich rozwiązywania.

Prostszy przypadek szczególny polega na rozpatrywaniu zawężonej klasy materiałów, którym w równaniach całkowych zagadnienia odpowiadają jądra w postaci iloczynowej. W tych przypadkach można całkowe równanie macierzowe Volttery I rodzaju sprowadzić do równania całkowego typu splotu, które już łatwiej rozwiązać, np. przez wykorzystanie transformacji Laplace'a Analizie tego przypadku szczególnego poświęcona jest niniejsza praca. Podano w niej ogólną postać równań macierzowych statyki układów podlegających procesowi starzenia się, oraz sposób sprowadzenia równań szczególnych statyki tych układów do równań, których forma jest identyczna z formą statyki układów lepkosprężystych.

2. Równanie problemu

Oznaczmy podobnie jak w pracach [5, 6] przez $u_j(x_j, t)$ przemieszczenie cząstki $x_j (x_j = (X_1, X_2, X_3))$ należącej do układu odkształcalnego $B (X_j \in B)$. Układ liczb (X_1, X_2, X_3) przedstawia współrzędne cząstki x_j, natomiast t jest czasem. Przez $P_j(x_j, t)$ oznaczymy siłę kontaktową działającą na cząstkę x_j.

Podane w pracach [5, 6] zależności między uogólnionymi siłami P_j, tj. siłami i momentami a uogólnionymi przemieszczeniami cząstki x_j, $u_j(x_j,t)$, tj. przemieszczeniami i obrotami układu odkształcalnego B, podlegającego procesowi starzenia się mają postać

$$U_j(x_j,t) = \int_0^t \delta_{ij}(x_j,t,\tau;x_i)\,\frac{\partial P_i(x_i,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau, \tag{2.1}$$

$$P_j(x_j,t) = \int_0^t M_{ij}(x_j,t,\tau;x_i)\,\frac{\partial U_i(x_i,\tau)}{\partial\tau}\,\partial\tau, \quad \tau\in[0,t]. \tag{2.2}$$

Podane tutaj związki wykorzystamy do konstrukcji równań statyki układów podlegających procesom starzenia się. W związkach tych P_i, U_i są odpowiednio uogólnionymi siłami i przemieszczeniami układu B, δ_{ij} jest przemieszczeniem cząstki x_j wywołanym działaniem jednostkowej siły w cząstce x_i, natomiast M_{ij} jest siłą występującą w x_i, która wywołuje jednostkowe przemieszczenie cząstki x_j. Analizę funkcji δ_{ij} i M_{ij} występujących w (2.1) i (2.2) przeprowadzimy w dalszej części pracy.

Znając postać związków między uogólnionymi siłami a przemieszczeniami łatwo już podać ogólne równania statyki układów podlegających starzeniu się. W tym celu dla porównania zapiszemy równania statyki dla identycznych, tj. znajdujących się w tej samej konfiguracji układów sprężystych.

Równania te mają postać

$$\mathring{\delta}_{ij}\,\mathring{X}_i + \mathring{\delta}_{rj}\,q_r = U_j \qquad i,j = 1,2,\ldots,n \quad r = 1,2,\ldots,m \tag{2.3}$$

$$\mathring{M}_{IJ}\,\mathring{\varphi}_I + \mathring{M}_{RJ}\,\varphi_R = P_J \qquad I,J = 1,2,\ldots,N \quad R = 1,2,\ldots,M. \tag{2.4}$$

Pierwszy układ równań (2.3) odpowiada metodzie sił dla n-krotnie statycznie niewyznaczalnego układu sprężystego $\mathring{B}_1$.

Natomiast drugi odpowiada metodzie przemieszczeń dla N-krotnie geometrycznie niewyznaczalnego układu sprężystego $\mathring{B}_2$. X_i, φ_I są poszukiwanymi a q_r i φ_R znanymi siłami i przemieszczeniami w układzie sprężystym. Układy liczb $\mathring{\delta}_{ij}$, $\mathring{\delta}_{rj}$ są przemieszczeniami cząstki $x_j \in \mathring{B}_1$, wywołanymi działaniem jednostkowych sił przyłożonych odpowiednio w x_i i x_r, a $\mathring{M}_{IJ}$ i $\mathring{M}_{RJ}$ są siłami w x_J wywołanymi przez wymuszone przemieszczenia cząstek x_I i x_R. Ponadto U_j jest znanym przemieszczeniem cząstki x_j, a P_J znaną siłą uogólnioną działającą na cząstkę x_J.

