

Stefan PASZEK

Instytut Podstawowych Problemów Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

ZASTOSOWANIE REKURENCYJNEJ METODY ROZWIĄZANIA MACIERZOWYCH RÓWNAŃ STANU DO ANALIZY PRZEBIEGÓW W MASZYNACH INDUKCYJNYCH

Streszczenie. Równania stanu elektromagnetycznego maszyny indukcyjnej z wirnikiem wielokłatkowym przy stałej prędkości wirowania są równaniami liniowymi, które można przedstawić w postaci równań autonomicznych rozwiązywalnych metodą rekurencyjną przy zastosowaniu ETO. Przedstawiono analizę stanu nieustalonego maszyny załączonej do sieci sztywnej i przedyskutowano możliwość zastosowania metody do badania przebiegów dla maszyny zasilanej przez komutator tyrystorowy.

1. METODA PRZESTRZENI STANÓW W ANALIZIE SILNIKA INDUKCYJNEGO ZASILANEGO Z SYMETRYCZNEJ SIECI SZTYWNEJ

Stan elektromagnetyczny symetrycznej maszyny indukcyjnej składającej się z jednego obwodu stojana i (n-1) obwodów wirnika opisuje układ równań:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{D}_{t1} \underline{\Psi}_1 + R_1 \underline{I}_1 \\ 0 &= \underline{D}_{t2} \underline{\Psi}_2 + R_2 \underline{I}_2 \\ 0 &= \underline{D}_{t2} \underline{\Psi}_3 + R_3 \underline{I}_3 \\ 0 &= \underline{D}_{t2} \underline{\Psi}_n + R_n \underline{I}_n\end{aligned}\tag{1.1}$$

gdzie indeks 1 dotyczy obwodu stojana, a indeksy od 2 do n dotyczą obwodów wirnika. Litery podkreślone oznaczają wielkości zespolone. Ponadto:

$$\underline{D}_{t1} = \left(\frac{d}{dt} + j\omega_x \right), \quad \underline{D}_{t2} = \left(\frac{d}{dt} + j(\omega_x - \omega) \right)\tag{1.2}$$

gdzie przez ω_x oznaczono umowną prędkość kątową układu współrzędnych; ω - elektryczną prędkość kątową wirnika (związaną z prędkością mechaniczną)

ną wirnika ω_m wyrażeniem $\omega_m p_b = \omega$, przy czym p_b - liczba par biegunów).

Przy uwzględnieniu, że wektor strumieni skojarzonych $[\Phi]$ zależy od wektora $[I]$ odpowiednio do

$$[\Phi] = [L][I] \quad (1.3)$$

można przekształcić równania (1.1) doprowadzając je do postaci kanonicznej

$$\frac{d}{dt}[I] = [A][I] + [B]u_1 \quad (1.4)$$

gdzie:

$[A]$ - macierz kwadratowa $n \times n$,

$[B]$ - macierz kolumnowa.

Wektor wymuszenia wyznaczony przez symetryczne sinusoidalne napięcie zasilania stojana o pulsacji ω_1

$$u_1 = \underline{u}_1(0)e^{j(\omega_1 - \omega_x)t}$$

jest wygodnie przedstawić również jako wynik rozwiązania równania różniczkowego generującego wymuszenie

$$\frac{du_1}{dt} = j(\omega_1 - \omega_x)u_1 \quad (1.5)$$

Uwzględniając równanie (1.4) i (1.5) można przedstawić ostatecznie ogólne jednorodne autonomiczne równanie stanu

$$\frac{d}{dt}[V] = [C][V] \quad (1.6)$$

gdzie:

$$[V] = [\underline{I}_1, \underline{I}_2, \dots, \underline{I}_n, \underline{u}_1]_T$$

$$[C] = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [0] & j(\omega_1 - \omega_x) \end{bmatrix} \quad - \text{podstawowa macierz kwadratowa } (n+1) \times (n+1).$$

Inaczej rozpisując równanie (1.1), otrzymujemy

$$\frac{d}{dt}[\Phi] = [\underline{u}_1] - ([\omega] + [R][L]^{-1})[\Phi] \quad (1.7)$$

gdzie macierz $[\omega] = \begin{bmatrix} \omega_x & & & \\ & \omega_x - \omega & & \\ & & \omega_x - \omega & \\ & & & \ddots \\ & & & & \omega_x - \omega \end{bmatrix}$ o wymiarach $n \times n$.

