

Zdzisław Sulimowski

## PRZEGLĄD NIEKTÓRYCH FUNKCJI OPISUJĄCYCH ZAGADNIENIE ZAKOTWIENIA PRZYCZEPNOŚCIOWEGO CIĘGNA SPRĘŻAJĄCEGO

Streszczenie. W pracy przedstawiono ogólne rozwiązanie zagadnienia zakotwienia struny sprężającej w betonie na zasadzie przyczepności i podano kilka funkcji spełniających zagadnienie. Przedyskutowano zakres zastosowań tych funkcji i podano sposoby określania parametrów w oparciu o dane doświadczalne.

### 1. Wprowadzenie

Badania doświadczalne są podstawowym sposobem określania parametrów zakotwienia przyczepnościowego cięgna sprężającego w betonie. Wielkościami mierzonymi są najczęściej: odkształcenia betonu (na podstawie których można wnioskować o naprężeniach rozciągających w cięgnach), siła w cięgnach (mierzona bezpośrednio), poślizg czołowy cięgna, użytkowa i graniczna długość zakotwienia cięgna.

Z poznawczego punktu widzenia najbardziej istotne są dane dotyczące wielkości naprężeń rozciągających w cięgnie na długości jego zakotwienia.

W celu określenia parametrów zakotwienia przyczepnościowego, otrzymany na drodze eksperymentalnej zbiór wartości naprężeń, przyporządkowany określonym współrzędnym, staramy się przedstawić za pomocą wzoru empirycznego, posługując się wybranym typem funkcji. Funkcja taka musi spełniać warunki brzegowe zagadnienia, pozwolić wyrazić związki pomiędzy naprężeniami a odkształceniami i przemieszczeniami cięgna oraz dostatecznie dokładnie opisywać zbiór danych doświadczalnych.

Warunki brzegowe są następujące:

- $1^{\circ}$  W przekroju czołowym, po zwolnieniu naciągu  $\sigma_{a0}$ , cięgno wraca do swej pierwotnej średnicy  $2r$ , naprężenia normalne w cięgnie  $\sigma_{ax}$  i styczne  $\tau_x$  na jego powierzchni równają się zero.
- $2^{\circ}$  Przy opisie zagadnienia za pomocą funkcji posiadających poziomą asymptotę w nieskończoności, zakłada się, że naprężenia rozciągające w cięgnie stabilizują się do wartości  $\sigma_{a1}$  uwarunkowanej skrótem doraźnym betonu w odległości od czoła elementu równej nieskończoności (tam też naprężenia styczne zanikają). Dodatkowy warunek stanowi, że w skończonej odległości od czoła elementu naprężenia rozciągające w cięgnie

różnić się będą od wartości ustabilizowanej dowolnie mało. Odległość ta nazywana jest umowną użytkową długością zakotwienia ciągną  $l_u$ .

3° Zgodnie z rzeczywistym przebiegiem zjawiska, zamiast warunków 2°, przyjmuje się, że na użytkowej długości zakotwienia  $l_u$  następuje pełne przekazanie siły z ciągną na beton, a poza tym obszarem naprężenia w ciągnie osiagają wartość stałą, uwarunkowaną skrótem doraźnym betonu. Do opisu tak postawionego zagadnienia, w obszarze strefy zakotwienia, nadają się funkcje posiadające dwie styczne poziome, przy czym punkty styczności znajdują się w skończonej odległości a pomiędzy nimi jest jeden punkt przegięcia. Poza tym - jak wskazują dane doświadczalne - w pobliżu styczności przekroju czołowego krzywizna powinna być większa niż w pobliżu styczności przy końcu strefy zakotwienia.

W każdym przypadku, w rozważanym obszarze funkcje powinny być ciągłe i różniczkowalne.

Rozwiązanie czyniące zadość warunkom 1° i 2° przedstawiono w pracy [1] przyjmując do opisu funkcję wykładniczą o ujemnym kwadratowym wykładniku potęgowym. Jest to jednak tylko jedna z wielu teoretycznie możliwych do przyjęcia funkcji spełniających założone warunki.

W niniejszej pracy przedstawiono rozwiązanie dotyczące zakotwienia ciągną w postaci ogólnej i przedyskutowano kilka funkcji spełniających to rozwiązanie. Przedyskutowano również ogólne rozwiązanie zagadnienia dla warunków brzegowych 1° i 3° oraz zaproponowano do opisu funkcję w postaci wielomianu 5 stopnia.

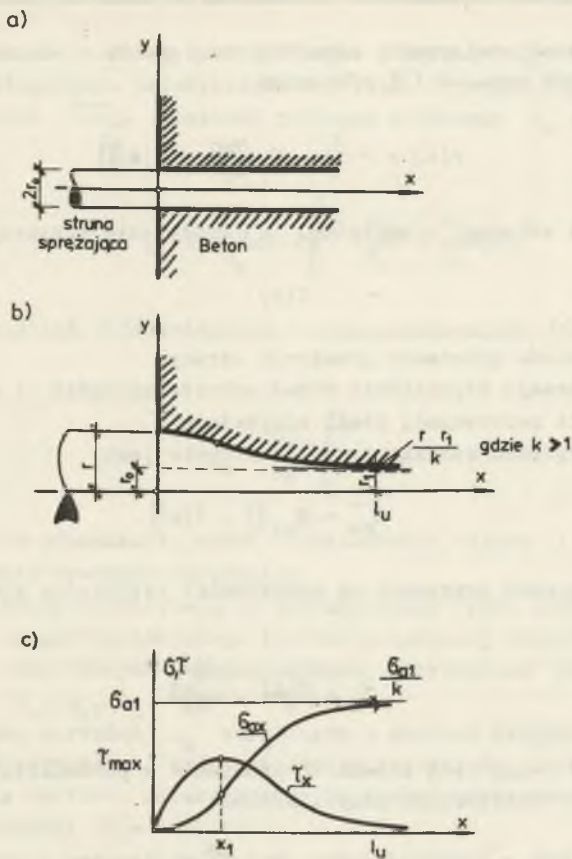
Sposób postępowania przy opracowaniu konkretnego zbioru danych doświadczalnych może być następujący:

- wstępna ocena przydatności określonego typu funkcji za pomocą metody wyrównania [2], [3],
- dobór parametrów szczegółowych za pomocą metody najmniejszych kwadratów [2], [3], [4] (dokładniejsza) lub metody przeciętnych [2], [3] (mniej dokładna ale i mniej pracochłonna),
- obliczenie wariancji oszacowania [5], [4] jako miary dopasowania funkcji.