W równaniach (2.3) i 2.4) należy sumować po powtarzających się wskaźnikach, czyli

$$\overset{\circ}{\delta}_{ij}\, x_i \equiv \overset{\circ}{\delta}_{1j}\, x_1 + \overset{\circ}{\delta}_{2j} x_2 + \ldots + \delta_{nj}\, x_n$$
$$\overset{\circ}{M}_{IJ}\, \varphi_I \equiv \overset{\circ}{M}_{1J}\, _1 + \overset{\circ}{M}_{2J}\, \varphi_2 + \ldots + \overset{\circ}{M}_{NJ}\, \varphi_N. \tag{2.5}$$

Jak wiadomo układy równań macierzowych (2.3) i (2.4) powstały z analizy związku zachodzącego między siłami uogólnionymi a przemieszczeniami

$$U_j = \overset{\circ}{\delta}_{\underline{i}j}\, P_{\underline{i}} \tag{2.6}$$

$$P_I = \overset{\circ}{M}_{\underline{I}J}\, U_{\underline{I}}. \tag{2.7}$$

Należy podkreślić, że zależności (2.6) i (2.7) w układzie sprężystym są odpowiednikami związków (2.1) i (2.2), które są słuszne dla ośrodka starzejącego się.

Podobieństwo formalne równań metody sił (2.3) i przemieszczeń (2.4) pozwala zapisać te równania w postaci jednego równania macierzowego

$$\overset{\circ}{\mathbf{A}}\overset{\circ}{\mathbf{Y}} + \overset{\circ}{\mathbf{B}}\mathbf{P} = \mathbf{C}, \tag{2.8}$$

w którym macierze $\overset{\circ}{\mathbf{A}}, \overset{\circ}{\mathbf{Y}}, \overset{\circ}{\mathbf{B}}, \mathbf{P}, \mathbf{C}$, odpowiadają następującym macierzom w układach (2.3) i (2.4)

$$\overset{\circ}{\mathbf{A}} = \left(\left[\overset{\circ}{\delta}_{ij}\right], \left[\overset{\circ}{M}_{IJ}\right]\right), \quad \overset{\circ}{\mathbf{B}} = \left(\left[\overset{\circ}{\delta}_{rj}\right], \left[\overset{\circ}{M}_{RJ}\right]\right)$$
$$\overset{\circ}{\mathbf{Y}} = \left(\left[\overset{\circ}{X}_i\right], \left[\overset{\circ}{\varphi}_I\right]\right), \quad \mathbf{P} = \left(\left[q_r\right], \left[\varphi_R\right]\right), \quad \mathbf{C} = \left(\left[U_j\right], \left[P_J\right]\right). \tag{2.9}$$

Podamy teraz równania metody sił i przemieszczeń dla ośrodka podlegającego starzeniu się. Rozpatrywać będziemy identyczne do poprzednich, $(\overset{\circ}{B}_1, \overset{\circ}{B}_2)$ układy B_1 i B_2, z tym że materiał tych układów opisany będzie teraz równaniami teorii starzenia się.

Uzyskujemy równania

$$\int_0^t \delta_{ij}(x_j,t,\tau;x_i)\,\frac{\partial X_i(x_i,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau + \int_0^t \delta_{rj}(x_j,t,\tau;x_r)\,\frac{\partial_{qr}(x_r,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau = U_j(x_j,t) \tag{2.10}$$

$$i,j = 1,2,\ldots,n \quad r = 1,2,\ldots,m$$

$$\int_0^t M_{IJ}(x_J,t,\tau;x_I)\,\frac{\partial\varphi_I(x_I,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau + \int_0^t M_{RJ}(x_J,t,\tau;x_R)\,\frac{\partial\varphi_R(x_R,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau = P_J(x_J,t) \tag{2.11}$$

$$I,J = 1,2,\ldots,N \quad R = 1,2,\ldots,M.$$

Równania (2.10) i (2.11) są odpowiednikami układów (2.3) i (2.4) w układach sprężystych. Równania (2.11) podano w pracy [6], w której wskazano również na trudności związane z rozwiązywaniem tych równań.