Korzystając z równania (1.7) oraz (1.5), otrzymujemy równanie (1.8) podobne do równania (1.6)

$$\frac{d}{dt} [\underline{v}_1] = [\underline{C}_1] [\underline{v}_1] \quad (1.8)$$

gdzie:

$$[\underline{v}_1] = [\underline{u}_1, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n], \quad [\underline{C}_1] = \begin{bmatrix} j(\omega_1 - \omega_x) & 0 & 0 & 0 \dots \\ 1 & & & \\ 0 & & \{ [\omega] + [R] [L]^{-1} \} & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie równania (1.6) bądź (1.8) można zapisać

$$[\underline{v}] = e^{[G]t} [\underline{v}(0)] \quad (1.9)$$

gdzie $[\underline{v}(0)]$ macierz kolumnowa wartości początkowych wektora stanu. Macierz $e^{[G]t}$ jest macierzą podstawową rozwiązania liniowych równań różniczkowych o stałych współczynnikach. Istnieje kilka metod obliczania macierzy podstawowej (np. metoda Sylwestera lub metoda odwrotnej transformacji operatorowej), jednak żadna z nich nie obejdzie się bez znajomości pierwiastków równania charakterystycznego

$$\det [\lambda [1] - [C]] = [0]$$

Prócz elegancji formalnego zapisu rozwiązania (1.9) postać ta jest interesująca z powodu możliwości jego wykorzystania do bezpośredniego wyznaczenia konkretnych przebiegów czasowych współrzędnych wektora stanu za pomocą maszyny cyfrowej. Metoda bazuje na rozwinięciu w szereg potęgowy względem zmiennej czasu t macierzy podstawowej podobnie jak rozwija się w szereg Ma Laurina funkcje e^{Ct}

$$\begin{aligned} e^{[C]t} &= [1] + \frac{[C]t}{1!} + \frac{[C]^2 t^2}{2!} + \frac{[C]^3 t^3}{3!} + \dots \\ &= [1] + [C]t + \frac{[C]t}{2} \left\{ \frac{[C]t}{1!} \right\} + \frac{[C]t}{3} \left\{ \frac{([C]t)^2}{2!} \right\} + \dots \end{aligned} \quad (1.10)$$

Łatwo zauważyć, że każdy wyraz w nawiasach faliastych jest równy całemu poprzedniemu wyrażeniu szeregu, co określa schemat rekurencyjny obliczeń. Obliczenia ogranicza się wtedy do tej sumy częściowej liczby wyrazów, przy której pozostałe wyrazy są pomijalnie małe w stosunku do sumy częściowej.

Z zapisu (1.9) widać, że za znajomości wartości początkowej dla $t = 0$ wektora stanu można otrzymać rozwiązanie równania (1.6) w poszczególnych chwilach czasu. Podobnie rozwiązanie w jednym punkcie pozwala na rozwiązanie dla innych punktów wybranego przedziału czasu, np. $(t_1, t_1 + h)$

$$[\underline{v}(t)] = e^{(t-t_1)} [C] [\underline{v}(t_1)] \quad (1.11)$$

Po podzieleniu tego przedziału na n_1 odcinków i po uwzględnieniu takiego podziału w równaniu (1.11) otrzymuje się

$$[\underline{v}(t_1 + \frac{nh}{n_1})] = e^{\frac{nh}{n_1}} [C] [\underline{v}(t_1)] \quad (1.12)$$

gdzie $n = 1, 2, \dots, n_1$.

Wygodnie jest przejść na inną postać macierzy, która nie wymaga liczenia wyrazów macierzy dla każdego punktu pracy.

Dla punktu przedziału $\frac{n-1}{n_1} h$ obowiązuje

$$[\underline{v}(t_1 + \frac{n-1}{n_1} h)] = e^{\frac{n-1}{n_1} h} [C] [\underline{v}(t_1)]$$

stąd

$$[\underline{v}(t_1)] = e^{\frac{n-1}{n_1} h} [C] [\underline{v}(t_1 + \frac{n-1}{n_1} h)]$$

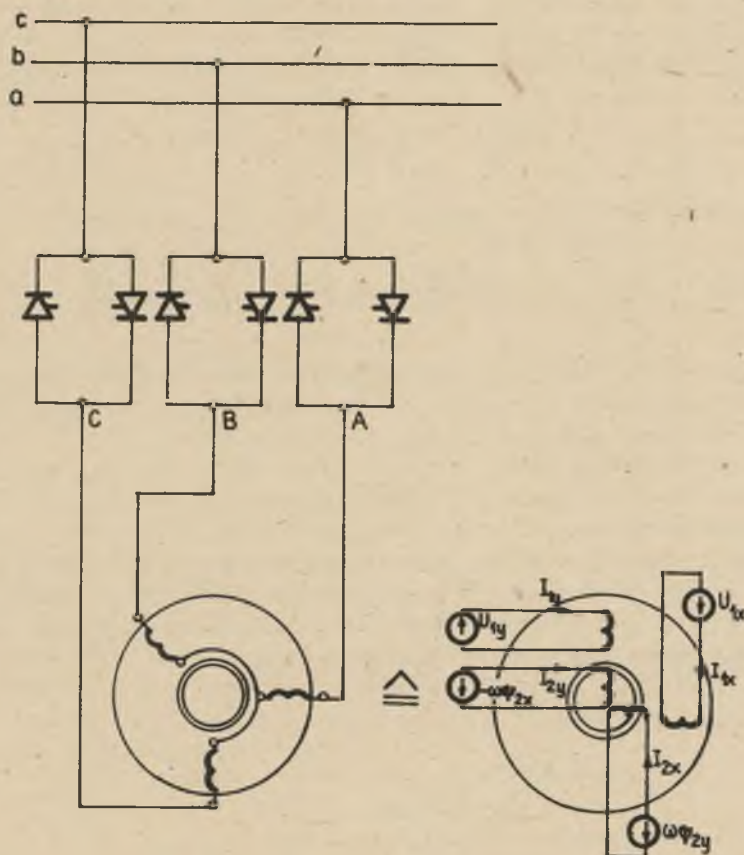
Podstawiając w ten sposób obliczone $[\underline{v}(t_1)]$ do równania (1.12), otrzymuje się