## 2. Rozwiązanie za pomocą funkcji posiadających asymptotę

### 2.1. Rozwiązanie ogólne

Wychodząc z postaci odkształconej ciągną przyjętego jako struna o przekroju kołowym, przy układzie współrzędnych i oznaczeniach jak na rys. 1, warunki brzegowe 1° i 2° można zapisać następująco:



Rys. 1

a) Struna napięta przed zwolnieniem naciągu. Po sprężeniu: o) Odształcenie poprzeczne, c) rozkład naprężeń w strefie zakotwienia.

$\sigma_{ax}$  - naprężenie rozciągające w strunie,  $\tau_x$  - naprężenie styczne na powierzchni struny

$$\text{dla } x = 0 \quad y = r, \quad \text{czyli} \quad \sigma_{ax} = 0 \quad (2.1)$$

$$y' = 0 \quad \tau_x = 0 \quad (2.2)$$

$$\text{dla } x = \infty \quad y = r_1, \quad \text{czyli} \quad \sigma_{ax} = \sigma_{a1} \quad (2.3)$$

$$y' = 0 \quad \tau_x = 0 \quad (2.4)$$

$$\text{dla } x = l_u \quad y = r_1 + \frac{r - r_1}{k}, \quad \text{czyli} \quad \sigma_{ax} = \sigma_{a1} - \frac{\sigma_{a1}}{k} \quad (2.5)$$

gdzie  $k \gg 1$ .

Ogólną postać powierzchni odkształconej struny w obszarze strefy zakotwienia można wyrazić [1] równaniem

$$r(x) = r \left\{ 1 - \sigma_a \frac{\nu_a}{E_a} [1 - f(x)] \right\} \quad (2.6)$$

gdzie funkcja zmiennej niezależnej  $x$  (położenie przekroju)

$$f(x) \quad (2.7)$$

opisuje zmienność promienia przekroju struny.

$E_a$ ,  $\nu_a$  oznaczają odpowiednio moduł odkształcalności i współczynnik odkształcalności poprzecznej stali sprężającej.

Rozkład naprężeń rozciągających w strunie jest

$$\sigma_{ax} = \sigma_{a1} [1 - f(x)] \quad (2.8)$$

a rozkład naprężeń stycznych na powierzchni zetknięcia się struny z betonem

$$\tau_x = \frac{r(x)}{2} \cdot \frac{d\sigma_{ax}}{dx} \quad (2.9)$$

Biorąc pod uwagę małą zmienność promienia w porównaniu z  $\frac{d\sigma_{ax}}{dx}$  możemy zapisać, że z dostatecznym przybliżeniem

$$\tau_x = \frac{r}{2} \cdot \frac{d\sigma_{ax}}{dx} \quad (2.10)$$

a zatem

$$\tau_x = -\frac{r\sigma_{a1}}{2} f'(x) \quad (2.11)$$

Położenie maksymalnej wartości  $\tau_x$  znajdziemy z warunku

$$\frac{d\tau_x}{dx} = 0 \quad (2.12)$$

równoznacznego z

$$f''(x) = 0 \quad (2.13)$$

i oznaczymy jako  $x_1$ . Będzie to równocześnie punkt przegięcia funkcji oznaczonych wzorami (2.6, 8).

Przyjmując, że poślizg czołowy cięgna propaguje się od czoła elementu do punktu osiągnięcia największych naprężeń stycznych [1], a zatem występuje na odcinku  $\overline{0, x_1}$ , wielkość poślizgu czołowego  $\varepsilon_0$  można obliczyć ze związku

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_{a0} x_1}{E_a} - \int_0^{x_1} \left( \frac{\sigma_{ax}}{E_a} - \frac{\sigma_{bx}}{E_b} \right) dx \quad (2.14)$$

co po odpowiednich podstawieniach i przekształceniach [1] prowadzi do wzoru

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_{a0}}{E_a} \int_0^{x_1} f(x) dx \quad (2.15)$$

$E_b$ ,  $\sigma_{bx}$  są to odpowiednio moduł odkształcenia betonu i naprężenie normalne w betonie wywołane sprężeniem.

Powyższe wzory wystarczają do teoretycznego opisu zakotwienia przyczepnościowego cięgna sprężającego (oprócz granicznej długości zakotwienia) w oparciu o zbiór danych doświadczalnych, dotyczących jednej z wartości:  $r(x)$ ,  $\sigma_{ax}$ ,  $\tau_x$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $l_u$ .

W przypadku wartości  $l_u$  uzyskanych z pomiaru bezpośredniego musimy znać również wartość  $k$ , która zależy tu od czułości urządzeń pomiarowych: np. dla wartości zmierzonych z 5% dokładnością przyjmujemy  $k = 20$ , dla 1% dokładności  $k = 100$  itd.

