

Józef Wraniak

## ITERACYJNA METODA OBLICZANIA TARCZ O CIĄGŁEJ ZMIANIE GRUBOŚCI WEDŁUG FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono iteracyjną metodę wyznaczania naprężeń i odkształceń w tarczach ze zmieniającą się grubością, przy czym założono, że zmiana grubości tarczy jest funkcją jednej zmiennej.

Podana metoda polega na zastąpieniu rozpatrywanego układu tarczy z obciążeniem, układem zastępczym, a następnie na kolejnych obliczeniach układu zastępczego przy zmieniających się w procesie iteracyjnym obciążeniach i utworzeniu nieskończonego szeregu wektorów, naprężeń i odkształceń.

### 1. Wstęp

Celem niniejszej pracy jest podanie pewnego iteracyjnego sposobu obliczania tarcz, których grubość jest funkcją zmiennej  $y$ . Obliczaniem tarcz o grubości zmieniającej się w sposób ciągły zajmował się V o c k e w pracy [1]. Wyprowadził on dla takich tarcz równanie różniczkowe czwartego rzędu określające funkcję naprężeń  $\sigma$ . Przez odpowiedni dobór tej funkcji rozwiązuje szereg problemów tarcz o zmieniającej się grubości.

Przedstawiony w niniejszej pracy sposób obliczania tarcz o ciągłej zmianie grubości jest rozszerzeniem sposobu podanego w pracy [2].

Polega on na utworzeniu szeregu iteracyjnego, wynikającego z rozwiązywania kolejno tarczy zastępczej o prostszej strukturze geometrycznej, obciążonej w pierwszym kroku iteracyjnym identycznie jak tarcza przedmiotowa. W następnych krokach obciążenia tarczy zastępczej wynikają z postępowania iteracyjnego.

### 2. Tok rozwiązania zagadnienia

Rozważania przeprowadzimy na przykładzie tarczy prostokątnej (rys. 1) której grubość  $t$  jest funkcją  $y$ .

Przedmiotowy układ  $U$  (rys. 1) zastępujemy układem  $U_0$  (rys. 2a), przystającym do układu  $U$ . Tarcza z układu  $U_0$  różni się od tarczy układu  $U$  tym, że ma stałą grubość  $t_0$ ; obciążenie zaś jest takie samo jak w układzie  $U$ .



przy czym  $\vec{N}_u = t \cdot \vec{\sigma}_u$ ,

$$\vec{R}_u = \begin{bmatrix} R_s \\ R_n \\ R_{s,n} \end{bmatrix}_u \quad - \text{wektor sił przekrojowych na brzegu tarczy N/m (rys. 1),}$$

$$\vec{R}_u^r = \begin{bmatrix} R_n \\ R_{s,n} \end{bmatrix}_u \quad - \text{wektor obciążeń brzegowych tarczy N/m (rys. 1),}$$

$$\vec{m}_u = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \end{bmatrix}_u \quad - \text{wektor obciążeń powierzchniowych tarczy w N/m}^2 \text{ (rys.1),}$$

$\mathbf{J}$  - macierz jednostkowa,

$$\mathbf{J}_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad - \text{macierz jednostkowa do redukcji wektorów sił przekrojowych.}$$

Zachodzi przy tym związek

$$\vec{R}_u^r = \mathbf{J}_r \cdot \vec{R}_u,$$

$$\vec{\epsilon}_u = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix}_u \quad - \text{wektor odkształceń}$$

Dla układu  $U_0$  można zapisać odpowiednio podobne oznaczenia, mianowicie:  $\vec{\sigma}_0$ ,  $\vec{N}_0$ ,  $\vec{R}_0$ ,  $\vec{R}_0^r$ ,  $\vec{m}_0$ ,  $\vec{\epsilon}_0$ .

