ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986
Seria: AUTOMATYKA z. 84 Nr kol. 894

Eugeniusz TOCZYŁOWSKI

Instytut Automatyki, Politechnika Warszawska

OPTYMALIZACJA PRODUKCJI PRZERYWANEJ W JEDNOSTOPNIOWYCH SYSTEMACH PRODUKCYJNYCH TYPU ZAMKNIĘTEGO Z RÓWNOLEGŁYMI LINIAMI PRODUKCYJNYMI

Streszczenie. Rozważany jest model harmonogramowania produkcji w gnieździe produkcyjnym złożonym z L równoległych i niejednorodnych linii produkcyjnych. Produkcja może być przerywana, a realizacja zamówień odbywa się z możliwością magazynowania. Za kryterium jakości przyjęto minimalizację łącznego kosztu produkcji i magazynowania, z uwzględnieniem kosztów wznawiania produkcji. W modelu występują ograniczenia zasobowe oraz ogólne ograniczenia na minimalne poziomy zapasów. W pracy przedstawiono strukturalne metody optymalizacji zastosowane do rozwiązywania powyższego problemu. Omówiono metody agregacji produktów i środków produkcji, relaksacje Lagrange'a, metody rozwiązywania podproblemów lokalnych oraz metody perturbacyjne znajdowania przybliżonego rozwiązania dopuszczalnego.

1. ZADANIE HARMONOGRAMOWANIA

System produkcji zawiera L równoległych środków produkcji na których mogą być produkowane wyroby o indeksach ze zbioru N. Środki produkcji są niejednorodne, t.z.n. na liniach mogą być wytwarzane dowolne podzbiory wyrobów z różnymi wydajnościami i kosztami. Produkcja tego samego wyrobu na różnych liniach może być mniej lub bardziej opłacalna. Do produkcji wykorzystywanych jest R ograniczonych zasobów odnawialnych, takich jak siła robocza i energia. Produkcja każdego wyrobu może być realizowana porcjami, w zależności od zapotrzebowania, dostępności środków produkcji, kosztów produkcji i magazynowania. Przyjmujemy, że wyroby można podzielić na n grup podobnych wyrobów o zbiorach indeksów $N_1, N_2, .., N_n$. Wyroby podobne mają zbliżone współczynniki kosztów produkcji i magazynowania oraz wymagają podobnych czynności przezbrajania linii. Przyjmujemy, że koszty i czasy przezbrajania pomiędzy wyrobami tej samej grupy są pomijalne, uwzględniane są jedynie główne przezbrojenia między wyrobami różnych grup. Opracowanie harmonogramu produkcji dla przedziału T okresów wymaga ustalenia terminów produkcji poszczególnych wyrobów, wielkości porcji oraz przydziału środków produkcji, aby zaspokoić zapotrzebowania na wyroby w każdym okresie oraz minimalizować koszty. Zadanie programowania matematycznego będące uproszczonym modelem powyższego problemu harmonogramowania jest postaci

$$\text{(1a)} \quad \min F = \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{n} \Big[\sum_{l=1}^{L} (s_{ilt} v_{il}(t) + q_{ilt} x_{il}(t)) + h_{it} \cdot I_i(t) \Big]$$

przy ograniczeniach

(1b) $J_j(t-1)+\sum_{l=1}^{L} z_{jl}(t)-J_j(t)=d_t^j$ $j\in N$; $t=1,..,T$;

(1c) $0\le z_{jl}(t)\le M_{ilt}\cdot v_{il}(t)$ $j\in N$; $t=1,..,T$;

(1d) $x_{il}(t)=\sum_{j\in N_i} z_{jl}(t)$ $i=1,..,n$; $l=1,..,L$; $t=1,..,T$;

(1e) $I_i(t)=\sum_{j\in N_i} J_j(t)$ $i=1,..,n$; $t=1,..,T$;

(1f) $\sum_{i=1}^{n}[e_{ilt}v_{il}(t)+p_{ilt}x_{il}(t)]\le Q_{lt}$ $l=1,..,L$; $t=1,..,T$;