$$[\underline{v}(t_1 + \frac{nh}{n_1})] = e^{\frac{h}{n_1}} [C] [\underline{v}(t_1 + \frac{n-1}{n_1} h)]. \quad (1.13)$$

2. METODA PRZESTRZENI STANÓW W ANALIZIE SILNIKA INDUKCYJNEGO ZASILANEGO POPRZECZ SYMETRYCZNY KOMUTATOR TYRYSTOROWY

Stan zasilania silnika składa się z następstwa stanów przejściowych będących wynikiem cyklicznych przełączeń w obwodzie stojana spowodowanych przez komutator tyrystorowy.

Na rys. 1 przedstawiono układ zasilania.



Rys. 1

2.1. Stany zasilania uzwojenia stojana maszyny indukcyjnej

Przyjęto następujące założenia do komutatora tyrystorowego:

- a) układ zasilany jest z trójfazowej symetrycznej sieci sztywnej

$$U_A^{(z)} = U_k \sin \omega_1 t; \quad U_B^{(z)} = U_k \sin(\omega_1 t - \frac{4\pi}{3}); \quad U_C^{(z)} = U_k \sin(\omega_1 t - \frac{2\pi}{3}),$$

b) układ zapłonowy komutatora jest symetryczny,

c) tyrystory w układzie komutatora są idealne.

Z założenia a, b, c wynika, że napięcia fazowe uzwojenia stojana oraz prądy stojana są przemienne, identyczne w kształcie, lecz przesunięte względem siebie o kąt $\frac{2\pi}{3}$.

$$i_B(\omega_1 t + \frac{2\pi}{3}) = i_A(\omega_1 t); \quad i_C(\omega_1 t + \frac{2\pi}{3}) = i_B(\omega_1 t); \quad i_A(\omega_1 t + \frac{2\pi}{3}) = i_C(\omega_1 t) \quad (2.1)$$

$$i_A(\omega_1 t + \pi) = -i_A(\omega_1 t); \quad i_B(\omega_1 t + \pi) = -i_B(\omega_1 t); \quad i_C(\omega_1 t + \pi) = -i_C(\omega_1 t) \quad (2.2)$$

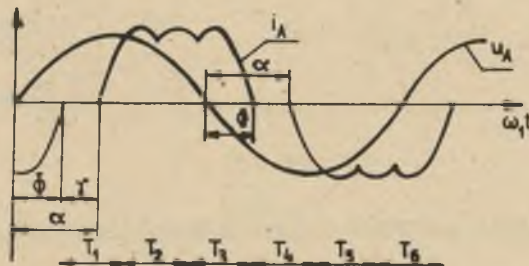
Z zależności (2.1) i (2.2) wynika

$$i_A(\omega_1 t + \frac{\pi}{3}) = -i_B(\omega_1 t); \quad i_B(\omega_1 t + \frac{\pi}{3}) = -i_C(\omega_1 t); \quad i_C(\omega_1 t + \frac{\pi}{3}) = -i_A(\omega_1 t) \quad (2.3)$$

Z relacji (2.3) wynika, że znając przebiegi czasowe prądów (napięć) we wszystkich trzech fazach w przedziale $T/6$ można określić przebieg prądów (napięć) w całym okresie.

Konieczne jest rozpatrzenie możliwych stanów zasilania silnika. Jako parametr sterowania przyjmuje się kąt α (kąt otwarcia tyrystorów) lub kąt η odpowiadający przedziałowi czasu zawartemu między chwilą zaniku prądu w fazie stojana a chwilą ponownego pojawienia się prądu w tej samej fazie.

Na rys. 2 zilustrowane są przebiegi napięć i prądów jednej fazy oraz kąty α i η . Cały okres jest podzielony na sześć odcinków czasowych każdy o długości $\pi/3$. Oznaczono je $T_1, T_2 \dots T_6$.



