

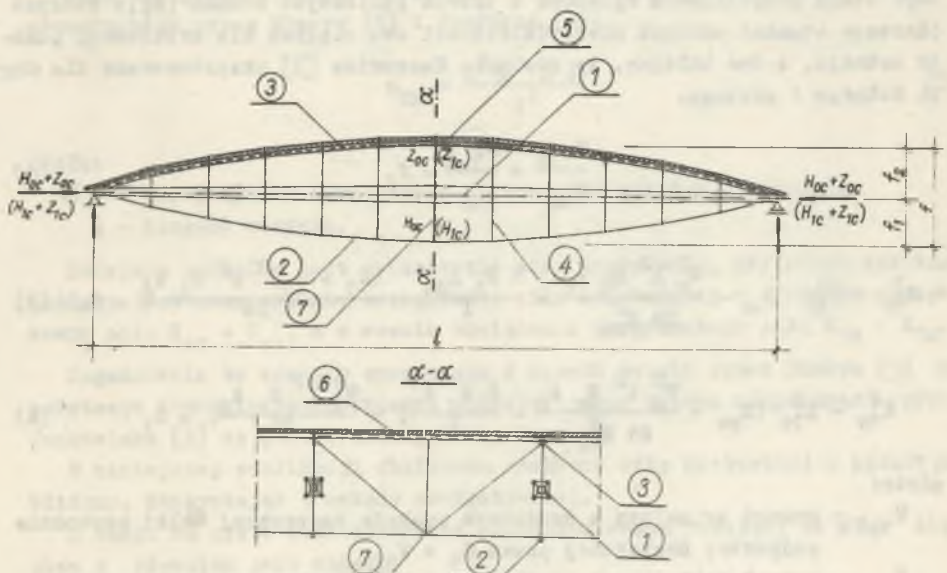
Stanisław Zawada

### STAŁOWY DŹWIGAR CIĘGNOWY DLA PRZEKRYĆ DACHOWYCH

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono nową koncepcję stalowego dźwigara cięgowego wstępnie sprężonego, który może być wykorzystany przy lekkich przekryciach dachowych w obiektach o dużych rozpiętościach. Podano praktyczny sposób obliczenia sił w cięgnach oraz przeprowadzono rozważania mające na celu wyznaczenie siły krytycznej w rdzeniu.

W pracy omówiono praktyczny sposób obliczenia stalowego dźwigara cięgowego przedstawionego na rys. 1. Dźwigar składa się z dwóch cięgien - dolnego i górnego, rdzenia wstępnie sprężonego oraz słupów niekontaktujących się z rdzeniem. Obciążenie z pokrycia dachowego przekazywane jest przez słupki bezpośrednio na cięgna, rdzeń natomiast służy do przejęcia oddziaływań poziomych.

Obliczenie dźwigara polega na ustaleniu w cięgnach i rdzeniu stanu początkowego (indeks 0), a następnie na ustaleniu stanu odpowiadającego ob-



Rys. 1. Schemat dźwigara cięgowego: 1 - rdzeń; 2 - cięgno dolne; 3 - cięgno górne; 4 - słupki; 5 - pokrycie dachowe; 6 - tężnik połączony; 7 - tężnik podłużny

ciążeniu programowemu (indeks 1). Propozycję podobnego rozwiązania stałego dźwigara ciągnowego, lecz z obliczeniem rdzenia na innej zasadzie, przedstawił Razmadzje [6]. Ustalenie początkowego stanu ustroju sprowadza się do obliczenia oddziaływań węzłowych  $W_0$ , przy znanych siłach naciągu  $H_{0c}$  i  $Z_{0c}$ . Oddziaływania te można obliczyć z równania:

$$\frac{M_{0,d}}{H_{0c}} + \frac{M_{0,g}}{Z_{0c}} = f, \quad (1)$$

które wyraża, że suma rzędnych obu ciągów dla środkowego punktu osi ustroju jest wielkością znaną, określoną jego warunkami geometrycznymi.