Odpowiednikiem równania macierzowego (2.9) jest równanie

$$\int_0^t \mathbf{A}(t,\tau)\,\dot{\mathbf{Y}}(\tau)d\tau + \int_0^t \mathbf{B}(t,\tau)\,\dot{\mathbf{P}}(\tau)d\tau = \mathbf{C}(t), \tag{2.12}$$

w którym dokonano następujących utożsamień

$$\begin{gathered}\mathbf{A} = \left(\left[\delta_{ij}(x_j,t,\tau;\,x_i)\right],\ \left[M_{IJ}(x_J,t,\tau;x_I)\right]\right),\\ \mathbf{B} = \left(\left[\delta_{rj}(x_j,t,\tau;\,x_r)\right],\ \left[M_{RJ}(x_J,t,\tau;x_I)\right]\right),\\ \mathbf{Y} = \left(\left[X_i(x_i,t)\right],\ \left[\varphi_I(x_I,t)\right]\right),\quad \mathbf{P} = \left(\left[q_r(x_r,t)\right],\ \left[\varphi_R(X_R,t)\right]\right)\\ \mathbf{C} = \left(\left[U_j(x_j,t)\right],\ \left[P_J(x_J,t)\right]\right).\end{gathered} \tag{2.13}$$

W wielu przypadkach punkty x_i, x_I przyłożenia nieznanych sił i przemieszczeń $\varphi_I = \varphi_I(x_I,t)$ są ustalone, wtedy zachodzą związki

$$\begin{gathered}\delta_{ij}(x_j,t,\tau;x_i) = \mathring{\delta}_{ij}R(t,\tau),\quad M_{IJ}(x_J,t,\tau;x_I) = \mathring{M}_{IJ}F(t,\tau)\\ \mathbf{A}(t,\tau) = \mathring{\mathbf{A}}S(t,\tau)\quad,\quad S(t,\tau) = (R(t,\tau),\ F(t,\tau)).\end{gathered} \tag{2.14}$$

Funkcje $\mathring{\mathbf{A}}$ $\mathring{\delta}_{ij}R(t,\tau)$ są przemieszczeniami w układzie B_1 wywołanymi działaniem sił jednostkowych stałych w czasie, natomiast $\mathring{M}_{ij}$. $F(t,\tau)$ są siłami wywołanymi przez jednostkowe przemieszczenia w układzie B_2.

Zajmować się będziemy dalej szczególnym przypadkiem równania (2.12), w którym macierz $\mathbf{A}$ jest następująca

$$\mathbf{A}(t,\tau) = \mathring{\mathbf{A}}S(t,\tau) = \mathring{\mathbf{A}}\,L(\tau)\ \ N(t-\tau). \tag{2.15}$$

W zależności (2.15) macierz $\mathring{\mathbf{A}}$ jest macierzą sprężystości dla układu równań (2.8), natomiast funkcja $L(\tau)$ opisuje efekt starzenia się materiału w układach B_1 i B_2. Dla układów lepkosprężystych zachodzi $\mathbf{A}(t,\tau) = \mathring{\mathbf{A}}N(t-\tau)$ (por. [5, 6]).

3. Rozwiązanie równania problemu i zastosowania

Podamy teraz ogólne rozwiązanie równania (2.12), w którym uwzględnimy zależności (2.15). Uzyskujemy równanie

$$\mathring{A}\int_0^t N(t-\tau)\,L(\tau)\,\dot{Y}(\tau)\,d\tau+\int_0^t \mathring{B}(t,\tau)\,\dot{P}(\tau)d\tau=(\tau). \tag{3.1}$$

Wprowadzimy do równania (3.1) nową funkcję $Z(t)$, którą określa zależność

$$L(\tau)\,\dot{Y}(\tau)=Z(\tau) \tag{3.2}$$

i otrzymujemy w wyniku równanie macierzowe

$$\mathring{A}\int_0^t N(t-\tau)\,Z(\tau)d\tau=C(t)-\int_0^t B(t,\tau)\,\dot{P}(\tau)d\tau, \tag{3.3}$$

którego forma jest podobna do równań macierzowych statyki układów lepkosprężystych.