(1g) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{L} a_{irl}x_{il}(t)\le B_{rt}$ $r=1,..,R$; $t=1,..,T$;

(1h) $v_{il}(t)=0,1$ $i=1,..,n$; $l=1,..,L$; $t=1,..,T$;

(1i) $J_j(t)\ge \underline{J}_{jt}$ $j\in N$; $t=1,..,T$.

gdzie zmiennymi decyzyjnymi są: $v_{il}(t)$ - zmienna binarna, określająca wznowienie produkcji i-tej grupy wyrobów na linii l w okresie t, $z_{jl}(t)$ - wielkość produkcji wyrobu j na linii l w okresie t, $J_j(t)$ - poziom zapasów j-tego wyrobu na koniec okresu t, analogicznie $x_{il}(t)$ oraz $I_i(t)$ oznaczają wielkości produkcji i zapasów dla i-tej grupy wyrobów. Parametrami zadania są: s_{ilt}, e_{ilt} - koszt i czas wznowienia produkcji i-tej grupy na linii l w okresie t, q_{ilt}, p_{ilt} - koszt i czas produkcji jednostki wyrobu z i-tej grupy na linii l w okresie t, h_{it} - koszt magazynowania jednostki wyrobu z i-tej grupy w okresie t, d_t^j - zapotrzebowanie na j-ty wyrób w okresie t (zaspokajane na koniec okresu t), Q_{lt} - maksymalny czas wykorzystania linii l w okresie t, a_{irt} - współczynnik zużycia zasobu r na jednostkę wyrobu i-tej grupy w okresie t, B_{rt} - wielkość zasobu r w okresie t, $\underline{J}_{jt}$ - minimalny, bezpieczny poziom zapasu wyrobu j na koniec okresu t, $J_j(o)$ - stan początkowy, M_{ilt} - maksymalna wielkość produkcji wyrobów grupy i na linii l w okresie t.

Zadanie (1) jest złożone, przykładowo dla problemu z $L=10$, $n=50$, $n_i=10$ oraz $T=20$ zawiera ono 231 000 zmiennych oraz 110 000 ograniczeń.

2. AGREGACJA PRODUKTÓW

Sumując ograniczenia (1b), (1c) oraz (1i) dla grup, można otrzymać zadanie zagregowane, w którym występują wyłącznie zagregowane zmienne grupowe (1d), (1e). Zadanie to jest w ogólności jedynie relaksacją problemu (1). W celu uzyskania zadania zagregowanego w pełni równoważnego niezbędna jest regularyzacja ograniczeń (1i). Można wykazać [8], że zastąpienie wartości $\underline{J}_{jt}$ przez $\tilde{J}_{jt}$, gdzie

$$(2) \qquad \tilde{J}_{jt} = \begin{cases} J_j(0) & t=0 \\ \max(\underline{J}_{jt}, \tilde{J}_{j,t-1}-d_t^j) & 1 \le t \le T \end{cases}$$

prowadzi do utworzenia modelu zagregowanego

(3a) minimalizuj (1a), przy ograniczeniach (1f), (1g), (1h), oraz

$$(3b) \qquad I_i(t-1)+x_i(t)-I_i(t)=d_{it}, \qquad i=1,..,n;\ t=1,..,T;$$

$$(3c) \qquad 0 \le x_{il}(t) \le M_{ilt} \cdot v_{il}(t) \qquad i=1,..,n;\ l=1,..,L;\ t=1,..,T;$$

$$(3d) \qquad x_i(t)=\sum_{l=1}^{L} x_{il}(t) \qquad i=1,..,n;\ t=1,..,T$$

$$(3e) \qquad I_i(t) \ge \tilde{I}_{it} = \sum_{j \in N_i} \tilde{J}_{jt} \qquad i=1,..,n;\ t=1,..,T$$

który jest w pełni równoważny zadaniu (1). Po rozwiązaniu zadania zagregowanego (3), rozwiązanie optymalne zadania (1) można zawsze otrzymać wyznaczając przepływy dopuszczalne w n sieciach odpowiadających ograniczeniom (1b), (1c), (1d) oraz (1i).