$M_{0,d}$  - moment zginający w środkowym punkcie zastępczej belki swobodnie podpartej obciążonej przez  $G_0 + W_0$ ,

$M_{0,g}$  - moment zginający w środkowym punkcie zastępczej belki swobodnie podpartej obciążonej przez  $W_0$ ,

$H_{0c}$  i  $Z_{0c}$  - siły naciągu w ciągnie dolnym i górnym.

Po ustaleniu początkowego stanu dźwigara, zostaje on obciążony programowym obciążeniem  $G_1$ , jednostajnie rozłożonym na całej rozpiętości. Nowe obciążenie spowoduje zmianę oddziaływań węzłowych oraz zmianę sił naciągu w obu ciągach.

Siły naciągu  $H_{1c}$  i  $Z_{1c}$  oraz zastępcze oddziaływanie węzłowe  $W_1$  obliczyć można przybliżonym sposobem z trzech poniższych równań [8], z których pierwsze stanowi warunek nierozdzielności obu ciągów dla środkowego punktu ustroju, a dwa kolejne, to równania Kaczurina [3] przystosowane dla ciągu dolnego i górnego.

$$\frac{M_{1,d}}{H_{1c}} + \frac{M_{1,g}}{Z_{1c}} = f, \quad (2)$$

$$H_{1c}^3 - H_{1c}^2 \left( H_{0c} - \frac{W_0^2 l^2 E_d A_d}{24 H_{0c}^2} - \frac{\delta E_d A_d}{1} \right) - \frac{(W_1 + G_1)^2 l^2 E_d A_d}{24} = 0, \quad (3)$$

$$Z_{1c}^2 - Z_{1c} \left( Z_{0c} - \frac{W_0^2 l^2 E_g A_g}{24 Z_{0c}^2} - \frac{\delta E_g A_g}{1} \right) - \frac{W_1^2 l^2 E_g A_g}{24} = 0, \quad (4)$$

gdzie:

$M_{1,d}$  - moment zginający w środkowym punkcie zastępczej belki swobodnie podpartej obciążonej przez  $G_1 + W_1$ ,

$M_{1,g}$  - moment zginający w środkowym punkcie zastępczej belki swobodnie podpartej obciążonej przez  $W_1$ ,

$E_d, A_d$  - współczynnik sprężystości i pole przekroju cięgna dolnego,  
 $E_g, A_g$  - współczynnik sprężystości i pole przekroju cięgna górnego,  
 $\delta$  - sprężyste skrócenie rdzenia.

Pozostałe oznaczenia jak na rysunkach.

W celu obliczenia sił w cięgnach dla programowego obciążenia  $G_2$  jednostajnie rozłożonego na połowie dźwigara, zastąpiono je obciążeniem symetrycznym  $G_{2/2}$ , jednostajnie rozłożonym na całej rozpiętości i obciążeniem antysymetrycznym  $G_{2/2}$ , jednostajnie rozłożonym na połowach rozpiętości. Obliczenie dźwigara ciągnowego obciążonego jednostajnie na całej rozpiętości omówiono wyżej. Dzięki symetrii ustroju, w analogiczny sposób obliczyć można taki dźwigar dla antysymetrycznego obciążenia, przyjmując jednakowe oddziaływania w każdym węźle.

Obciążenie jednostajnie rozłożone na połowie rozpiętości dźwigara może wystąpić podczas wykonywania pokrycia dachowego.

Jak już wspomniano na wstępie, rdzeń służy do przejścia poziomych oddziaływań z cięgna dolnego i górnego. W celu zwiększenia ogólnej stateczności rdzenia zostaje on wstępnie sprężony za pomocą cięgien, symetrycznie rozmieszczonych względem głównych osi przekroju. Na rysunkach 2a, b i c przedstawiono schematycznie warianty konstrukcji takiego rdzenia. Posiada on końce przegubowe i podzielony jest dyskretnymi kontaktami na  $n$  równych części.

Siłę krytyczną w czasie sprężania obliczyć można z poniższego wzoru, wprowadzonego przez Eimera [1] i Kaufmana [4].

$$S_{kr} = \frac{n^2 I^2 E J}{l^2}, \quad (5)$$

gdzie:

$E J$  - współczynnik sprężystości i moment bezwładności rdzenia,  
 $l$  - długość rdzenia.