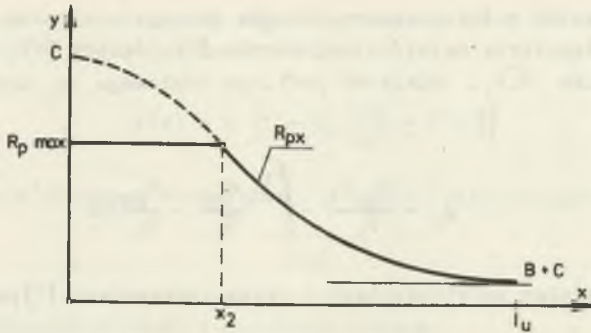
Do obliczenia parametrów funkcji wykorzystujemy w tym przypadku warunki (2.5). Jeżeli natomiast dobieramy funkcję za pomocą zbioru innych wartości niż  $l_u$ , to do wyznaczenia umownej wartości użytkowej długości zakotwienia musimy przyjąć wartość  $k$  w zasadzie arbitralnie, gdyż charakteryzuje ona wtedy teoretyczną dokładność rozwiązania.

## 2.2. Rozwiązanie za pomocą innych parametrów

Przy braku danych doświadczalnych, dotyczących bezpośrednio zakotwienia przyczepnościowego cięgna, w pracy [1] podane zostało rozwiązanie umożliwiające wyznaczenie parametrów zakotwienia w oparciu o zjawisko oporu przeciw poślizgowi  $R_p$ , którego przebieg w ogólności pokazany jest na rys. 2 i opisany wzorami ważnymi w odpowiednich przedziałach:

$$R_{pmax} = \tau_n + fR_{ds} \quad \text{dla } 0 \leq x \leq x_2 \quad (2.16)$$

$$R_{px} = \tau_n + \frac{f}{\varphi} \left\{ \sigma_{ds} + \frac{\sigma_{a0}}{n(1+\nu_b)} \left[ \nu_a - \frac{\nu_a + n \mu \nu_b (1 + \frac{\nu^2}{2})}{1 + n \mu (1 + \frac{\nu^2}{2})} (1 - f(x)) \right] \right\} \quad \text{dla } x_2 \leq x \leq \infty \quad (2.17)$$



Rys. 2. Wykres oporu przeciw poślizgowi  $R_{px}$

We wzorze (2.17) uwzględnioną możliwość nieosiowego sprężenia elementu doświadczalnego i opisano zjawisko pełzania betonu za pomocą współczynnika  $\varphi$ .

Pozostałe symbole oznaczają:

- $\tau_n$  - opór przyczepności naturalnej,
- $R_{ds}$  - wytrzymałość betonu na docisk radialny struny,
- $\nu_b$  - współczynnik odkształcalności poprzecznej betonu,
- $\sigma_{ds}$  - naprężenia docisku pomiędzy betonem i struną, wywołane skurczem betonu,
- $i$  - promień bezwładności przekroju poprzecznego elementu betonowego,
- $v$  - odległość rozpatrywanego włókna od środka ciężkości przekroju betonu,

$$n = \frac{E_a}{E_b}$$

$\mu = \frac{\sum A_i a_i}{A_b}$  - stosunek sumy powierzchni przekrojów strun do powierzchni przekroju betonu,

$f$  - współczynnik tarcia pomiędzy armaturą a betonem.

Po oznaczeniach

$$B = -\frac{f}{\varphi} \cdot \frac{\sigma_{so}}{n(1 + \nu_b)} \cdot \frac{\nu_a + n\mu\nu_b(1 + \frac{v^2}{2})}{1 + n\mu(1 + \frac{v^2}{2})} \quad (2.18)$$

$$C = \tau_n + \frac{f}{\varphi} \left[ \sigma_{ds} + \frac{\sigma_{so} \nu_a}{n(1 + \nu_b)} \right] \quad (2.19)$$

możemy zapisać ogólnie

$$R_{px} = B[1 - f(x)] + C \quad (2.20)$$

Z analizy kinetyki zjawiska [1] wynika, że musi zachodzić

$$R_{px} \geq \tau_x \quad (2.21)$$

oraz co najmniej jeden zespół warunków styczności (w punkcie o rzędnej  $x_3$ ):  
albo w przedziale  $0 \leq x_3 \leq x_2$

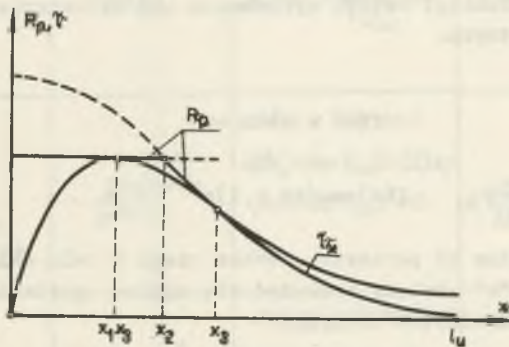
$$R_{pmax} = \tau_{max} \quad (2.22)$$

oraz (2.12), wtedy  $x_3 = x_1$

albo w przedziale  $x_2 \leq x_3 \leq l_u$

$$R_p(x_3) = \tau(x_3) \quad (2.23)$$

$$\frac{dR_p(x_3)}{dx} = \frac{d\tau(x_3)}{dx} \quad (2.24)$$



Rys. 3. Rozkład naprężeń stycznych na długości zakotwienia

Jest przy tym bardzo prawdopodobne, że warunki (2.22) i (2.12) oraz (2.23) i (2.24) zachodzą łącznie (rys. 3). Jednak dla funkcji jednoparametrowej wystarczy rozwiązanie warunków z jednego tylko przedziału. Najczęściej jest to przedział  $x_2 \leq x_3 \leq l_u$ , gdyż nie jest wtedy konieczna znajomość wartości wytrzymałości betonu na docisk pogrążonego w nim cięgna.

### 2.3. Uwagi o zastosowaniach funkcji

W tabelicy 1 zestawiono cztery typy funkcji, które spełniają zadane warunki brzegowe: są to dwie funkcje wykładnicze, funkcja hiperboliczna i

funkcja wymierna ułamkowa. Wszystkie te funkcje są jednoparametrowe, co znacznie ułatwia obliczenia.