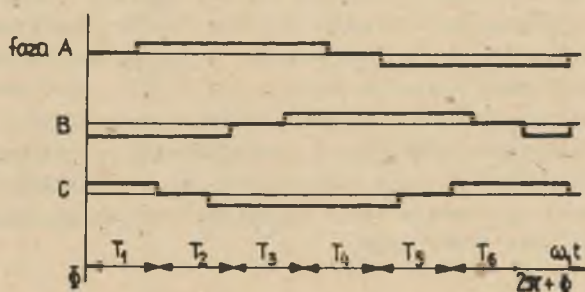
Rys. 2

Z rys. 2 oraz z definicji kątów α, η, ϕ wynika

$$\alpha = \eta + \phi$$

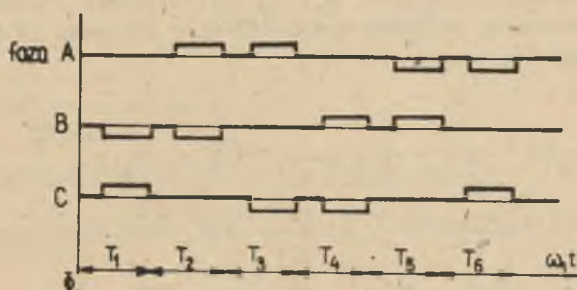
Analizując przedziały przebiegów prądów przy zmianie kąta można stwierdzić możliwość występowania następujących przypadków:

- a) Z warunku symetrii prądów (2.2) silnika trójfazowego wynika, że przy kątach η zawartych w przedziale $(0, \pi/3)$ trzy bądź dwie fazy silnika są przyłączone do sieci, silnik pracuje w tzw. "systemie 3-2". Diagram przebiegu prądów przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3

- b) Przypadek szczególny $\eta = \pi/3$. Do silnika są na przemian przyłączone tylko dwie fazy sieci zasilającej.
- c) W przedziale $\eta \in (\pi/3, 2\pi/3)$ są przyłączone do sieci dwie bądź jedna faza silnika. Wobec braku przewodu zerowego przy jednej fazie przyłączonej do sieci w uzwojeniach stojana prąd nie płynie, silnik pracuje w "systemie 2-0". Diagram przebiegu prądów fazowych w tym przypadku przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4

d) W przedziale $\pi \in (2\pi/3, \pi)$ tylko jedna faza silnika jest przyłączona do sieci. W uzwojeniach stojana prądy nie płyną.

Dla określenia przebiegów prądów i napięć fazowych silnika indukcyjnego zasilanego z tyrystorowego komutatora napięcia konieczna jest znajomość równań obowiązujących dla następujących trzech możliwych stanów pracy silnika:

- 1) zasilane są trzy fazy silnika (zasilanie trójprzewodowe) $i_A, i_B, i_C \neq 0$,
- 2) jedna faza silnika jest odłączona od sieci, prąd w odłączonej fazie równa się zero (zasilanie dwuprzewodowe),
- 3) wszystkie trzy fazy silnika są odłączone od sieci (zasilanie odłączone) $i_A = i_B = i_C = 0$.

W rozpatrywanym przypadku zasilania stojana maszyny indukcyjnej poprzez komutator tyrystorowy występują skokowe zmiany połączenia stojana maszyny z siecią trójfazową. Z tego względu wygodnie jest wprowadzić układ współrzędnych nieruchomy względem stojana ($\omega_x = 0$). Oś liczb rzeczywistych, którą oznaczymy symbolem x , pokrywa się z osią fazy A stojana. Oś liczb urojonych oznaczymy symbolem y . Przejście z chwilowych wartości fazowych wyidealizowanej maszyny indukcyjnej w_k na wielkości osiowe dokonuje się w oparciu o transformację dwuosiową przy uwzględnieniu, że prąd składowej zerowej jest równy zero.

$$\underline{w}_1 = w_{1x} + jw_{1y} = \sqrt{\frac{2}{3}}(w_{1A} + \underline{a}w_{1B} + \underline{a}^2w_{1C}) \quad (2.4)$$

Stąd wynikają składowe w_{1x} i w_{1y}

$$\begin{bmatrix} w_{1x} \\ w_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}}, & -\frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}}, & -\frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} \\ 0, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1A} \\ w_{1B} \\ w_{1C} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Przejście z wielkości osiowych w_x, w_y na wielkości fazowe dokonuje macierz transponowana do macierzy występującej w równaniu (2.5). Z równań (2.2) i (2.3) wynika

$$\underline{w}_1(\omega_1 t + \pi) = -\underline{w}_1, \quad \underline{w}_1(\omega_1 t + \frac{\pi}{3}) = -\underline{w}_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}} \quad (2.6)$$