Kolejnym zadaniem jest wyznaczenie siły krytycznej, gdy rdzeń sprężony poddany jest równocześnie zewnętrznej sile ściskającej - w stanie początkowym siłą  $H_{0c} + Z_{0c}$ , a w czasie obciążenia programowego siłą  $H_{1c} + Z_{1c}$ .

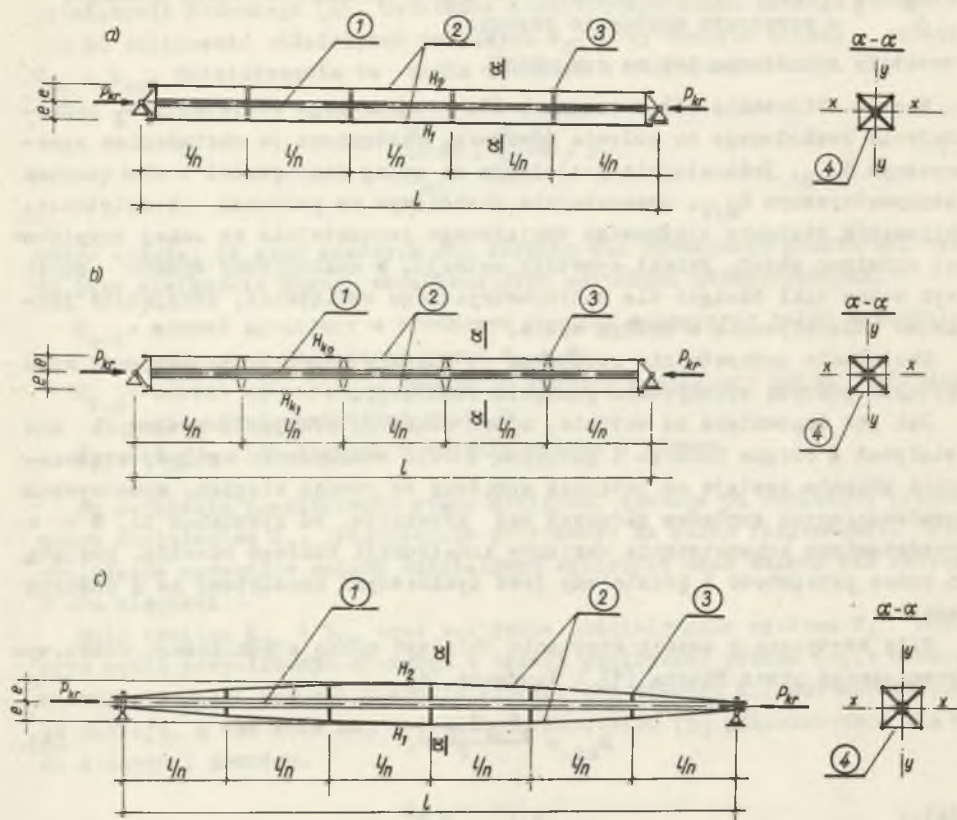
Zagadnienie to zostało opracowane w sposób ścisły przez Eimera [1] na podstawie równania różniczkowego odkształconego trzonu słupa oraz przez Jankowiaka [2] za pomocą metody energetycznej.

W niniejszej publikacji obliczono wielkość siły krytycznej w sposób przybliżony, korzystając z metody energetycznej.

Z uwagi na gęste rozmieszczenie kontaktów można przyjąć, że styk cięgien z rdzeniem jest ciągły.

Równanie odkształconej przyjęto w postaci:

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (6)$$



Rys. 2. Schemat rdzenia wstępnie sprężonego: 1 - rdzeń; 2 - cięgna sprężające; 3 - kontakty; 4 - rozporki

Między wielkością  $H_1$  oraz odkształceniem cięgna, w wyniku wybachania się rdzenia, istnieje zależność:

$$\Delta = (H_1 - H_0) \frac{1}{E_c \cdot A_c}, \quad (7)$$

gdzie:

$H_0$  - siła w ciągnie po wstępnym sprężeniu rdzenia,

$H_{1=1,2}$  - siła w ciągnie w czasie wybachania się rdzenia,

$E_c A_c$  - współczynnik sprężystości i powierzchnia przekroju cięgna sprężającego.