Spośród omawianych funkcji wykładniczych i hiperbolicznych tylko funkcja

$$f(x) = e^{-a^2 x^2} \quad (2.25)$$

daje się przedstawić w postaci liniowo zależnej od współczynnika  $a^2$

$$a^2 x^2 = \ln \frac{1}{f(x)} \quad (2.26)$$

co umożliwia łatwe wyznaczenie  $a^2$  za pomocą metody najmniejszych kwadratów a dzięki podstawieniu

$$X = x_i^2 \quad (2.27)$$

$$Y = \ln \frac{1}{f_i} \quad (2.28)$$

ocenę przydatności funkcji metodą wyrównania lub obliczenie parametru stałego metodą przeciętnych.

Funkcje

$$f(x) = \operatorname{sech}(ax) \quad (2.29)$$

$$f(x) = (ax + 1)e^{-ax} \quad (2.30)$$

nie są liniowo zależne od parametru, wobec czego w celu obliczenia wartości współczynnika "a" należy posłużyć się ogólną postacią warunku na minimalizację sumy kwadratów odchyleń

$$\frac{d}{da} \sum_{i=1}^n [f_i - f(x_i, a)]^2 = 0, \quad (2.31)$$

gdzie  $f_i$  jest wartością pomierzoną w toku badań dla określonego  $x_i$ , zaś  $n$  jest liczbą obserwacji.

Parametr stały we wszystkich funkcjach zawartych w tabelicy 1 można łatwo obliczyć za pomocą wzoru (2.15), mając wyznaczone z pomiarów wartości poślizgu czokołowego  $g_0$ . Wartości całek liniowo zależne od "a", podane są w tabelicy 1 - kolumna 7.