3. RELAKSACJE LAGRANGE'A

Rozwiązywanie zadania zagregowanego (3) za pomocą metody podziału i ograniczeń wymaga opracowania skutecznego algorytmu relaksacyjnego. Relaksacje Lagrange'a zadania (3) pozwalają zarówno na wyznaczenie stosunkowo silnych oszacowań od dołu jak i na wykorzystanie struktury problemu w tym dekompozycję i efektywne rozwiązywanie podproblemów. Rozważamy dwie zasadnicze relaksacje [7] otrzymane przez dualizację ograniczeń zasobowych (1f), (1g) albo ograniczeń (1g), (3d).

3.1. Dualizacja ograniczeń zasobowych

Niech $\psi=(\psi_{lt})$ oraz $\lambda=(\lambda_{rt})$ oznaczają mnożniki Lagrange'a ograniczeń (1f) oraz (1g). Wprowadzając ograniczenia (1f) i (1g) do funkcji Lagrange'a otrzymujemy relaksację

$$(4)\quad \max_{\psi\geq 0,\ \lambda\geq 0} \Big[L_D(\psi,\lambda)=\sum_{i=1}^{n} L_i(\psi,\lambda)-\sum_{t=1}^{T}\Big(\sum_{l=1}^{L}\psi_{lt}Q_{lt}+\sum_{r=1}^{R}\lambda_{rt}B_{rt}\Big)\Big]$$

gdzie funkcja L_i otrzymywana jest przez rozwiązanie i-tego podproblemu

$$(5a)\quad L_i(\psi,\lambda)=\min\sum_{t=1}^{T}\Big[\sum_{l=1}^{L}(\bar{s}_{ilt}v_{il}(t)+\bar{q}_{ilt}\cdot x_{il}(t))+h_{it}I_i(t)\Big]$$

przy ograniczeniach

$$(5b)\quad I_i(t-1)+\sum_{l=1}^{L}x_{il}(t)-I_i(t)=d_{it}, \qquad t=1,..,T$$

$$(5c)\quad v_{il}(t)=0,1,\quad 0\leq x_{il}(t)\leq M_{ilt}\cdot v_{il}(t), \qquad t=1,..,T;\ l=1,..,L;$$

$$(5d)\quad I_i(t)\geq \underset{\sim}{I}_{it}, \qquad t=1,..,T$$

gdzie $\bar{s}_{ilt}=s_{ilt}+\psi_{lt}e_{ilt},\ \bar{q}_{ilt}=q_{ilt}+\psi_{lt}p_{ilt}+\sum_{r=1}^{R}\lambda_{rt}a_{irt}$.

Metody rozwiązywania zadania (5) omówimy w rozdziale 5.

3.2. Dualizacja ograniczeń (1g), (3d)

Niech $\lambda=(\lambda_{rt})$ oraz $\mu=(\mu_{it})$ oznaczają mnożniki Lagrange'a ograniczeń (1g) oraz (3d). Wprowadzając te ograniczenia do funkcji Lagrange'a otrzymujemy relaksację

$$(6)\quad \max_{\lambda\geq 0,\mu}\Big[L_D(\mu,\lambda)=\sum_{l=1}^{L}\sum_{t=1}^{T}K_{lt}(\mu,\lambda)+\sum_{i=1}^{n}\tilde{L}_i(\mu,\lambda)-\sum_{r=1}^{R}\lambda_{rt}B_{rt}\Big]$$

gdzie $K_{lt}(\mu,\lambda)$ oraz $\tilde{L}_i(\mu,\lambda)$ otrzymywane jest przez rozwiązanie następujących podproblemów:

(i) zadania plecakowe ze stałą opłatą

$$(7a)\quad K_{lt}(\mu,\lambda)=\min\sum_{i=1}^{n}\Big[s_{ilt}v_{il}(t)+(q_{ilt}-\mu_{it}+\sum_{r=1}^{R}\lambda_{rt}a_{irl})x_{il}(t)\Big]$$

przy ograniczeniach

(7b) $\sum_{i=1}^{n}(e_{ilt}v_{il}(t)+p_{ilt}x_{il}(t))\le Q_{lt}$

(7c) $0\le x_{il}(t)\le M_{il}v_{il}(t)$, $v_{il}(t)=0,1$, $i=1,..,n$.