Nieustalony elektromagnetyczny stan maszyny indukcyjnej dwukłatkowej

$$\underline{U}_1 = \frac{d}{dt} \underline{\Psi}_1 + R_1 \underline{I}_1; \quad 0 = (\frac{d}{dt} - j\omega) \underline{\Psi}_2 + R_2 \underline{I}_2$$

$$\underline{\psi}_1 = L_1 \underline{I}_1 + M \underline{I}_2; \quad \underline{\psi}_2 = M \underline{I}_1 + L_2 \underline{I}_2$$

można opisać równaniem macierzowym

$$\frac{d}{dt} [I] = - [L]^{-1} [R] [I] + [L]^{-1} [U] \quad (2.7)$$

gdzie:

$$[U] = [u_{1x}, u_{1y}, 0, 0]^T \quad [I] = [I_{1x}, I_{1y}, I_{2x}, I_{2y}]^T$$

$$[L] = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & M & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & M \\ M & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & M & 0 & L_2 \end{bmatrix} \quad [R] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega M & R_2 & \omega L_2 \\ -\omega M & 0 & -\omega L_2 & R_2 \end{bmatrix}$$

Podobnie jak w równaniu (1.6) równanie (2.7) można przedstawić w postaci autonomicznej, jeśli przedstawi się wektor wymuszenia $[U]$ jako wektor stanu pewnego układu generującego ten wektor opisanego również równaniem różniczkowym.

Wtedy

$$\frac{d}{dt} [V] = [M] [V] \quad (2.8)$$

gdzie $[V] = \begin{bmatrix} [I] \\ [U] \end{bmatrix}$ - wektor stanu, $[M]$ - macierz układu.

Rozwiązanie równania (2.8) można przedstawić w postaci

$$[V] = e^{[M]t} [V(0)] \quad (2.9)$$

Funkcja $e^{[M]t}$ jest zdefiniowana w postaci nieskończonego szeregu potęgowego

$$e^{[M]t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[M]^n t^n}{n!}$$

$[V(0)]$ - wektor stanu w chwili $t = 0$.

2.2. Równanie stanu dla zasilania 3-przewodowego

Przy zasilaniu stojana maszyny indukcyjnej napięciem trójfazowym symetrycznym sinusoidalnym

$$u_{1x} = u_{1x}^{(z)} = \sqrt{\frac{3}{2}} u_k \sin \omega_1 t; \quad u_{1y} = u_{1y}^{(z)} = -\sqrt{\frac{3}{2}} u_k \cos \omega_1 t \quad (2.10)$$

Odpowiednio do (2.7) równanie macierzowo-wektorowe dla tego stanu pracy

$$\frac{d}{dt} [V] = [A] [V] \quad (2.11)$$

gdzie:

$$[V] = [I_{1x}, I_{1y}, I_{2x}, I_{2y}, u_{1x}^{(z)}, u_{1y}^{(z)}]_T$$

$$[A] = \begin{bmatrix} -[L]^{-1} [R], [L]^{-1} [C_1] \\ [0] \quad \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 \\ \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad [C_1] = \begin{bmatrix} 1000 \\ 0100 \end{bmatrix}_T$$

2.3. Równanie stanu dla zasilania 2-przewodowego

Rozpatrzy się przypadek gdy uzwojenie fazy A maszyny jest odłączone od sieci zasilającej. W konsekwencji $I_{1x} = 0$. W osi x jest indukowane napięcie rotacji

$$u_{1x} = \frac{d}{dt} M I_{2x}, \quad u_{1y} = u_{1y}^{(z)} = -\sqrt{\frac{3}{2}} u_k \cos \omega_1 t \quad (2.12)$$

$$\frac{d}{dt} [V] = [B] [V] \quad (2.13)$$

gdzie:

$$[B] = \begin{bmatrix} -[L_2]^{-1} [R], [L_2]^{-1} [C_2] \\ [0] \quad \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 \\ \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$[C_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_T \quad [L_2] = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & M \\ M & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & M & 0 & L_2 \end{bmatrix}$$

2.4. Równanie stanu dla stojana odłączonego od zasilania

W tym stanie pracy $i_A = i_B = i_C = 0$, a na zaciskach stojana indukuje się napięcie od prądów w wirniku.

$$U_{1x} = \frac{d}{dt} M I_{2x}, \quad U_{1y} = \frac{d}{dt} M I_{2y} \quad (2.14)$$

$$\frac{d}{dt} [V] = [C] [V] \quad (2.15)$$

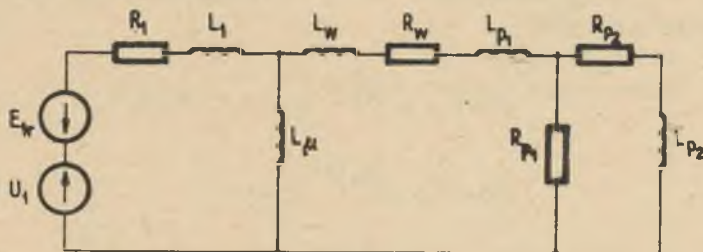
gdzie:

$$[C] = \begin{bmatrix} -[L_3]^{-1} [R], & [0]_T \\ [0] & \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 \\ \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad [L_3] = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & 0 \\ M & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & M & 0 & L_2 \end{bmatrix}$$

Równania macierzowe (2.11), (2.13), (2.15) dla trzech różnych możliwych stanów zasilania silnika umożliwiają znalezienie rozwiązania przebiegów ustalonych. Trzeba przy tym uwzględnić, że w warunkach ustalonych następuje zrównanie wektora stanu na krańcach przedziału okresu zmienności przebiegów. Przekształcenia równań macierzowych przy uwzględnieniu macierzy komutacyjnych wykorzystano ostatecznie do numerycznego obliczenia przebiegów [2], [3].