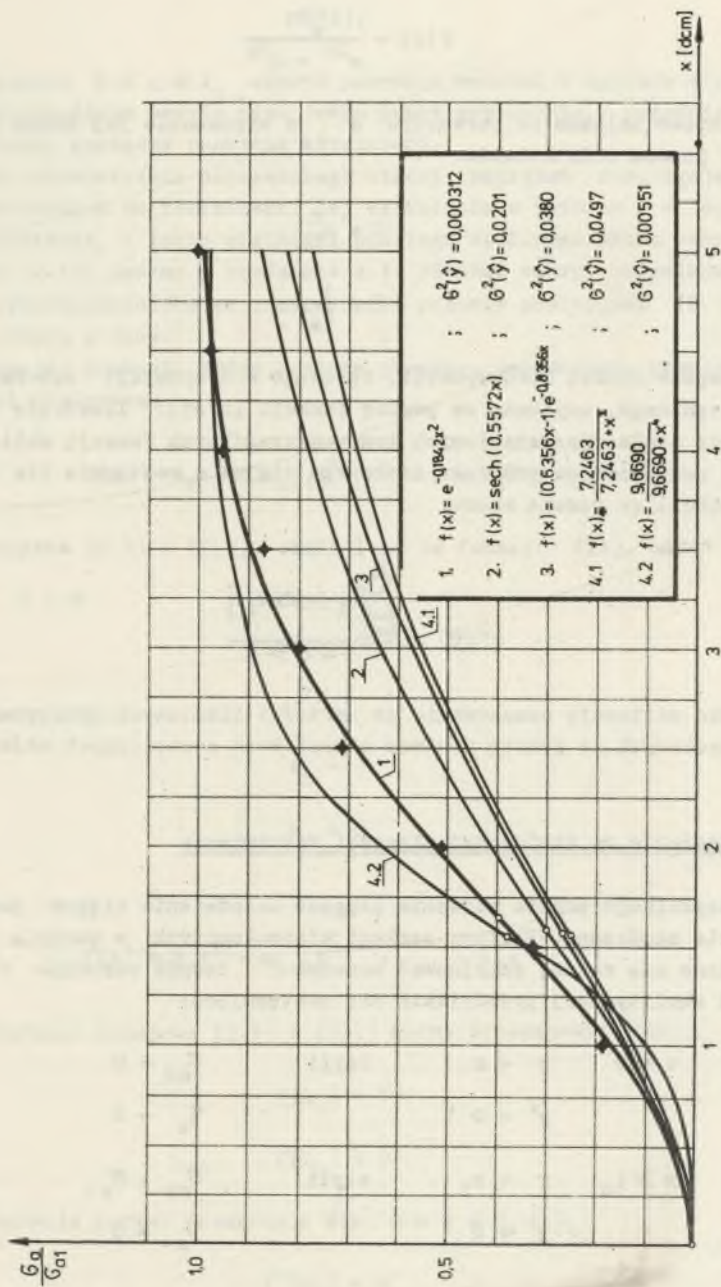


L.p	f(x)	f'(x)	f''(x)	x <sub>1</sub>	a parametr staty z wzoru (2.5)	$\int_0^x f(x) dx$	z wzorów (2.23) i (2.24)	
							x <sub>3</sub>	a
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	$e^{-a^2x^2}$	$-2a^2xe^{-a^2x^2}$	$(2a^2x^2 - 1)2a^2e^{-a^2x^2}$	$x_1 = \frac{1}{a\sqrt{2}} = \frac{0,7071}{a}$	$a = \frac{\sqrt{\ln k}}{l_u}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2a} \operatorname{erf}(ax_1) = \frac{0,6050}{a}$	obliczyć z równania $e^{\frac{Bx_3}{r\delta_{a1}}} = \frac{2\sqrt{e}x_3(B+C)}{r\delta_{a1}}$	$a^2 = \frac{1}{2x_3} - \frac{B}{r\delta_{a1}}$
2.	$\operatorname{sech}(ax)$ $\frac{2}{e^{ax} + e^{-ax}}$	$-a \operatorname{sech}(ax) \operatorname{th}(ax)$ $-2a \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{(e^{ax} + e^{-ax})^2}$	$a^2 \operatorname{sech}(ax) [2 \operatorname{th}^2(ax) - 1]$ $2a^2 \frac{(e^{ax} - e^{-ax})^2 - 4}{(e^{ax} + e^{-ax})^3}$	$x_1 = \frac{0,8814}{a}$	obliczyć z równania $\operatorname{ch}(al_u) = k$ k=20 al <sub>u</sub> 3,688 k=100 al <sub>u</sub> 5,298 k=1000 al <sub>u</sub> 7,601	$\frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{sh} ax_1) = \frac{\pi}{4a} = \frac{0,7854}{a}$	z równania $\operatorname{ch}^2(ax_3)[B+C] - 2\operatorname{ch}(ax_3)[B+C] \cdot B = 0$ obliczyć $\operatorname{ch}(ax_3)$ znaleźć $\operatorname{th}(ax_3)$	$a = \frac{2B \operatorname{th}(ax_3)}{r\delta_{a1}[1 - 2\operatorname{th}^2(ax_3)]}$
3.	$(ax+1)e^{-ax}$ dla a > 0	$-a^2xe^{-ax}$	$(ax-1)a^2e^{-ax}$	$x_1 = \frac{1}{a}$	obliczyć z równania $e^{a l_u} k(1 + al_u)$ k=20 al <sub>u</sub> 4,744 k=100 al <sub>u</sub> 6,638 k=1000 al <sub>u</sub> 9,234	$\frac{2}{a} - e^{-ax}(x_1 + \frac{2}{a}) = \frac{0,8960}{a}$	obliczyć z równania $e^{\frac{2Bx_3}{r\delta_{a1}}} = \frac{2ex_3(B+C)}{r\delta_{a1}}$	$a = \frac{1}{x_3} - \frac{2B}{r\delta_{a1}}$
4.	$\frac{a^{2n}}{a^{2n} + x^{2n}}$ gdzie a=0 n=1,2,3...	$-\frac{2na^{2n}x^{2n-1}}{(a^{2n} + x^{2n})^2}$	$\frac{2na^{2n}x^{2n-2}[(2n+1)x^{4n} + 2a^{2n}x^{2n} - (2n-1)a^{4n}]}{(a^{2n} + x^{2n})^4}$	$x_1 = \pm a \sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}$	$a = \frac{l_u}{2\sqrt{k-1}}$	dla n=3,4... wg wzoru: (2,36)	oblicz z równania $4Bx_3^2 + 8nr\delta_{a1}(B-2C)x_3 + (4n^2-1)(r\delta_{a1})^2 = 0$	$a^{2n} = \frac{(2n+1)r\delta_{a1} + 2Bx_3}{(2n-1)r\delta_{a1} - 2Bx_3} x_3^{2n}$
4.1.	$\frac{a^2}{a^2 + x^2}$	$-\frac{2a^2x}{(a^2 + x^2)^2}$	$\frac{2a^2[3x^4 + 2a^2x^2 - a^4]}{(a^2 + x^2)^4}$	$x_1 = \frac{a}{\sqrt{3}} = 0,5773a$	$a = \frac{l_u}{\sqrt{k-1}}$	$a \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\frac{x_1}{a}) = \frac{a\pi}{6} = 0,5236a$	obliczyć z równania $4Bx_3^2 + 8r\delta_{a1}(B-2C)x_3 + 3(r\delta_{a1})^2 = 0$	$a^2 = \frac{3r\delta_{a1} + 2Bx_3}{r\delta_{a1} - 2Bx_3} x_3^2$
4.2.	$\frac{a^4}{a^4 + x^4}$	$-\frac{4a^4x^3}{(a^4 + x^4)^2}$	$\frac{4a^4x^2[5x^8 + 2a^4x^4 - 3a^8]}{(a^4 + x^4)^4}$	$x_1 = a \sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{5}} = a \cdot 0,8802$	$a = \frac{l_u}{\sqrt{k-1}}$	$\frac{a}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x_1^2 + ax\sqrt{2} + a^2}{x_1^2 - ax\sqrt{2} + a^2} + \frac{a}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{ax\sqrt{2}}{a^2 - x^2} = 0,7993a$	obliczyć z równania $4Bx_3^2 + 16r\delta_{a1}(B-2C)x_3 + 15(r\delta_{a1})^2 = 0$	$a^4 = x_3^4 \frac{5r\delta_{a1} + 2Bx_3}{3r\delta_{a1} - 2Bx_3}$

(2,36)

$$\int_0^x \frac{a^{2n}}{a^{2n} + x^{2n}} dx = \left\{ -\frac{a}{2n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \ln \left[ \left( \frac{x}{a} \right)^2 - 2 \left( \frac{x}{a} \right) \cos \alpha + 1 \right] \cos \alpha + \frac{a}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{\left( \frac{x}{a} \right) \sin \alpha}{1 - \left( \frac{x}{a} \right) \cos \alpha} \right] \sin \alpha \right\} \Big|_0^x$$

gdzie  $\alpha = \frac{2\nu+1}{2n} \pi$



Rys. 4. Dobór funkcji asymptotycznych do danych doświadczalnych

Funkcja

$$f(x) = \frac{a^{2n}}{a^{2n} + x^{2n}} \quad (2.32)$$

jest liniowo zależna od parametru  $a^{2n}$  a wyrównanie jej można przeprowadzić za pomocą podstawienia

$$X = x_1^{2n} \quad (2.33)$$

$$Y = \frac{1}{f_1} \quad (2.34)$$

Najlepsze wyniki aproksymacji, będącego w dyspozycji autora materiału doświadczalnego, uzyskano za pomocą funkcji (2.25). Ilustruje to rys. 4; parametry stałe przedstawionych tam poszczególnych funkcji obliczono jako funkcje pomierzonego poślizgu czołowego cięgna a następnie dla tak dobranych funkcji za pomocą wzoru

$$\sigma^2(\hat{y}) = \frac{\sum_{i=1}^n [f_i - f(x_i)]^2}{n - m} \quad (2.35)$$

obliczono wariancję oszacowania do wartości liczbowych naprężeń w ciągnięciu, uzyskanych za pomocą pomiaru odkształceń zewnętrznych włókien betonu.