Wielkość  $\Delta$  można również wyznaczyć na drodze geometrycznej dodając do siebie przemieszczenia końcowych punktów skrajnych kontaktów i wówczas  $\Delta = 2 e \operatorname{tg} \varphi'$ .

Wychodząc z równania odkształconej

$$\operatorname{tg} \varphi' = y' = \frac{f \pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}$$

i stąd

$$\Delta = \frac{2 e f \pi}{l}. \quad (8)$$

Z równania (7) i (8) otrzymano:

$$\frac{H_1 - H_2}{2} = \frac{2 e f \pi E_c A_c}{l^2} = \Delta H_1 = - \Delta H_2. \quad (9)$$

Przyrównując pracę siły zewnętrznej  $L$

$$L = P_{kr} \cdot \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx = \frac{P_{kr} r^2 \pi^2}{4 l} \quad (10)$$

do przyrostu energii potencjalnej  $\Delta V$

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{E_c J_c}{2} \int_0^l (y'')^2 dx + \frac{4(\Delta H)^2 l}{2 E_c A_c} = \\ &= \frac{\pi^4 E_c J_c r^2}{4 l^3} + \frac{8 e^2 r^2 \pi^2 E_c A_c}{l^3}, \end{aligned} \quad (11)$$

otrzymano

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 E_c J_c}{l^2} + \frac{32 e^2 E_c A_c}{l^2}. \quad (12)$$

Silę krytyczną można zwiększyć przez wykształcenie rdzenia ze sztywnymi kontaktami, do których po wykonaniu sprężenia, zaciśnięte zostaną ciągnąca sprężające. Zamocowanie cięgien do kontaktów uniemożliwi ich wzajemne przemieszczenie w czasie wybaczenia, zwiększając tym samym ogólną stateczność rdzenia. Schemat takiego rdzenia pokazany jest na rys. 2b.

Między wielkością  $H_{k1}$  oraz odkształceniem cięgna istnieje tu zależność

$$\Delta_{k1} = (H_{k1} - H_0) \frac{1}{n E_c A_c}, \quad (13)$$

gdzie:

$H_0$  - siła w cięgnie po wstępnym sprężeniu rdzenia,

$H_{k1=1,2}$  - siła w cięgnie w przedziale k podczas wybaczenia się rdzenia.

Pozostałe oznaczenia wyjaśnia rys. 2b.

Wielkość  $\Delta_{k1}$  można również wyznaczyć z zależności geometrycznej obliczając przemieszczenia końcowych punktów kontaktów przedziału k i wówczas

$$\Delta_{k1} = e \operatorname{tg} \varphi_{k-1} - e \operatorname{tg} \varphi_k. \quad (14)$$

Wychodząc z równania odkształconej (6)

$$\operatorname{tg} \varphi_{k-1} = y'_{k-1} = \frac{f \pi}{l} \cos \frac{\pi(k-1)}{n}$$

i

$$\operatorname{tg} \varphi_k = y'_k = \frac{f \pi}{l} \cos \frac{\pi k}{n}.$$

Po wstawieniu powyższych wyrażeń do równania (14) otrzymano:

$$\Delta_{k1} = \frac{e f \pi}{l} \left( \cos \frac{\pi(k-1)}{n} - \cos \frac{\pi k}{n} \right) = \frac{e f \pi}{l} \vartheta_k. \quad (15)$$

Z kolei z równań (13) i (15)

$$\frac{H_{k1} - H_{k2}}{2} = \frac{e f \pi n E_c A_c \vartheta_k}{l^2} = \Delta H_{k1} = - \Delta H_{k2}. \quad (16)$$

Przyrównując przyrost energii potencjalnej

$$\Delta V = \frac{\pi^4 E_c J_c f^2}{4 l^3} + \sum_1^n \frac{2 e^2 f^2 \pi^2 n E_c A_c \vartheta_k^2}{l^3}. \quad (17)$$

do pracy siły zewnętrznej

$$L = \frac{P_{k1} f^2 \pi^2}{4 l}. \quad (18)$$

otrzymano

$$F_{kr} = \frac{x^2 E_c J_x}{l^2} + \sum_1^n \frac{8 e^2 n E_c A_c \sigma_k^2}{l^2} \quad (19)$$

Siłę krytyczną można również powiększyć przez sprężenie rdzenia cięgnami o kształcie sinusoïdy lub paraboli jak to pokazano na rys. 2c.