3. WYZNACZENIE ELEKTROMAGNETYCZNYCH PRZEBIEGÓW NIEUSTALONYCH W MASZY- NIE INDUKCYJNEJ Z WIRNIKIEM DWUKŁATKOWYM

Rozpatrzono maszynę o parametrach $P_N = 400$ kW; $U_N = 6000$ V; $\cos \varphi_N = 0,82$; $n_N = 735 \frac{\text{obr}}{\text{min}}$; $P_b = 4$ i o schemacie zastępczym podanym na rysunku 5.



Schemat zastępczy silnika $U_1 = 4899$ V, $R_1 = 0,92 \Omega$, $R_w = 0,42 \Omega$, $R_{p1} = 3,121 \Omega$, $R_{p2} = 0,66031 \Omega$, $L_1 = 0,0296$ H, $L_\mu = 0,5899$ H, $L_w = 0,011$ H, $L_{p1} = 0,005455$ H, $L_{p2} = 0,01678$ H.

Rys. 5

Z równania (1.8)

$$\frac{d}{dt}[\underline{v}_1(t)] = [\underline{C}_1][\underline{v}_1(t)]$$

gdzie:

$$[\underline{v}_1(t)] = [\underline{u}_1(t), \underline{\psi}_1(t), \underline{\psi}_2(t), \underline{\psi}_3(t)]_T$$

$$[\underline{C}_1] = \begin{bmatrix} j(\omega_1 - \omega_x) & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & - \{ [\underline{\omega}] + [\underline{R}] [\underline{L}]^{-1} \} & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Odpowiadające schematowi zastępczemu macierze $[\underline{R}]$, $[\underline{L}]$, $[\underline{\omega}]$ wynoszą

$$[\underline{R}] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_w + R_{p1} & R_w \\ 0 & R_w & R_w + R_{p2} \end{bmatrix}; \quad [\underline{L}] = \begin{bmatrix} L_1 + L_\mu & L_\mu & L_\mu \\ L_\mu & L_\mu + L_w + L_{p1} & L_\mu + L_w + L_{p1} \\ L_\mu & L_\mu + L_w + L_{p1} & L_\mu + L_w + L_{p1} + L_{p2} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$[\underline{\omega}] = \begin{bmatrix} \omega_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_x - \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega_x - \omega \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Rozwiązanie podano dla następujących danych: $\omega_x = 0$, $\omega = 0$,

$$\Delta t = \frac{h}{n_1} = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ s}; \quad t_1 = 0; \quad h = 1,5 \text{ s}; \quad [\underline{v}(0)] = [\underline{u}_1, 0, 0, 0]_T$$

Ze wzoru (1.10) wyliczono macierz $e^{\left[\frac{\underline{C}_1}{\Delta t}\right]\Delta t}$, za pomocą której wyznaczono $\underline{v}(\Delta t)$, $\underline{v}(2\Delta t)$, ..., $\underline{v}(h)$

$$\begin{aligned} \underline{v}(\Delta t) &= e^{\left[\frac{\underline{C}_1}{\Delta t}\right]\Delta t} \underline{v}(0) \\ \underline{v}(2\Delta t) &= e^{\left[\frac{\underline{C}_1}{\Delta t}\right]\Delta t} \underline{v}(\Delta t) \\ &\vdots \\ \underline{v}(h) &= e^{\left[\frac{\underline{C}_1}{\Delta t}\right]\Delta t} \underline{v}(h-\Delta t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

W kolejnych wektorach $\underline{v}(i\Delta t)$, gdzie $i = 0, 1, \dots, n_1$, drugi, trzeci, czwarty wiersz oznacza odpowiednio $\underline{\psi}_1, \underline{\psi}_2, \underline{\psi}_3$ w poszczególnych chwilach czasu. Ze wzoru

$$[\underline{I}] = [\underline{L}]^{-1}[\underline{\psi}]$$

wyznaczono wielkości $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$. Prąd k -tej fazy stojana

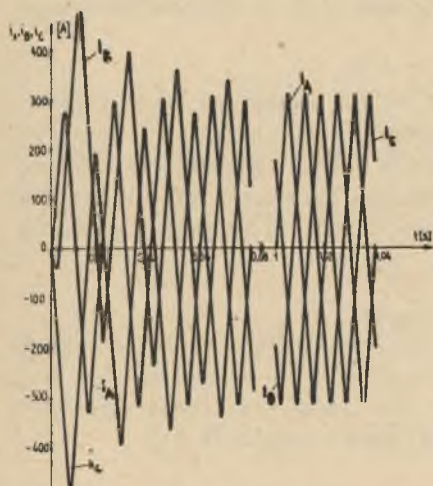
$$i_k = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Re} \left\{ \underline{I}_k e^{j\varphi_k} \right\} \quad (3.4)$$

gdzie:

φ_k - kąt zawarty między osią liczb rzeczywistych a osią fazy k .