### 3. Rozwiązanie na skończonej długości zakotwienia

Z fizykalnego punktu widzenia długość zakotwienia cięgna powinna być wartością skończoną. Dlatego zamiast sformułowanych w punkcie 1 warunków 2<sup>o</sup> powinno się raczej przyjmować warunki 3<sup>o</sup>. Zespół warunków 1<sup>o</sup> i 3<sup>o</sup> w postaci analitycznej przedstawia się następująco:

$$\text{dla } x \leq 0 \quad y = r \quad \text{czyli} \quad \sigma_{ax} = 0$$

$$y' = 0 \quad \tau_x = 0$$

$$\text{dla } x \geq l_u \quad y = r_1 \quad \text{czyli} \quad \sigma_{ax} = \sigma_{a1} \quad (3.1)$$

$$y' = 0 \quad \tau_x = 0 \quad (3.2)$$

A zatem poszukiwać będziemy funkcji

$$f(x), \quad (3.3)$$

która w obszarze  $0 < x < l_u$  spełni powyższe warunki i zgodnie z rozpoznaniem doświadczalnym będzie mieć jeden punkt przegięcia, położony w zasadzie dowolnie pomiędzy punktami styczności.

Do opisu odkształcenia poprzecznego struny, naprężeń rozciągających w strunie i stycznych na powierzchni jej zetknięcia z betonem w obszarze strefy zakotwienia, a także wielkości poślizgu czołowego służyć wzory ogólne (2.7) do (2.15) podane w rozdziale 2.1. Również wzory określające zakotwienie przyczepnościowe za pomocą oporu przeciw poślizgowi (2.16) do (2.24) pozostają w mocy.

Ogólną postać funkcji, która spełnia powyższe zagadnienie przyjmując można w postaci wielomianu

$$f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (3.4)$$

Warunki brzegowe (2.1) i (2.2), odniesione do funkcji  $f(x)$ , można zapisać

$$\text{dla } x = 0 \quad f(x) = 1 \quad (3.5)$$

$$f'(x) = 0, \quad (3.6)$$

co natychmiast daje

$$a_0 = 1 \quad (3.7)$$

$$a_1 = 0 \quad (3.8)$$

a zatem

$$f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_2 x^2 + 1 \quad (3.9)$$

Pozostałe warunki brzegowe (3.1) i (3.2) można przedstawić jako

$$f(l_u) = 0 \quad (3.10)$$

$$f'(l_u) = 0 \quad (3.11)$$

natomiast żądanie punktu przegięcia dla  $0 < x = x_1 < l_u$

$$f''(x_1) = 0 \quad (3.12)$$

Wielomian 3 stopnia ( $k = 3$ ) daje tylko jedno położenie

$$x_1 = \frac{1}{2} l_u \quad (3.13)$$

i wynikające stąd wartości współczynników

$$a_3 = \frac{2}{1_u^3} \quad (3.14)$$

$$a_2 = -\frac{3}{1_u^2} \quad (3.15)$$

Wielomian 4 stopnia ( $k = 4$ ) daje możliwość spełnienia warunku  $f(x_1) = 0$  w przedziale

$$\frac{1}{3} l_u \leq x_1 \leq l_u \quad (3.16)$$

a wyrażone za pomocą  $x_1$  oraz  $l_u$  współczynniki stałe przyjmują wartości:

$$a_4 = \frac{3(1_u - 2x_1)}{1_u^3(6x_1^2 - 6x_1 l_u + 1_u^2)} \quad (3.17)$$

$$a_3 = 2\left(\frac{1}{1_u^3} - a_4 l_u\right) \quad (3.18)$$

$$a_2 = -\frac{3}{1_u^2} + a_4 l_u^2 \quad (3.19)$$

Dopiero wielomian 5 stopnia ( $k = 5$ ) daje możliwość spełnienia warunku (3.12) w całym przedziale, a po przyjęciu

$$f''(1_u) = 0 \quad (3.20)$$

współczynniki wyrażone za pomocą  $x_1$  oraz  $l_u$  przyjmują postać:

$$a_5 = \frac{6(3x_1 - 1_u)}{1_u^4(10x_1^2 - 8x_1 l_u + 1_u^2)} \quad (3.21)$$

$$a_4 = -3\left(\frac{1}{1_u^4} + a_5 l_u\right) \quad (3.22)$$

$$a_3 = \frac{8}{l_u^3} + 3a_5 l_u^2 \quad (3.23)$$

$$a_2 = - \left( \frac{6}{l_u^2} + a_5 l_u^3 \right) \quad (3.24)$$

W zależności od rodzaju danych doświadczalnych, którymi dysponujemy, sposób postępowania może być różny.

Aproksymację zbioru wartości naprężeń rozciągających w cięgnię przyporządkowanych określonym współrzędnym, wzór (2.8), wygodniej jest przeprowadzić za pomocą funkcji

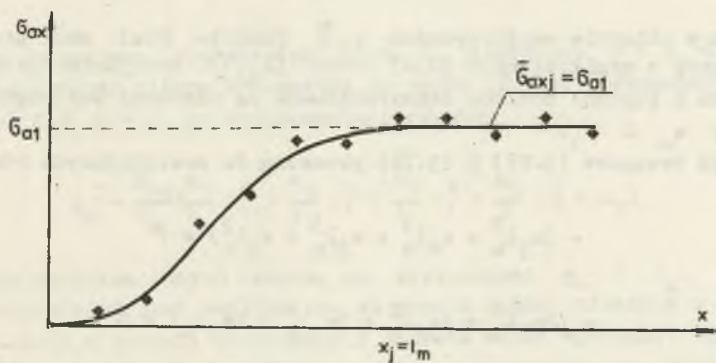
$$F(x) = 1 - f(x) = - (a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2) \quad \text{dla } 0 \leq x \leq l_u \quad (3.25)$$

$$F(x) = 1 \quad \text{dla } x \geq l_u \quad (3.26)$$

warunki brzegowe dla  $x = l_u$ ;

$$F(x) = 1 \quad (3.27)$$

$$F'(x) = 0 \quad (3.28)$$



Rys. 5. Ustalenie poziomu naprężeń ustabilizowanych na podstawie zbioru danych doświadczalnych

Mając zbiór wartości naprężeń (rys. 5), pierwszym zagadnieniem będzie ustalenie poziomu  $\sigma_{a1}$ . Jest to oczywiście możliwe tylko wtedy, gdy dane doświadczalne obejmują już obszar poza strefą zakotwienia. Funkcję stałą w postaci  $\sigma_{ax} = \sigma_{a1}$  możemy wyznaczyć kolejno dla zwiększającej się o jeden grupy punktów, poczynając od położonego najdalej od czoła elementu.