(ii) liniowe zadania przepływu w sieci

(8a) $L_i(\mu,\lambda)=\min\sum_{t=1}^{T}(\mu_{it}x_i(t)+h_iI_i(t))$

przy ograniczeniach

(8b) $I_i(t-1)+x_i(t)-I_i(t)=d_{it}$, $t=1,..,T$;

(8c) $0\le x_i(t)$, $I_i(t)\ge \underset{\sim}{I}_{it}$, $t=1,..,T$.

Rozwiązywanie zadania (8) jest proste, zadanie (7) może być rozwiązywane specjalizowanym algorytmem podziału i ograniczeń [10].

4. AGREGACJA ŚRODKÓW PRODUKCJI

Jeżeli pracochłonność rozwiązywania zadania (3) przy wykorzystaniu relaksacji omówionych w rozdziale 3 przekracza możliwości stosowanego komputera, agregacja środków produkcji polegająca na utworzeniu zagregowanego modelu ograniczeń (1f), (1g) przez wprowadzenie zmiennych zagregowanych (3d) pozwala na dalsze uproszczenie zadania w szczególnych przypadkach. Załóżmy, że czasy wznowienia e_{ilt} są pomijalne oraz linie produkcyjne są jednorodne, tzn. współczynniki p_{ilt} oraz a_{ilt} dla produktów produkowanych na dwóch liniach są wzajemnie proporcjonalne. Zagregowana, równoważna forma ograniczeń (1f) oraz (1g) przybierze postać

(9) $\sum_{i=1}^{N}p_{ri}\cdot x_i(t)\le B_{rt}$ $r=1,..,R,R+1,..,R+L'$

gdzie L' jest liczbą zagregowanych ograniczeń odpowiadających (1f) i zależnych od struktury tych ograniczeń. Z braku miejsca pominiemy tutaj zagadnienie generowania ograniczeń zagregowanych (9), por. [9]. Otrzymujemy model podwójnie zagregowany:

(10a) $\min F=\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}[s_{it}v_i(t)+h_{it}I_i(t)]$

przy ograniczeniach (3b), (3e), (9) oraz

(10b) $v_i(t)=0,1$, $0\le x_i(t)\le M_iv_i(t)$, $i=1,..,n$; $t=1,..,T$,

gdzie $v_i(t)$ oznacza produkcję i-tej grupy w okresie t, s_{it} jest kosztem wznowienia produkcji w okresie t, M_i-dostatecznie duże. Jeżeli $s_{it}=\min\{s_{ilt}: l=1,\dots,L\}$, to zadanie (10) jest relaksacją zadania (3).

Po dualizacji ograniczeń zasobowych (9) z mnożnikami Lagrange'a $\lambda=(\lambda_{rt})$ otrzymujemy relaksację

$$(11)\qquad \max_{\lambda\geq 0} L_D(\lambda)=\sum_{i=1}^{n} L_i(\lambda) - \sum_{t=1}^{T}\sum_{r=1}^{R+L'} \lambda_{rt}\cdot B_{rt}$$

gdzie

$$(12)\qquad L_i(\lambda)=\min\sum_{t=1}^{T}\Big[s_{it}v_i(t)+\Big(c_{it}+\sum_{r=1}^{R+L'}\lambda_{rt}\cdot p_{ri}\Big)x_i(t)+h_{it}I_i(t)\Big]$$

przy ograniczeniach (3b), (3e) oraz (10b) dla ustalonego i. Rozwiązywanie zadania (12) omówiono w rozdziale 5.

5. ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ LOKALNYCH

Zadania lokalne (5) oraz (12) są nieklasycznymi, ogólnymi sformułowaniami problemu harmonogramowania porcjami pojedynczego produktu. Zadanie (12) jest szczególnym przypadkiem zadania (5) i tylko wtedy gdy $\underset{\sim}{I}_{it}=0$ jest ono redukowalne do znanego modelu Wagnera-Whittina [11]. Zadanie (5) w ogólnym przypadku jest NP-trudne [1]. Jeżeli jednak założymy, że $K_{ilt}=M$ - dostatecznie duża liczba, to (5) staje się zadaniem rozwiązywalnym wielomianowo.

(A) <u>Przypadek wielomianowy</u>. W modelu Wagnera-Whittina rozwiązanie optymalne jest przepływem w sieci spełniającym warunki $I_i(t-1)\cdot x_i(t)=0$. Właściwość ta pozwalała na opracowanie skutecznego algorytmu najtańszej ścieżki. W modelu ogólnym (5) analogiczna właściwość nie zachodzi, tym niemniej można wykorzystać inne właściwości problemu do uzasadnienia analogicznego algorytmu.

<u>Definicja</u>. Niech $1\leq p\leq r\leq s\leq T$. Rozwiązanie zadania (5) spełniające trzy warunki: (i) $I_i(t)=\underset{\sim}{I}_{it}$, $t=1,\dots,p-1,s,s+1,\dots,T$; (ii) $I_i(t)\geq \underset{\sim}{I}_{it}$, $p\leq t<s$; oraz (iii) istnieje co najwyżej jeden etap r oraz jedna linia l taka, że $x_{il}(r)>0$, nazywane jest <u>przepływem elementarnym</u> między punktami p,s.

Twierdzenie 1 [9]. Istnieje rozwiązanie optymalne zadania (5) będące sumą rozłącznych przepływów elementarnych.

Twierdzenie 2 [9]. Dla $\underset{\sim}{I}_{it}$ obliczonego według (2), (3e) przepływ elementarny między punktami p,s spełnia następującą implikację: jeżeli $x_{il}(r)>0$ dla pewnego r, $p\leq r\leq s$, to $I_i(t)=\underset{\sim}{I}_{it}$, $t=p,\dots,s-1$.

W rezultacie rozwiązanie optymalne może być poszukiwane w postaci najtańszej ścieżki w acyklicznej sieci G, zawierającej T+1 wierzchołków oraz co najwyżej $\frac{1}{2}T(T+1)$ łuków dwóch rodzajów:

(i) łuki osobliwe postaci (t-1,t), jeżeli $\underset{\sim}{I}_{i,t-1}-d_{it}=\underset{\sim}{I}_{i,t}$, odpowiadają one okresom przestoju;

(ii) łuki nieosobliwe postaci (r,s), $0\leq r<s\leq T$, odpowiadają one jednej porcji $x_{il}(r+1)=d_{ir}+\dots+d_{is}+\underset{\sim}{I}_{i,s}-\underset{\sim}{I}_{i,r-1}>0$ produkowanej na pewnej linii l, minimalizującej koszty produkcji.

Otrzymane zadanie okazuje się nawet prostsze do rozwiązywania w przypadku niezerowych wartości $\underset{\sim}{I}_{it}$ w porównaniu do modelu W-W.

(B) Przypadek ogólny ograniczeń (5c). Stosunkowo efektywny algorytm można uzyskać łącząc programowanie dynamiczne z metodą podziału i ograniczeń. Załóżmy, że współczynniki M_{il} oraz d_{it} są całkowite. Oznaczmy: $X_i(t)=\sum_{s=1}^{t}x_i(s)$, $F_{it}(X_i)$ - koszt optymalnego harmonogramu w okresach 1,..,t przy warunku $X_i(t)=X_i$. Wartość $F_{it}(X_i)$ obliczamy rekurencyjnie, por. [1]

$$(13)\qquad F_{it}(X_i)=\min_{x_i(t)}\left\{F_{i,t-1}(X_i-x_i(t))+f_{it}(x_i(t))+h_{it}(X_i-\sum_{s=1}^{t}d_{it})\right\}$$

gdzie $f_{it}(x_i)$ jest optymalnym kosztem produkcji x_i w okresie t

$$(14a)\qquad f_{it}(x_i)=\min\sum_{l=1}^{L}(\bar{s}_{ilt}v_{il}(t)+\bar{q}_{ilt}x_{il}(t))$$

przy ograniczeniach (5c) oraz

$$(14b)\qquad \sum_{l=1}^{L}x_{il}(t)=x_i \qquad t=1,..,T.$$

Zadanie (14) będące problemem plecakowym ze stałą opłatą może być rozwiązywane efektywnym wariantem metody podziału i ograniczeń [10].