Dla układów  $U$  i  $U_0$  równania fizyczne prawa Hooke'a przedstawiają się następująco:

$$\vec{\epsilon}_u = \mathbf{D}_u \cdot \vec{\sigma}_u \quad \text{i} \quad \vec{\epsilon}_0 = \mathbf{D}_0 \cdot \vec{\sigma}_0, \quad (1)$$

gdzie

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{D}_u = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1, & -\nu, & 0 \\ -\nu, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 2(1+\nu) \end{bmatrix}.$$

Możemy określić następujące relacje, zgodnie z założeniami przyjętymi dla układu zastępczego  $U_0$

$$\vec{R}_0^r = \vec{R}_u^r \quad \text{oraz} \quad \vec{m}_0 = \vec{m}_u \quad (2)$$

W dalszym ciągu zakładamy, że znane są wektory  $\vec{\delta}_0$  i  $\vec{\epsilon}_0$ , a więc również  $N_0$  i  $R_0$ , co oznacza, że rozwiązanie układu  $U_0$  jest znane.

Dobierzmy takie obciążenie tarczy przedmiotowej, by zachodziła równość odkształceń z układem  $U_0$ ; układ tak otrzymany oznaczmy przez  $W$  (rys.2b).

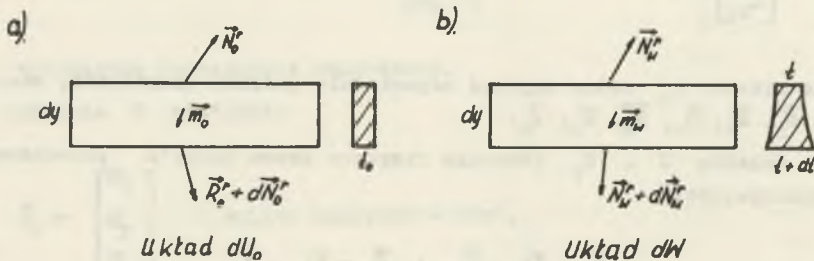
Możemy zatem zapisać

$$\vec{\epsilon}_0 = \vec{\epsilon}_w, \quad (3)$$

gdzie

$$\vec{\epsilon}_w = \mathbf{D}_u \cdot \vec{\delta}_w$$

W celu znalezienia obciążenia w układzie  $W$  rozpatrzmy elementarne części  $dU_0$  i  $dW$  układów  $U_0$  i  $W$  (rys. 3). W układach  $dU_0$  i  $dW$  wzdłuż linii uwolnionych więzów działają obciążenia w postaci wektorów odpowiednio  $\vec{N}_0^r$  i  $\vec{N}_w^r$ , wynikające z uzewnętrznienia sił przekrojowych  $\vec{N}_0$  i  $\vec{N}_w$  wzdłuż tych linii.



Rys. 3

Korzystając z relacji (3) otrzymamy

$$\vec{\sigma}_w = \vec{\sigma}_o \quad (4)$$

oraz

$$\vec{N}_w^r = \mathbf{J}_r t t_o^{-1} \vec{N}_o \quad (5)$$

$$\vec{R}_{w,i}^r = \mathbf{J}_r t_i t_o^{-1} R_{oi}. \quad (6)$$

Zależność (3) zapewnia spełnienie równań nierozdzielności w układzie W.

Równania równowagi w układzie W będą spełnione wówczas, gdy skorzystamy z równości sił przekrojowych układów  $dU_o$  i  $dW$ . Otrzymamy stąd następujące wektorowe równania równowagi:

$$- \vec{N}_w^r + (\vec{N}_w^r + d\vec{N}_w^r) + \vec{m}_w dy = - \vec{N}_o^r + (\vec{N}_o^r + d\vec{N}_o^r) + \vec{m}_o dy \quad (7)$$