Za pomocą metody najmniejszych kwadratów otrzymamy

$$\bar{\sigma}_{axm} = \frac{\sum_{i=1}^m \sigma_{axi}}{m}, \quad (3.29)$$

gdzie  $m = 1, 2, 3, \dots$  licząc od punktu najdalszego od czoła. Można następnie wyznaczyć średnie odchylenie kwadratowe dla kolejno obliczonych  $\bar{\sigma}_{axm}$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (\sigma_{axi} - \bar{\sigma}_{axm})^2}{m} \quad (3.30)$$

i przyjmą tę wartość  $\bar{\sigma}_{axj} = \sigma_{a1}$ , od której poczynając, kolejne wartości  $s^2$  tworzą ciąg wzrastający. Odcięta ostatniej wartości  $\bar{\sigma}_{axj}$ , która wchodzi jeszcze do obliczenia  $\bar{\sigma}_{axj}$  wyznaczy wielkość  $l_u$ .

W celu aproksymacji  $F(x)$  w obszarze  $0 \leq x \leq l_u$  obliczamy następnie sprowadzone wartości rzędnych

$$\xi_i = \frac{\sigma_{axi}}{\sigma_{a1}}, \quad (3.31)$$

przy czym w układzie współrzędnych  $x, \xi$  funkcja  $F(x)$  musi przechodzić przez punkty o współrzędnych  $(0,0)$  oraz  $(l_u, 1)$ . Przejście przez początek układu i styczna pozioma zagwarantowane są zerowymi wartościami współczynników  $a_0$  i  $a_1$ .

Warunki brzegowe (3.27) i (3.28) prowadzą do następujących równań

$$-(a_5 l_u^5 + a_4 l_u^4 + a_3 l_u^3 + a_2 l_u^2) = 1 \quad (3.32)$$

$$-(5a_5 l_u^4 + 4a_4 l_u^3 + 3a_3 l_u^2 + 2a_2 l_u) = 0 \quad (3.33)$$

Wykorzystując dwa równania ułożone według algorytmu metody najmniejszych kwadratów

$$-(a_5 \sum_1 x_i^7 + a_4 \sum_1 x_i^6 + a_3 \sum_1 x_i^5 + a_2 \sum_1 x_i^4) = \sum_1 \xi_i x_i^2 \quad (3.34)$$

$$-(a_5 \sum_1 x_i^8 + a_4 \sum_1 x_i^7 + a_3 \sum_1 x_i^6 + a_2 \sum_1 x_i^5) = \sum_1 \xi_i x_i^3 \quad (3.35)$$

łącznie z dwoma powyższymi, otrzymamy układ równań (3.32 - 35), z którego wyznaczmy wartości współczynników stałych, co pozwala jednoznacznie określić funkcję  $F(x)$ .

Zamiast metody najmniejszych kwadratów możemy posłużyć się metodą przeciętnych [3]; zbiór wartości doświadczalnych  $\{x_i, \xi_i\}$  dzielimy w tym przypadku na dwie grupy o zbliżonej liczebności  $\{1, k\}$ ,  $\{k+1, n\}$  i układamy dwa równania warunkowe, zakładające zerowanie się sumy odchyłeń pionowych.

$$-(a_5 \sum_{i=1}^k x_i^5 + a_4 \sum_{i=1}^k x_i^4 + a_3 \sum_{i=1}^k x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^k x_i^2) - \sum_{i=1}^k \xi_i = 0 \quad (3.36)$$

$$-(a_5 \sum_{i=k+1}^n x_i^5 + a_4 \sum_{i=k+1}^n x_i^4 + a_3 \sum_{i=k+1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=k+1}^n x_i^2) - \sum_{i=k+1}^n \xi_i = 0 \quad (3.37)$$

Współczynniki stałe wielomianu obliczamy teraz z układu równań (3.32, 3.33, 3.36, 3.37).

Odciętą punktu przegięcia  $x_1$  wyznaczyć możemy ze wzoru (3.21), który uporządkowany wg  $x_1$  daje równanie kwadratowe

$$10a_5 l_u^4 x_1^2 - 2(4a_5 l_u^5 + 9)x_1 + a_5 l_u^6 + 6l_u = 0, \quad (3.38)$$

przy czym poszukiwany pierwiastek należy do przedziału  $0 < x_1 < l_u$ .