Rozwiązanie równania macierzowego (3.3) przedstawia następująca równość

$$Z(t)=\mathring{A}^{-1}\int_0^t n(t-\tau)\left[C(\tau)-\int_0^\tau B(\tau,\tau')\dot{P}(\tau')d\tau'\right]d\tau$$

$$\int_0^t N(t-\tau)\int_0^\tau n(\tau')d\tau=1 \tag{3.4}$$

natomiast dunkcje $Y(t)$ wyznaczymy po uprzednim rozwiązaniu równania (3.2)

$$Y(t)=\int_0^t L^{-1}(\tau)\,Z(\tau)d\tau+Y(o). \tag{3.5}$$

Ostateczne rozwiązanio równania (3.1) po uwzględnieniu (3.4) i (3.5) ma postać następującą

$$Y(t)=\mathring{A}^{-1}\int_0^t L^{-1}(t-\tau)\int_0^\tau n(\tau-\tau')\left[C(\tau')-\int_0^{\tau'} B(\tau',\tau'')\dot{P}(\tau')d\tau''\right]d\tau'd\tau+Y(o) \tag{3.6}$$

$$\tau\in[0,t],\qquad \tau'\in[0,\tau],\qquad \tau''\in[0,\tau'].$$

Z rozwiązania (3.6) wynikają dwa przypadki szczególne

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{O} \quad , \quad \mathbf{P} \neq \mathbf{O} \quad \text{(1 przypadek)} \tag{3.7}$$

$$\mathbf{C} \neq \mathbf{O} \quad , \quad \mathbf{P} \equiv \mathbf{O} \quad \text{(2 przypadek),} \tag{3.8}$$

które najczęściej spotykamy w zastosowaniach.

Przeprowadzone w poprzedniej części pracy wywody ogólne zilustrujemy przykładem wyznaczania sił hiperstatycznych w N-krotnie statycznie niewyznaczalnym, prętowym układzie starzejącym się.

Przykład

Wyznaczymy nieznane siły $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ w N-krotnie statycznie niewyznaczalnym, jednorodnym układzie prętowym, w którym punkty przyłożenia sił $\mathbf{X}$ doznały przemieszczeń o wartości $\mathring{\mathbf{C}}_1 = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$. Załóżymy, że znamy macierz sprężystości $\mathring{\mathbf{A}}$ w identycznym układzie sprężystym

$$\mathring{\mathbf{A}} = \left[\mathring{\delta}_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \mathring{\delta}_{11}, & \mathring{\delta}_{12}, \ldots, & \mathring{\delta}_{1n} \\ \mathring{\delta}_{21}, & \mathring{\delta}_{22}, \ldots, & \mathring{\delta}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathring{\delta}_{n1}, & \mathring{\delta}_{n2}, \ldots, & \mathring{\delta}_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

oraz, że odpowiedniki wyrazów $\mathring{\delta}_{ij}$ w macierzy $\mathbf{A}$ mają postać

$$\delta_{ij} = \mathring{\delta}_{ij}\left(c_0 + \frac{A}{\tau}\right)\left(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right). \tag{3.10}$$

We wzorze (3.10) c_0, A i γ są parametrami materiałowymi określonymi na podstawie doświadczeń (por. [1, 8, 9]), natomiast wyrazy macierzy $\mathbf{C}$ określa zależność

$$\mathbf{C} = \left[c_j\right] = \left[\mathring{C}_j E_0 J t\right] = E_0 J t \mathring{\mathbf{C}}. \tag{3.11}$$

Uwzględniając (3.10) i (3.11) w równaniu (3.3) otrzymujemy

$$\mathring{\mathbf{A}} \int_0^t \left(c_0 + \frac{A}{\tau}\right)\left(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right)\dot{\mathbf{X}}\, d\tau = t\, E_0\, J\, \mathring{\mathbf{C}}. \tag{3.12}$$

Wprowadzając nową niewiadomą $Z = (C_0 + \frac{A}{\tau})\dot{X}$ w (3.12) uzyskujemy prostą postać równania całkowego - równanie całkowe typu splotu

$$\mathring{A}\int_0^t (1 - e^{-\gamma(t-\tau)})\, Z(\tau)\,d\tau = t\, E_0\, J\mathring{C}. \tag{3.13}$$

Rozwiązanie równania (3.13) jest następujące

$$Z(t) = \mathring{A}^{-1}(\overset{1}{\delta}(t) + \gamma\, H(t))\,\frac{1}{\gamma}E_0 J\mathring{C}, \tag{3.14}$$

gdzie $\overset{1}{\delta}(t)$ jest "deltą" Dirac'a a H(t) "funkcją" Heaviside'a. Po dalszych przekształceniach poszukiwana funkcja $X(t)$ dana jest wzorem

$$X(t) = \mathring{A}^{-1}\left(\frac{1}{C_0 + A} + \gamma\int_0^t \frac{\tau}{C_0\tau + A}d\tau\right)\frac{1}{\gamma}E_0 J\mathring{C} =$$
$$= \left[\frac{1}{C_0 + A} + \frac{\gamma}{C_0}\left(t - \frac{A}{C_0}\ln|A + C_0 t| + \frac{A}{C_0}\ln|A|\right)\right]\frac{1}{\gamma}E_0 J\mathring{A}^{-1}\mathring{C}. \tag{3.15}$$