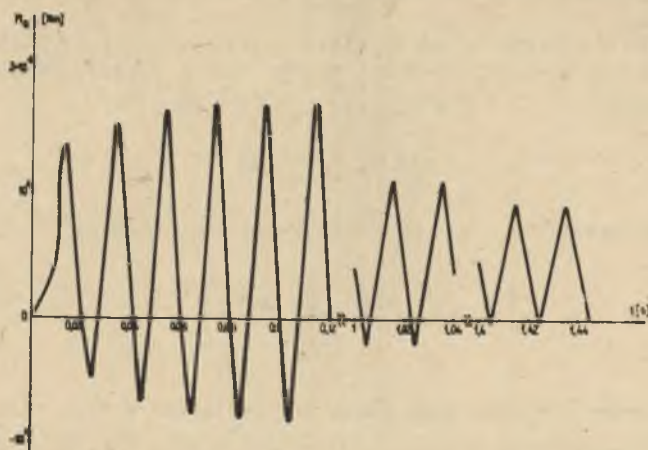
Przebieg momentu elektromagnetycznego wyznaczono z wyrażenia

$$M_e = P_b \operatorname{Re} \left\{ j \underline{\psi}_{1-1}^* \underline{I}_{1-1} \right\} \quad (3.5)$$



Rys. 6

Otrzymane wyniki przebiegów prądów fazowych oraz momentu elektromagnetycznego porównano z wynikami otrzymanymi z rozwiązania układu równań różniczkowych nieliniowych dla tego samego silnika metodą Rungego-Kuty, w przypadku dużego momentu bezwładności mas wirujących $J \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow 0$. Zbieżność wyników była bardzo dobra. Dowodzi to, że podana metoda nadaje się do wyznaczania nieustalonych przebiegów elektromagnetycznych w wieloklatkowej maszynie indukcyjnej. Na rys. 6 i 7 przedstawiono wykresy czasowe przebiegów prądów fazowych oraz momentu elektromagnetycznego.



Rys. 7

4. WYZNACZENIE PRZEBIEGÓW PRĄDÓW DLA SILNIKA ZASILANEGO PRZEZ KOMUTATOR TYRYSTOROWY DLA KĄTA $\varphi \in (0, \frac{\pi}{3})$

Zmianie wartości kąta φ w przedziale $(0, \frac{\pi}{3})$ odpowiada praca układu w "systemie 2-3". By określić przebiegi prądów w całym okresie T napięcia zasilającego, wystarczy rozwiązać równanie w jednym przedziale czasowym równym $\frac{1}{6} T$, np. $\omega_1 t \in (\Phi, \Phi + \frac{\pi}{3})$. W przedziale $(\Phi, \Phi + \varphi)$ silnik jest zasilany dwuprzewodowo i rozwiązanie równania (2.13) z warunkiem początkowym $[v(\Phi)]$ otrzymuje się w postaci

$$[v(\omega_1 t)] = e^{(\omega_1 t - \Phi)[B]} [v(\Phi)] \quad (4.1)$$

W następnym przedziale $(\Phi + \varphi, \Phi + \frac{\pi}{3})$ zasilanie jest trójprzewodowe i rozwiązanie w tym przedziale jest rozwiązaniem równania (2.11).

$$[v(\omega_1 t)] = e^{(\omega_1 t - \Phi - \varphi)[A]} [v(\Phi + \varphi)] \quad (4.2)$$

Korzystając z warunku ciągłości prądu można stwierdzić, że w przedziale czasowym $(\Phi, \Phi + \frac{\pi}{3})$ warunek końcowy zasilania 2-przewodowego jest warunkiem początkowym zasilania trójprzewodowego. Po podstawieniu otrzymuje się

$$[v(\omega_1 t)] = e^{(\omega_1 t - \Phi - \varphi)[A]} e^{\varphi[B]} [v(\Phi)] \quad (4.3)$$

Nieznany jest warunek początkowy $[v(\phi)]$. Można go obliczyć wyznaczając najpierw wartość funkcji (4.3) na końcu przedziału T_1 , czyli dla $\omega_1 t = (\phi + \frac{\pi}{3})$

$$[v(\phi + \frac{\pi}{3})] = e^{(\frac{\pi}{3} - \tau)[A]} \cdot e^{\tau[B]} [v(\phi)] \quad (4.4)$$

Z relacji (2.6) wynika ponadto, że

$$[v(\phi + \frac{\pi}{3})] = [T] [v(\phi)] \quad (4.5)$$

gdzie:

$$[T] = \begin{bmatrix} [s] & [0] & [0] \\ [0] & [s] & [0] \\ [0] & [0] & [s] \end{bmatrix}; \quad [s] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Z porównania (4.4) i (4.5) uzyskuje się:

$$\left\{ [T] - e^{(\frac{\pi}{3} - \tau)[A]} \cdot e^{\tau[B]} \right\} [v(\phi)] = [0] \quad (4.7)$$

Równanie (4.7) można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} [K_1] & [K_2] \\ [K_3] & [K_4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I(\phi)] \\ [U_2(\phi)] \end{bmatrix} = [0] \quad (4.8)$$

Można wykazać, że $[K_3]$, $[K_4]$ są macierzami zer.