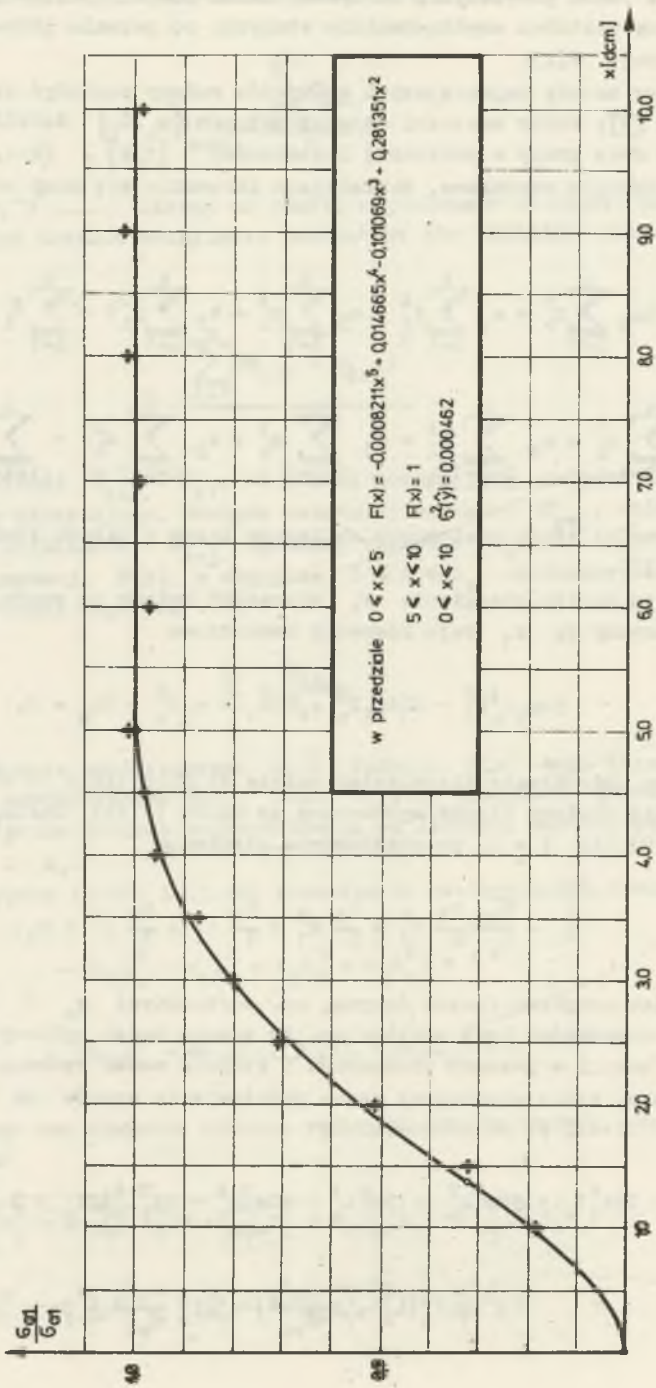
Posługując się funkcją (3.9) dla  $k = 5$ , po scałkowaniu otrzymamy

$$g_0 = \frac{6a_0}{E_a} \left( \frac{a_5}{6} x_1^6 + \frac{a_4}{5} x_1^5 + \frac{a_3}{4} x_1^4 + \frac{a_2}{3} x_1^3 + x_1 \right) \quad (3.39)$$

Dysponując zespołem innych danych, np. wartościami  $g_0$  i  $l_u$ , (których pomiar bezpośredni jest możliwy np. za pomocą badań opisanych w pracy [6, 7] dla funkcji w postaci wielomianu 5 stopnia można wyznaczyć wartość  $x_1$  z równania, które uzyskujemy przez podstawienie wzorów na współczynniki stałe (3.21-24) do związku (3.39):

$$6x_1^7 - 26x_1^6 l_u + 39x_1^5 l_u^2 - 15x_1^4 l_u^3 - 20x_1^3 l_u^4 + 4x_1^2 l_u^4 (4l_u + 5 \frac{g_0 E_a}{6a_0}) - \\ - 2x_1 l_u^5 (l_u + 8 \frac{g_0 E_a}{6a_0}) + 2l_u^6 \frac{g_0 E_a}{6a_0} = 0 \quad (3.40)$$





Rys. 6. Przykład doboru wielomianu do danych doświadczalnych

Wybieramy pierwiastek leżący w przedziale  $0 < x_1 < l_u$  i za pomocą wzorów (3.21-24) wyznaczamy parametry funkcji  $f(x)$ .

Wielomian 5 stopnia nie nadaje się do pośredniego określenia parametrów zakotwienia za pomocą sposobu podanego w rozdziale 2.2, ponieważ sformułowane tam warunki styczności nie są wystarczające do obliczenia wszystkich współczynników stałych wielomianu.

#### LITERATURA

- [1] Sulimowski Z.: Teoria zakotwienia ciągła sprężającego w betonie na zasadzie przyczepności. Archiwum Inżynierii Lądowej, t. XIX, z.2/1973.
- [2] Bronsztein J.N., Siemiendiajew K.A.: Poradnik encyklopedyczny matematyka, (tł. z ros.), PWN, 1969.
- [3] Budownictwo Betonowe t. VIII: Badanie materiałów, elementów i konstrukcji, Arkady 1970.
- [4] Laboratorium z konstrukcji betonowych, skrypt nr 270 Politechniki Śląskiej, Gliwice 1970.
- [5] Volk W.: Statystyka stosowana dla inżynierów (tł. z ang.), Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1965.
- [6] Sulimowski Z.: Bond anchorage of prestressing tendon in lightweight concrete; CEB, Contributions to the Symposium on Lightweight Concrete, ed. by Polish Academy of Sciences, Cracow 1973.
- [7] Sulimowski Z.: Zakotwienie przyczepnościowe ciągłych sprężających w betonie lekkim. Inżynieria i Budownictwo 2/1974.

#### ОБЗОР НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ВОПРОС АНКЕРОВКИ НА ОСНОВЕ СЦЕПЛЕНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ АРМАТУРЫ

#### Р е з ю м е

В статье представлено общее решение вопроса анкеровки в бетоне предварительно напряженной струны на основе сцепления и приведено несколько функций удовлетворяющих этому вопросу. Обсуждены масштабы применения этих функций и поданы способы определения параметров, полученных при экспериментальных исследованиях.

THE REVIEW OF SOME FUNCTIONS DEALING WITH THE PROBLEM OF BOND ANCHORAGE OF PRESTRESSING TENDON

S u m m a r y

In the paper the general solution of the bond anchorage problem of prestressing tendon has been presented and several functions have been shown which satisfy this problem. The application range of the functions has been discussed and the ways of the parameters estimations have been proposed by means of experimental data.