Przekształcając równanie (7) otrzymamy

$$\vec{m}_w = \frac{d\vec{N}_o^r}{dy} - \frac{d\vec{N}_w^r}{dy} + \vec{m}_o,$$

a korzystając z relacji (5), otrzymamy z kolei

$$\vec{m}_w = \vec{m}_o + \mathbf{J}_r \frac{d}{dy} (r \cdot \vec{N}_o), \quad (8)$$

gdzie

$$r = 1 - t t_o^{-1}$$

Rozwiązanie układu U można przedstawić jako sumę rozwiązań dwóch układów

$$U = W + \Delta_1 U. \quad (9)$$

Układ  $\Delta_1 U$  jest przy tym układem nierozwiązanym, o takim samym stopniu trudności rozwiązania co układ U. Możemy znaleźć jego obciążenie, korzystając z równania (9),  $\Delta_1 U = U - W$ . Otrzymamy zatem obciążenie układu  $\Delta_1 U$  w następujący sposób:

$$\vec{\Delta}_1 \vec{m}_u = \vec{m}_u - \vec{m}_w = - \mathbf{J}_r \frac{d}{dy} (r \vec{N}_o) \quad (10)$$

$$\overrightarrow{\Delta_1 R_{u,i}^r} = \overrightarrow{R_{u,i}^r} - \overrightarrow{R_{w,i}^r} = \mathbf{J}_r \cdot r_i \cdot \overrightarrow{R_{o,i}}, \quad (11)$$

gdzie

$$r_i = 1 - t_i t_o^{-1}.$$

Jeżeli będziemy rozwiązywać układ  $\Delta_1 U$  w sposób identyczny jak to zrobiliśmy w przypadku układu  $U$ , to jego rozwiązanie przedstawić możemy podobnie do równania (9), czyli

$$\Delta_1 U = \Delta_1 W + \Delta_2 U \quad (12)$$

Obciążenie układu  $\Delta_1 W$  obliczymy ponownie z warunków równości odkształceń i sił przekrojowych układów  $\Delta_1 U_o$  i  $\Delta_1 W$ , przy czym obciążenie układu  $\Delta_1 U_o$  jest wyznaczone równaniem (10) i (11), bo  $\overrightarrow{\Delta_1 m_o} = \overrightarrow{\Delta_1 m_u}$  i  $\overrightarrow{\Delta_1 R_{oi}} = \overrightarrow{\Delta_1 R_{u,i}^r}$ .

Otrzymamy

$$\overrightarrow{\Delta_1 R_{w,i}^r} = \mathbf{J}_r t_i \cdot t_o^{-1} \cdot \overrightarrow{\Delta_1 R_{o,i}}.$$

Rozwiązanie układu  $U$  możemy więc przedstawić w postaci nieskończonego szeregu (13)

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k W, \quad \text{gdzie} \quad \Delta_0 W = W, \quad (13)$$

przy czym w analogii do (12) możemy zapisać

$$\Delta_k U = \Delta_k W + \Delta_{k+1} U \quad (13a)$$

lub

$$\Delta_k W = \Delta_k U - \Delta_{k+1} U. \quad (13b)$$

Dla  $k$ -tego kroku iteracyjnego otrzymujemy następujące zależności:

- obciążenie w układzie  $\Delta_k W$

$$\overrightarrow{\Delta_k m_w} = \mathbf{J}_r \frac{d}{dy} \left[ r(\overrightarrow{\Delta_k N_o} - \overrightarrow{\Delta_{k-1} N_o}) \right]. \quad (14a)$$

$$\overrightarrow{\Delta_k R_{w,i}^r} = \mathbf{J}_r \cdot S_i \cdot \overrightarrow{\Delta_k R_{o,i}^r}, \quad (14b)$$

gdzie

$$S_i = t_i t_o^{-1}$$

- obciążenie w układzie  $\Delta_k U$

$$\overrightarrow{\Delta_k R_{u,i}^r} = \overrightarrow{\Delta_k R_{o,i}^r} = \mathbf{J}_r \cdot r_i \cdot \overrightarrow{\Delta_{k-1} R_{o,i}^r}; \quad r_i = 1 - S_i \quad (15a)$$

$$\overrightarrow{\Delta_k m_u} = \overrightarrow{\Delta_k m_o} = - \mathbf{J}_r \frac{d}{dy} (r \cdot \overrightarrow{\Delta_{k-1} N_o}). \quad (15b)$$