6. METODY PERTURBACYJNE

Zadania relaksacji Lagrange'a (4), (6) oraz (11) rozwiązywane są metodami subgradientowymi [2], [3], [6]. Proste metody subgradientowe [6] są na ogół dostatecznie efektywne, natomiast metody płaszczyzn odcinających [2] oraz zagregowanych subgradientów [3] umożliwiają znalezienie rozwiązania prymalnego spełniającego ograniczenia zrelaksowane [4]. Przy każdej metodzie subgradientowej, otrzymane rozwiązanie zadania zrelaksowanego na ogół nie spełnia pewnych ograniczeń zadania pierwotnego. Przybliżone rozwiązanie dopuszczalne może być poszukiwane w dalszej fazie za pomocą algorytmu perturbacyjnego. Poniżej opiszemy jego uproszczony ogólny schemat. Algorytm perturbacyjny startuje z rozwiązania zadania zrelaksowanego i wykonuje ciąg iteracji (odcięć), których zadaniem jest jak największe zmniejszenie pewnej miary niedopuszczalności aktualnego rozwiązania przy jak najmniejszej utracie wartości funkcji celu. Rozważmy ciąg zadań $\{P_k\}$, $k=0,1,..$ postaci

$$(15)\quad \min\{f(x):\ x\in X^k,\ g_i^k(x)\leq 0,\ i\in I^k\}\qquad k=0,1,..$$

gdzie X^k jest zbiorem dyskretnym (dyskretno-ciągłym) określonym przez ograniczenia spełniane przez generowane w kroku k rozwiązanie x^k, oraz $I^k=\{i:g_i^k(x^k)>0\}$. Dla k=0 ograniczenia zadania P_0 są równe ograniczeniom zadania pierwotnego, w dalszych krokach ograniczenia te są odpowiednio modyfikowane. W kroku k tworzony jest zbiór perturbacji $\alpha\in A_k$, którym odpowiadają zadania P_α, $\alpha\in A_k$, będące restrykcjami zadania P_k, postaci

$$(16)\quad \min\{f(x):\ x\in X^\alpha,\ g_i^\alpha(x)\leq 0,\ i\in I^\alpha\}$$

Niech x^α będzie rozw. pewnego zadania zrelaksowanego w stosunku do zad.P_α. Miarą spadku niedopuszczalności dla rozwiązania x^α, $\alpha\in A_k$, może być

$$(17)\quad \Delta^{(\alpha)}=\sum_{i\in I^k}\lambda_i^k g_i^k(x^k)-\sum_{i\in I^\alpha}\lambda_i^k g_i^\alpha(x^\alpha)$$

gdzie λ_i^k jest wagą i-tego ograniczenia (np. mnożnikiem Lagrange'a). Perturbacja α jest <u>właściwa</u>, jeżeli $\Delta^{(\alpha)}>0$. Miarą jakości perturbacji właściwej α może być iloraz

$$(18)\quad q^\alpha=\frac{f(x^k)-f(x^\alpha)}{\Delta^{(\alpha)}}$$

Podstawowy schemat algorytmu.

```
procedure perturbation search (P_k)
begin
if (P_k niedopuszczalny) then
    begin
    utwórz zbiór perturbacji {P_α} zadania P_k;
    niech P_{k+1} ∈ {P_α} będzie najlepsze w sensie maksimum wskaźnika
    (18);
    perturbation search (P_{k+1})
    end
end
```