W konsekwencji z (4.8) otrzymuje się

$$[I(\phi)] : -[K_1]^{-1}[K_2][U_2(\phi)] = [\gamma][U_2(\phi)] \quad (4.9)$$

Uwzględniając, że przy $\omega_1 t = \phi$ prąd $I_{1x} = 0$,

$$I_{1x}(\phi) = \gamma_{11} U_{1x}(z)(\phi) + \gamma_{12} U_{1y}(z)(\phi) = 0$$

$$\frac{U_{1x}(z)(\phi)}{U_{1y}(z)(\phi)} = -\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}} \quad (4.10)$$

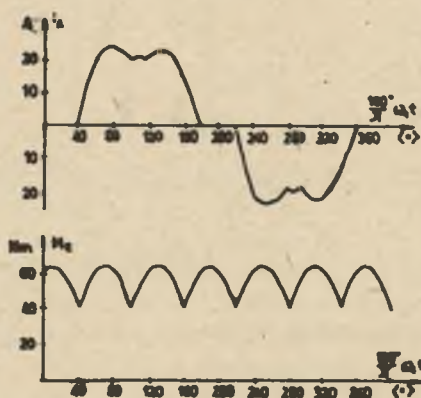
Przy zasilaniu symetrycznym i sinusoidalnym

$$U_{1x}^{(z)}(\vartheta) = \sqrt{\frac{3}{2}} U_K \sin \vartheta; \quad U_{1y}^{(z)}(\vartheta) = -\sqrt{\frac{3}{2}} U_K \cos \vartheta$$

stąd:

$$\vartheta = \arctg\left(\frac{Y_{12}}{Y_{11}}\right) \quad (4.11)$$

Kąt ϑ określa warunek początkowy $[V(\vartheta)]$. Z relacji (4.1) i (4.3) możemy obliczyć przebiegi prądów w całym przedziale $(\vartheta, \vartheta + \frac{2\pi}{3})$.



Rys. 8

Wyznaczono przebiegi prądów fazowych i momentu elektromagnetycznego dla silnika klatkowego o parametrach $P_N = 11$ kW; $U_{KN} = \sqrt{\frac{2}{3}} 380$ V; $I_{KN} = \sqrt{2} \cdot 23$ A; $n = 960$ obr/min. Wyniki przedstawiono na rys. 8 ($\vartheta = 40^\circ$).

LITERATURA

- [1] Katsuhiko Ogata: Metoda przestrzeni stanów w teorii sterowania. WNT, Warszawa 1974.
- [2] Lipo T.A.: The analysis of induction motors with voltage control by symmetrically triggered, thyristors. IEEE Transactions on apparatus and systems. March/April 1971.
- [3] Paszek W., Kudła J., Potapow W., Szoblik J.: Zastosowanie maszyn cyfrowych do obliczania charakterystyk silników indukcyjnych zasilanych z sieci przemysłowej poprzez komutator tyrystorowy. ZN Politechniki Śląskiej, Automatyka z. 32, Gliwice 1976.

Wpłynęło do redakcji 8 VI 1981 r.

Recenzent: prof. dr hab. inż. Kazimierz Biezyga

ПРИМЕНЕНИЕ РЕКУРРЕНТНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ
ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ

Р е з ю м е

Уравнения электромагнитного состояния индукционного двигателя с много-
клеточным ротором при постоянной скорости вращения являются линейными. Эти
уравнения можно представлять в виде автономных, решаемых рекуррентным мето-
дом с помощью электронной вычислительной техники. Представлен анализ пере-
ходных при включении двигателя в жесткую сеть и обсуждена возможность при-
менения метода к исследованиям пробегов для машины, питаемой от симметри-
ческого тиристорного коммутатора.

APPLICATION OF THE ITERATIVE METHOD FOR SOLUTION
OF STATE VARIABLE MATRIX EQUATIONS OF THE INDUCTION MACHINES

S u m m a r y

The electromagnetic state variable equation of the induction motor
with a multicage rotor at a constant rotational speed are linear equa-
tions, which can be presented in autonomous forms, solvable on computer
using iterative methods. The analysis of transients at switching on bus
supply is presented. The possibility of application of the computing me-
thod for investigation of the machine supplied though an symmetrical thy-
ristor commutator was discussed.