Rozwiązanie sprężyste identycznego zadania prowadzi do zależności

$$\mathring{X}(t) = E_0 J\mathring{A}^{-1}\mathring{C}\, t \tag{3.16}$$

natomiast stosunek rozwiązań $X(t) = O(t)\cdot\mathring{X}(t)$ jest następujący

$$o(t) = \left[\frac{1}{C_0 + A} + \frac{\gamma}{C_0}\left(t - \frac{A}{C_0}\ln|A + C_0 t| + \frac{A}{C_0}\ln|A|\right)\right] =$$
$$= \left\{\frac{1}{C_0 + A} + \frac{\gamma}{C_0}\left[t - \frac{A}{C_0}\ln\left(1 + \frac{C_0}{A}t\right)\right]\right\}. \tag{3.17}$$

Ze wzoru (3.17) wynika, że w chwilach początkowych siły hiperstatyczne $X(t)$ z rozwiązania w układzie starzejącym się będą mniejsze od sił $\mathring{X}(t)$ z rozwiązania układu sprężystego. Natomiast z upływem czasu i starzenia się materiału zachodzi zależność odwrotna - rozwiązania $X(t)$ będą większe od $\mathring{X}(t)$. Z analizy równości (3.15) wynika również, że trudności związane z uzyskaniem rozwiązania w układzie starzejącym się nie zależą od stopnia statycznej lub geometrycznej wyznaczalności, a zależą jedynie od postaci związków konstytutywnych, stąd każde rozwiązanie uzyskane dla ustalonego materiału można łatwo wykorzystać do wyznaczania rozwiązań w układach o dowolnej konfiguracji i statycznej lub geometrycznej niewyznaczalności, ale wykonanych z tego samego materiału.

Dla przykładu podamy rozwiązanie w jednokrotnie statycznie niewyznaczalnym układzie starzejącym się w którym zachodzi

$$\delta_{ij} = \delta_{11} = \mathring{\delta}_{11}\left(C_o + \frac{A}{\tau}\right)\left(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right) \tag{3.18}$$

a na podstawie (3.15) rozwiązanie $X_1(t)$ określa zależność

$$X_1(t) = \left[\frac{1}{C_o + A} + \frac{\gamma}{C_o}\left(t - \frac{A}{C_o}\ln|A + C_o t| + \frac{A}{C_o}\ln|A|\right)\right] E_o J \frac{\mathring{\delta}_1}{\mathring{\delta}_{11}}. \tag{3.19}$$

LITERATURA

[1] Arutiunian N. Ch.: Niekotoryje woprosy teorii połzuczesti. Gos. Izdat Tiech.-Teor. Lit. Moskwa - Leningrad, 1952.

[2] Eimer C.: Podstawy teorii pełzania ustrojów hiperstatycznych wstępnie sprężonych, Rozpr. Inż. 3, 1957.

[3] Freudenthal A. M.: Inelastic Behavior of Engineering Materials and Structures. J. Wiley and Sons. New York 1950.

[4] Kubik J.: Metoda sił dla układów lepkosprężystych, Rozpr. Inż. 4, 1970.

[5] Kubik J.: Metoda przemieszczeń dla układów lepkosprężystych, Rozpr. Inż. 1, 1971.

[6] Kizirija G. W.: Rasczet konstrukcji s uczetom deformacji połzuczesti betona, Tbilisi 1969.

[7] Nowacki W.: Teoria pełzania, Warszawa 1963.

[8] Rżanicyn A.R.: Teoria połzuczesti, Moskwa 1968.

[9] Sattler K.: Theorie der Verbundkonstruktionen, Berlin 1953.

СТАТЫКА СТАРЕЮЩИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В работе представлены общие уравнения статики стержневых систем с учетом старения материала. Ядра этих интегральных уравнений статики имеют формы произведения: $f_1(\tau)\ \ f_2(t-\tau)$.

STATICS OF THE AGEING SYSTEMS

S u m m a r y

On the paper is shown basic equation of the statics of bars systems, in which was taken into consideration ageing of materials. Principal parts of integral statics equations have shape of the product: $f_1(\tau)\ \ f_2(t-\tau)$.

Praca wpłynęła 5.6.1971r.