Skuteczność metody perturbacyjnej zależy od doboru rodzaju perturbacji i miary (17). Do szczególnie korzystnych ewentualnych właściwości perturbacji zaliczymy niezmienniczość klasy zadań (15), możliwość równoległych perturbacji dla podproblemów oraz możliwość ograniczenia liczby interesujących perturbacji. Właściwości te występują w poniższych przykładach:

a) Relaksacja (11) z rozwiązaniami zadań (12) w postaci najtańszych ścieżek. Perturbacja polega na eliminacji łuku należącego do najtańszej ścieżki.
b) Relaksacja (4) z rozwiązaniami zadań (5) w postaci najtańszych ścieżek w multigrafie. Mamy tu dwa rodzaje perturbacji. Perturbacja lokalna prowadzi do eliminacji jednego z łuków równoległych między wierzchołkami r,s, któremu odpowiada porcja $x_{il}(r+1) > 0$ produkowana na linii l. Perturbacja globalna prowadzi do eliminacji wszystkich łuków równoległych.
c) Relaksacja (4) z rozwiązaniami zadań (5) za pomocą (13), (14). Perturbacja lokalna polega na przyjęciu $M_{ilt}=0$ dla $x_{il}(t) > 0$. Perturbacja globalna polega na obniżeniu dopuszczalnych wartości zmiennej $x_i(t)$.

Ograniczenie liczby interesujących perturbacji można uzyskać między innymi przez selekcję podproblemów mających dominujący wpływ na miarę niedopuszczalności.

7. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

Skuteczność algorytmu dwufazowego, tj. metody subgradientowej [6] i algorytmu perturbacyjnego badana była na modelach realnych problemów harmonogramowania produkcji środków piorących.
Model A. W problemie występują 4 linie produkcyjne, 6 ograniczeń zasobowych, 18 grup produktów. Pięcioetapowy model zagregowany (3) zadania harmonogramowania zawiera 1710 zmiennych, w tym 360 zmiennych binarnych, oraz 500 ograniczeń.
Model B. W problemie występuje 8 linii produkcyjnych, 3 ograniczenia zasobowe, 22 grupy produktów. Pięcioetapowy model zagregowany (3) zawiera 3080 zmiennych, w tym 440 zmiennych binarnych oraz 1045 ograniczeń.
Model C. Zadanie jak w modelu B, ale 10 etapów. W zadaniu jest 6160 zmiennych oraz 2090 ograniczeń.

Działanie algorytmu dwufazowego badano dla zagregowanego modelu (10). W fazie pierwszej algorytm subgradientowy rozwiązywał zadanie (11) przy niezbyt wygórowanych parametrach dokładnościowych (liczba iteracji ograniczona do 100, często nawet mniejsza). W fazie drugiej algorytm perturbacyjny wyszukiwał rozwiązanie dopuszczalne. Ze względu na jego korekcyjne właściwości okazało się, że generalnie opłacalne jest skrócenie fazy pierwszej, często nawet do liczby iteracji rzędu 10-20. Reprezentatywne wyniki dla dwóch serii zestawiono w tabeli 1. Obliczenia wykonywano na m.c. Prime 9950.

Dokładność ε w tabeli 1 podawana jest jako względna różnica między wartością funkcji celu dla rozwiązania dopuszczalnego a dolnym oszacowaniem wartości optymalnej otrzymanej przez algorytm subgradientowy w stosunku do dolnego oszacowania. Rzeczywista dokładność jest na ogół wyższa.

	faza I dokładna		faza I skrócona	
Model	CPU[s]	ε [%]	CPU[s]	ε [%]
A	13.95	0.7	3.76	1.0
	14.70	2.2	2.66	2.3
B	18.83	2.6	3.37	2.1
	21.36	3.7	3.26	1.1
C	82.16	0.4	35.10	1.1
	72.32	0.2	38.66	0.1

LITERATURA

[1] Florian M., Lenstra,K., Rinnoy Kan,H.G.; Deterministic Production Planning: Algorithms and Complexity. Mgmt. Sci., 26,669-679, 1980.