W układach  $U, W, U_o, \Delta_1 U, \dots$  występują odpowiednie naprężenia i odkształcenia  $\overrightarrow{\sigma_u}, \overrightarrow{\sigma_w}, \overrightarrow{\sigma_o}, \overrightarrow{\Delta_1 \sigma_u}, \dots, \overrightarrow{\xi_u}, \overrightarrow{\xi_w}, \overrightarrow{\xi_o}, \overrightarrow{\Delta_1 \xi_u}, \dots$ ; możemy więc naprężenia  $\overrightarrow{\sigma_u}$  w układzie  $U$  obliczyć zgodnie z (13) jako

$$\overrightarrow{\sigma_u} = \sum_{k=0}^{\infty} (\overrightarrow{\Delta_k \sigma_w}) = \sum_{k=0}^{\infty} (\overrightarrow{\Delta_k \sigma_o}) \quad (16)$$

oraz odkształcenia jako

$$\overrightarrow{\xi_u} = \sum_{k=0}^{\infty} (\overrightarrow{\Delta_k \xi_o}). \quad (17)$$

Szereg (18) jest zbieżny przy odpowiednim doborze grubości  $t_o$  tarczy zastępczej.

### 3. Dobór układu zastępczego

Za układ zastępczy możemy przyjąć tarczę geometrycznie przystającą do tarczy układu rzeczywistego, jednorodną i izotropową, obciążoną identycznie jak tarcza układu rzeczywistego.

Obciążenie układu rzeczywistego w procesie iteracji wynosi

$$\overrightarrow{R_{u,i}^r} = \sum_{k=0}^{\infty} \overrightarrow{\Delta_k R_{w,i}^r} \quad (18a)$$

$$\vec{m}_u = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k \vec{m}_w. \quad (18b)$$

Na podstawie (13b) możemy zapisać

$$\Delta_k \vec{R}_{w,i}^r = \Delta_k \vec{R}_{u,i}^r - \Delta_{k+1} \vec{R}_{u,i}^r \quad (18c)$$

$$\Delta_k \vec{m}_w = \Delta_k \vec{m}_u - \Delta_{k+1} \vec{m}_u. \quad (18d)$$

Podstawiając (18c) do (18a) i (18d) do (18b) otrzymamy

$$\vec{R}_{u,i}^r = \vec{R}_{u,i}^r - \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_{k+1} \vec{R}_{u,i}^r \quad (19a)$$

$$\vec{m}_u = \vec{m}_u - \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_{k+1} \vec{m}_u \quad (19b)$$

Wykorzystując relacje (15) otrzymamy

$$\vec{R}_{u,i}^r = \vec{R}_{u,i}^r - \mathbf{J}_r \cdot r \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_k \vec{R}_{o,i} \quad (20a)$$

$$\vec{m}_u = \vec{m}_u + \mathbf{J}_r \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{d}{dy} (r \cdot \Delta_k \vec{N}_o) \right]. \quad (20b)$$

Widzimy, że szeregi (18a) i (18b) są zbieżne do wartości obciążenia tylko wówczas, gdy granice występujące w równaniach (20) dążą do zera.

Z kolei, aby granice te dążyły do zera, współczynnik  $r$  musi być mniejszy od jedności; wówczas kolejne reszktowe wektory sił przekrojowych

$\Delta_k \vec{R}_{o,i}$  i  $\Delta_k \vec{N}_o$  jako zależne od  $r^k$  będą dążyły do zera.

Otrzymujemy tu warunek  $|r| < 1$ , czyli

$$|1 - tt_0^{-1}| < 1,$$

który musi być spełniony dla każdej wartości  $y$ . Stąd mamy warunki

$$tt_0^{-1} > 0. \quad \text{i} \quad tt_0^{-1} < 2$$



Jeżeli maksymalna wartość  $t_{\max}$  spełniać będzie nierówność  $t_{\max} t_0^{-1} < 2$  to także spełniona będzie ta nierówność dla każdej wartości  $t$ , również dla  $t_{\min}$ . Otrzymujemy

$$t_{\max} t_0^{-1} < 2 \quad \text{i} \quad t_{\min} t_0^{-1} < 2$$

Najlepszą zbieżność szeregu (13) otrzymamy dla przypadku  $|r_{\max}| = |r_{\min}|$ , czyli dla przypadku  $1 - t_{\max} t_0^{-1} = t_{\min} t_0^{-1} - 1$ .