Kształt cięgien sprężających określono wg równania:

$$Z_1 = -Z_2 = e \sin \frac{\pi x}{l} \quad (20)$$

a równanie odkształconej w postaci (6)

Między wielkością  $H_1$  oraz odkształceniem cięgna przyjęto zależność podaną przez Rajmusa [5].

$$U_1(l) - U_1(0) = (H_1 - H_0) \frac{1}{E_c A_c} \pm \int_0^l y' Z_1^2 dx - 0,5 \cdot \int_0^l (y')^2 dx, \quad (21)$$

gdzie:

- $H_0$  - siła w cięgnie,
- $H_{1=2}$  - siła w cięgnie podczas wybaczenia się rdzenia,
- $U_1$  - przesunięcia poziome końców cięgna.

W chwili wybaczenia się rdzenia zbliżenie się jego punktów podporowych wynosi:

$$U(l) - U(0) = -0,5 \int_0^l (y')^2 dx. \quad (22)$$

Z równań (21) i (22) otrzymano:

$$(H_1 - H_0) \frac{1}{E_c A_c} \pm \int_0^l y' Z_1^2 dx = 0 \quad (23)$$

i stąd

$$\left. \begin{aligned} H_1 - H_0 &= \frac{E_c A_c}{l} \int_0^l y' Z_1^2 dx = \Delta H_1 \\ H_2 - H_0 &= -\frac{E_c A_c}{l} \int_0^l y' Z_2^2 dx = -\Delta H_2 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

oraz

Z przyrównania przyrostu energii potencjalnej

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{E_r J_r}{2} \int_0^l (y'')^2 dx + \frac{4 l}{2 E_c A_c} \left( \frac{E_c A_c}{l} \int_0^l y' z' dx \right)^2 = \\ &= \frac{\pi^4 E_r J_r f^2}{4 l^3} + \frac{e^2 f^2 \pi^4 E_c A_c}{2 l^3}. \end{aligned} \quad (25)$$

do pracy siły zewnętrznej

$$L = \frac{P_{kr} f^2 \pi^2}{4 l}$$

określono

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 E_r J_r}{l^2} + \frac{2 e^2 \pi^2 E_c A_c}{l^2}. \quad (26)$$

Przyjmując w dalszych rozważaniach równanie odkształconej w postaci:

$$y = \alpha \sin \frac{n \pi x}{l} \quad (n \text{ półfal}) \quad (27)$$

przyrost energii potencjalnej wyrazi się przez

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{n^4 \pi^4 E_r J_r \alpha^2}{4 l^3} + \frac{4 l}{2 E_c A_c} \cdot \left( \frac{E_c A_c}{l} \int_0^l \frac{\alpha n \pi}{l} \cdot \right. \\ &\left. \cdot \cos \frac{n \pi x}{l} \cdot \frac{e \pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l} dx \right)^2 = \frac{n^4 \pi^4 E_r J_r \alpha^2}{4 l^3}, \end{aligned} \quad (28)$$

a praca siły zewnętrznej:

$$L = \frac{P_{kr} n^2 \pi^2 \alpha^2}{4 l}. \quad (29)$$

Z równania  $L = \Delta V$

$$P_{kr} = \frac{n^2 \pi^2 E_r J_r}{l^2}. \quad (30)$$

Ponieważ ustaliśmy najmniejszą siłę krytyczną, utrata stateczności może wystąpić przy jednej lub dwóch półfalach.

Utrata stateczności przy jednej półfali wystąpi wówczas, jeżeli



$$\frac{2 e^2 \pi^2 E_c A_c}{l^2} < 3 \frac{\pi^2 E_x J_x}{l^2}$$

W przypadku niespełnienia powyższej nierówności utrata stateczności wystąpi przy dwóch półfalach.