[2] Kelley J.E.; The Cutting Plane Method for Solving Convex Programs. J.SIAM. 8, 703-712, 1960.

[3] Kiwiel K.C.; Methods of Descent for Nondifferentiable Optimization. Lecture Notes in Mathematics, 1133, Springer, Berlin 1985.

[4] Kiwiel K., Toczyłowski,E.; Subgradienty zagregowane w relaksacjach Lagrange'a zadań optymalizacji dyskretnej, materiały tej Konferencji.

[5] Newson E.F.P.; Multi-Item Lot Size Scheduling by Heuristic, Part I., Mgmt. Sci. 21, 1186-1193, 1975.

[6] Shor N.Z.; Minimization Methods for Nondifferentiable Functions. Springer, Berlin 1985.

[7] Toczyłowski E.; Lagrangean relaxation algorithms for simultaneous lot scheduling and allocation in single stage multifacility batch production systems. 12th Symposium Math. Programming, Boston sierpień 1985.

[8] Toczyłowski E.; On Aggregation of Items in the Single Stage Lot Size Scheduling Problem, Large Scale Systems: Theory and Applications, 1986 (przyjęte do druku).

[9] Toczyłowski E.; Metody strukturalne w optymalizacji dyskretnej, w przygotowaniu.

[10] Toczyłowski E., Berka S.; Algorytm dla zadania plecaka ze stałą opłatą, w przygotowaniu.

[11] Wagner H.M. and Whittin T.M.; Dynamic Version of the Economic Lot Size Model, Mgmt. Sci. 5, 89-96, 1958.

Recenzent: Dr hab.inż.Mirosław Zaborowski
Wpłynęło do Redakcji do 1986.04.30

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРЕРЫВНОГО ПРОИЗВОДСТВА В ОДНОСТУПЕНЧАТЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМАХ ЗАКРЫТОГО ТИПА С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ ЛИНИЯМИ

Р е з ю м е

В работе рассматривается модель календарного планирования производством в производственном гнезде ,состоящим из Л параллельных и неоднородных производственных линий . Производство может быть прерывное , а реализация заказов учитывает возможность складирования. В качестве критерия качества принята минимизация суммарной стоимости производства и складирования с учётом стоимости возобновления производства . В модели имеются ресурсные ограничения а также общие ограничения для минимальных уровней запасов.

В работе представлены структурные методы оптимизации , применяемые для решения поставленной задачи . Оговорены методы агрегации продуктов и средств производства, лагранжевские релаксации, методы решения локальных подпроблем а также пертурбационные методы нахождения приближенного допустимого решения.

OPITIMIZATION OF THE LOT SIZE SCHEDULING PROBLEM IN THE SINGLE STAGE BATCH PRODUCTION SYSTEMS WITH PARALLEL LINES

S u m m a r y

We consider a production scheduling model of the single -stage batch production system with parallel ,non- uniform production units,where the production is carried on in lots.The demand the current period may be satisfied either from inventory or from production in this period.The goal is to minimize the production and set-up costa and inventory holding costs over the whole horizon.In the optimisation model we include resource constraints and the general form of safety stock constraints.A variety of structural optimisation techniques applied to this problem is presented.

In section 2 we show to aggregate the items into families which share common set-up cost in such a way that the aggregated model is always equivalent to the detailed model. In section 3 we describe two basic Lagrangean relaxation of the aggregated model presented in [7].First approach is based on relaxation of the capacity and resource constraints.The relaxed problem is decomposed into separate single -item maltifacility subproblems..Several methods for solving these subproblems are presented in section 5.Second relaxetion results in decomposition of the relaxed problem into knap-sack subproblems with set-up times and cost which correspond to production units. In section 4 the aggregated model is discussed in which the constraints

corresponding to production units are aggregated.The feasible ,near-optimal solution may be computed ,when starting from the solution of the relaxed problem ,by a perturbation algorithm which is described in section 6.
The resulted two-phase , relaxation-perturbation algorithms appear to be sufficiently efficient and accurate for a family of scheduling problems.