Stąd otrzymamy

$$t_0 = \frac{1}{2}(t_{\min} + t_{\max}). \quad (21)$$

#### 4. Przykład

Dany jest układ  $U$  (rys. 4), w którym przyjmujemy

$$E = \text{const}; \quad \nu = 0;$$

$$t_1 = 10^{-2} \text{ m}; \quad t_2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}; \quad t = (1 + y) \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Obliczamy:

$$t_0 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2) = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}; \quad S = t t_0^{-1} = \frac{2}{3}(1 + y); \quad r = 1 - S = \frac{1}{3}(1 - 2y)$$

$$S_1 = \frac{2}{3}; \quad S_2 = \frac{4}{3}; \quad r_1 = \frac{1}{3}; \quad r_2 = -\frac{1}{3}$$

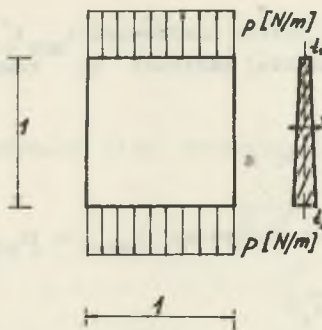
Rozwiązaniem układu  $U_0$  (rys. 5) jest

$$\vec{N}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{R}_{0,1}^r = \vec{R}_{0,2}^r = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Obciążenie układu  $\Delta_1 U$ , stanowiące zarazem obciążenie układu  $\Delta_1 U_0$ , obliczymy na podstawie wzorów - (15).

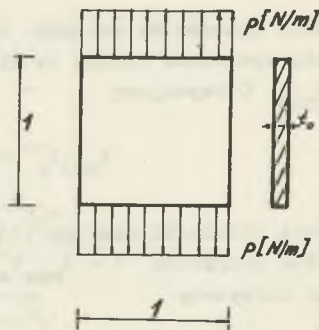
Otrzymamy:

$$\vec{\Delta}_1 m_u = - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dy} \left\{ \frac{1}{3}(1 - 2y) \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix}$$



Układ U

Rys. 4

Układ  $U_0$ 

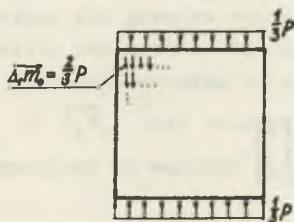
Rys. 5

$$\vec{\Delta}_1 R_{U,1}^R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix}$$

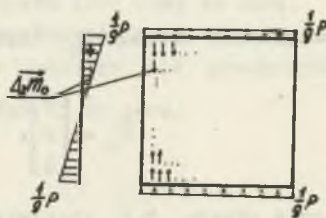
$$\vec{\Delta}_1 R_{U,2}^R = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix}$$

Układ  $\Delta_1 U_0$  przedstawiono na rys. 6. Wektor sił przekrojowych w układzie  $\Delta_1 U_0$  przedstawia się jako

$$\vec{\Delta}_1 \bar{N}_0 = \frac{1}{3}(1 - 2y) \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix}$$

układ  $\Delta_1 U_0$ 

Rys. 6

Układ  $\Delta_2 U_0$ 

Rys. 7

Obciążenie układu  $\Delta_2 U$

$$\vec{\Delta}_2 \bar{m}_U = - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dy} \left\{ \frac{1}{3}(1 - 2y) \cdot \frac{1}{3}(1 - 2y) \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \frac{4}{9}(1 - 2y) \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\Delta}_2 R_{u,1}^r = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{\Delta}_2 R_{u,2}^r = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix};$$