Wzory (26) i (30), wyprowadzone metodą energetyczną są identyczne z wzorami Romanowa [7] wyprowadzonymi z równania różniczkowego osi odkształconej.

W powyższych rozważaniach, prowadzących do ustalenia siły krytycznej w sprężonym rdzeniu, pominięto wpływ ciężaru własnego. Nie miałoby to praktycznego znaczenia przy małych rozpiętościach dźwigarów, natomiast przy większych rozpiętościach wpływ ten może w pewnym stopniu zmniejszać siłę krytyczną. Eliminację tego wpływu najłatwiej można by przeprowadzić w czasie montażu za pomocą niesymetrycznego sprężenia rdzenia. W przypadku rdzenia przedstawionego na rys. 2e, odpowiednie zwiększenie siły w dolnych cięgnach sprężających całkowicie zrównoważy ciężar własny rdzenia utrzymując go stale w linii prostej.

Ponadto trzeba podkreślić, że wyprowadzone wzory na ustalenie siły krytycznej są słuszne wówczas, jeżeli cięgna sprężające są stale napięte. W celu spełnienia wymaganego warunku należy siłę sprężającą obliczyć z następującej zależności:

$$S = m(H + Z) \frac{E_c A_c}{E_x A_x + E_c A_c}, \quad (31)$$

gdzie:

S - siła sprężająca rdzeń,

H, Z - oddziaływania poziome cięgna dolnego i górnego,

m - współczynnik pewności.

Omówiony w referacie stalowy dźwigar ciągnowy może być wykorzystany w przekryciach dachowych o dużych rozpiętościach, eliminując tym samym słupy pośrednie w halach. Ponadto nie wymaga on kłopotliwych odciągów dla przejścia oddziaływań poziomych. Konstrukcja dźwigara charakteryzuje się dużą prostotą i jest oszczędna pod względem zużycia stali.

## LITERATURA

- [1] Eimer Cz.: Elementy ściskane wstępnie sprężone. Inżynieria i Budownictwo nr 6/1951.
- [2] Jankowiak W.: Stateczność stalowych słupów sprężonych. Politechnika Poznańska. Rozprawy nr 13.
- [3] Kuczurin W.K.: Teoria konstrukcji wiszących. Arkady, Warszawa 1965.
- [4] Kaufman S.: Z zagadnień stateczności w betonie sprężonym. Inżynieria i Budownictwo nr 5/1950.
- [5] Rajnus G. B.: Raszet fierm iz trosow. Leningradzkij dom nauczno - techniczeskoj propagandy, 1962.
- [6] Razmadzje A. N.: Nowyje prednapriazennyje kombinirowannyje wantowyje fiermy. Referat na IV konferenciji naukowo - techniczeskiej - Konstrukcje metalowe - Warszawa, czerwiec 1970.
- [7] Romanow W. P.: Ob ustojcziwosti mnogostojecznoego szprengelija. Stroitel'naja mehanika i raszet sooruzenij nr 1/1966.
- [8] Zawada S.: Obliczanie dachowej siatki ciegnowej rozpiętej między dwoma ukośnymi łukami parabolicznymi. Inżynieria i Budownictwo nr 2/1966.

## СТАЛЬНАЯ МЯЖЕВАЯ ФЕРМА ДЛЯ КРОВЕЛЬНЫХ ПОКРЫТИЙ

## R e z u m e

В статье представлено новую идею предварительно напряженной мяжевой фермы, которая может быть использована в легких покрытиях сооружений с большими пролетах. Подано практический способ расчета сил в мяжах и приведено расщужденая дающие возможность определения силы в центральном стержне.

## A PULL - ROD STEEL GIRDER FOR ROOF COVENS

## S u m m a r y

In the paper some new idea of initially compressed pull - rod steel girder has been presented. It can be used in light roof covers, in structures of wide spans. A practical way of determining the forces in a pullrods has been given. Some considerations aiming at determination of a critical force in the core have been carried out too.