Układ  $\Delta_2 U_0$  przedstawiono na rys. 7. Wektor sił przekrojowych w układzie  $\Delta_2 U_0$ :

$$\vec{\Delta}_2 N_0 = \left\{ \frac{1}{9} P - \int_0^y \frac{4}{9} (1 - 2y) dy \right\} \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} (1 - 2y)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Obciążenie układu  $\Delta_3 U$ :

$$\vec{\Delta}_3 m_u = - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dy} \left\{ \frac{1}{3} (1 - 2y) \frac{1}{9} (1 - 2y)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \frac{2}{9} (1 - 2y)^2 \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\Delta}_3 R_{u,1}^r = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{\Delta}_3 R_{u,2}^r = - \frac{1}{27} \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Układ  $\Delta_3 U_0$  przedstawiono na rys. 8. Wektor sił przekrojowych w tym układzie:

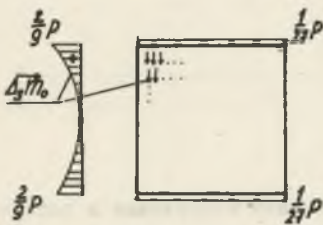
$$\vec{\Delta}_3 N_0 = \left\{ \frac{1}{27} - \int_0^y \frac{2}{9} (1 - 2y)^2 dy \right\} \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{27} (1 - 2y)^3$$

Można zauważyć, że

$$\vec{\Delta}_k N_0 = \frac{1}{3^k} (1 - 2y)^k,$$

naprężenia  $\vec{\sigma}_u$  obliczymy więc na podstawie wzoru (16)

$$\vec{\sigma}_u = t_0^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{3} (1 - 2y) \right]^k \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix}$$



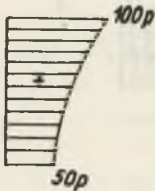
układ  $\Delta_3 U_0$ .

Rys. 8

Otrzymany szereg jest zbieżny, gdyż czynnik  $\frac{1}{3} (1 - 2y)$  jest dla każdej wartości  $y$  z przedziału  $(0,1)$  mniejszy od jedności.

Szereg powyższy jest szeregiem geometrycznym, zatem suma jego wynosi

$$\vec{\sigma}_u = t_0^{-1} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}(1 - 2y)} \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{10^2}{1+y} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix}.$$



naprężenia  $\sigma_y$

Rys. 9

Otrzymujemy więc naprężenia w układzie U

$$\sigma_x = 0; \quad \tau_{xy} = 0;$$

$$\sigma_y = \frac{100}{1+y} P.$$

Wykres naprężeń  $\sigma_y$ , stałych na długości tarczy, przedstawiono na rys. 9.

#### LITERATURA

- [1] Vocke W.: Lineare Elastizität VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1966.  
 [2] Budzianowski Z., Andermann F., Wranik J.: Pewien iteracyjny sposób wyznaczania naprężeń w tarczach wielospójnych. Mechanika Teoretyczna i Stosowana 2, 12/1974.

#### ИТЕРАЦИОННЫЙ СПОСОБ РАСЧЕТА ДИСКОВ С БЕСПРЕРЫВНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНОЙ ПО ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

#### Резюме

В работе представлен итерационный способ определения напряжений и деформаций в дисках, в которых перемена толщины составляет функцию одной переменной.

Сущностью представленного метода является замещение рассматриваемой системы дисков с нагрузкой заменяемой системы, а потом очередное считание заменяемой системы при изменяющихся в итерационном процессе нагрузках и создание бесконечного ряда векторов напряжений и деформаций.

## ITERATIONAL METHODS OF A CALCULATION OF DISCS WITH THE CHANGE OF THEIR THICKNESS GIVEN BY A CONTINUOUS FUNCTION OF ONE VARIABLE

## S u m m a r y

In the paper an iterational method of calculation stresses and strains in the discs with a changing thickness has been presented. It was assumed that the change of the discs is a function of a one variable. The method is based on the replacing of the disc by a substitutional system, then on the following calculations of the substitutional system with the changing load in the iterative procedure and by making on infinite series of vectors of stresses and strains.