ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976

Seria: Budownictwo z. 41 Nr kol. 478

Józef Wranik

ITERACYJNE ODWRACANIE MACIERZY KWADRATOWYCH WYSTĘPUJĄCYCH W MECHANICE BUDOWLI

Streszczenie. W pracy przedstawiono pewien iteracyjny sposób odwracania macierzy kwadratowych.
Opiera się on na analogii z iteracyjną metodą rozwiązywania tarcz. Podano przykład odwracania macierzy symetrycznej.

1. Wstęp

Rozwiązywanie dużych układów równań a szczególnie odwracanie macierzy kwadratowych, nawet na elektronicznych maszynach cyfrowych, jest jeszcze obecnie pracochłonne i bardzo kosztowne. W wielu przypadkach układów równań algebraicznych liniowych, jakie otrzymuje się przy zastosowaniu numerycznych metod rozwiązywania zagadnień mechaniki budowli, dogodne jest stosowanie metod iteracyjnych (metoda iteracji prostej, metoda Seidela [1], [2]).

Praca niniejsza wskazuje na możliwość odwracania macierzy kwadratowych lub też rozwiązywania układów algebraicznych równań liniowych za pomocą pewnego sposobu iteracyjnego opartego na analogii z metodą iteracyjną obliczania tarcz [3]. Otrzymywany w tej metodzie szereg macierzowy jest zbieżny przy odpowiednim doborze pewnej macierzy zastępczej. Dobór macierzy zastępczej stanowi główny problem proponowanego sposobu iteracyjnego.

2. Rozwiązanie zagadnienia

Niech dane będą macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, spełniające równanie macierzowe

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B} \qquad (U) \tag{1}$$

Symbole U, U_o, W, $\Delta_1 U$,... są odpowiednikami oznaczeń układów wprowadzonych w pracach [3] i [4], przedstawiających iteracyjny sposób obliczania tarcz.

Macierz niewiadomą $\mathbf{X}$ możemy znaleźć rozwiązując równanie (1), czyli

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \tag{1a}$$

Macierz $\mathbf{A}^{-1}$ będziemy mogli określić w postaci następującego szeregu macierzowego:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}_0^{-1}(\mathbf{J} + \mathbf{r} + \mathbf{r}^2 + \ldots + \mathbf{r}^k + \ldots), \tag{1b}$$

gdzie $\mathbf{J}$ jest macierzą jednostkową.

Macierze $\mathbf{A}_0$ i $\mathbf{r}$ wynikają z przedstawionego w dalszej kolejności rozumowania.

Przyjmujemy pewną macierz nieosobliwą $\mathbf{A}_0$, taką by jej odwrotność była znana lub by jej odwrócenie było zadaniem mniej pracochłonnym w stosunku do odwrócenia macierzy $\mathbf{A}$.

Załóżmy następnie, że istnieje pewne rozwiązanie $\mathbf{X}_0$, spełniające równanie (2)

$$\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{X}_0 = \mathbf{B} \quad (U_0) \tag{2}$$

Z równania (2) obliczymy

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{B} \tag{3}$$

Rozważmy w dalszym ciągu relację

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_0 = \mathbf{B}_0. \quad (W) \tag{4}$$

Jeżeli w miejsce $\mathbf{X}_0$ podstawimy relację (3), to otrzymamy

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{B} \tag{4a}$$

Wprowadzając oznaczenie $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_0^{-1} = \mathbf{S}$, możemy zapisać, że

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \tag{5}$$

Rozwiązanie układu (1) możemy zapisać w postaci sumy macierzy, czyli

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \Delta_1 \mathbf{X}^{1)}, \tag{6}$$

gdzie $\Delta_1 \mathbf{X}$ jest na razie pewną nieznaną macierzą.

Podobnie zapiszemy macierz $\mathbf{B}$, tzn.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \Delta_1 \mathbf{B} \tag{7}$$

Podstawiając związki (6) i (7) do równania (1) otrzymamy

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}_0 + \Delta_1 \mathbf{X}) = \mathbf{B}_0 + \Delta_1 \mathbf{B},$$

z czego wynika, że

$$\mathbf{A} \cdot \Delta_1 \mathbf{X} = \Delta_1 \mathbf{B} \tag{8}$$

Macierz $\Delta_1 \mathbf{B}$ możemy znaleźć z równania (7)[2]

$$\Delta_1 \mathbf{B} = \mathbf{B} - \mathbf{B}_0 = \mathbf{B} - \mathbf{S}\mathbf{B} = (\mathbf{J} - \mathbf{S})\mathbf{B}$$

Oznaczmy $\mathbf{J} - \mathbf{S} = \mathbf{r}$, wówczas

$$\Delta_1 \mathbf{B} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} \tag{9}$$

Rozwiązanie równania (8) jest tak samo pracochłonnym problemem jak rozwiązanie równania (1). W celu otrzymania tego rozwiązania przeprowadźmy identyczne rozumowanie jak w przypadku wyjściowego równania (1). Przyjmijmy mianowicie $\mathbf{A}_0$, a następnie rozwiążmy równanie

$$\mathbf{A}_0 \cdot \Delta_1 \mathbf{X}_0 = \Delta_1 \mathbf{B} \tag{10}$$

Z równania podobnego do (4), przy wykorzystaniu (10) i (9) obliczymy

$$\Delta_1 \mathbf{B}_0 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} \tag{11}$$

---

1) Odpowiednik iteracyjnej metody obliczania tarcz [4] przedstawia się jako $U = W + \Delta_1 U$.

2) W pracy [4], $\Delta_1 U = U - W$.

Rozwiązanie układu równań (8) możemy przedstawić w postaci

$$\Delta_1\mathbf{X} = \Delta_1\mathbf{X}_o + \Delta_2\mathbf{X} \tag{12}$$

i podobnie

$$\Delta_1\mathbf{B} = \Delta_1\mathbf{B}_o + \Delta_2\mathbf{B}.$$

Podstawiając do (12) związki (9) i (11) otrzymamy

$$\Delta_2\mathbf{B} = \mathbf{r} \,.\, \mathbf{B} - \mathbf{S} \,.\, \mathbf{r} \,.\mathbf{B} = \mathbf{r}^2\mathbf{B}.$$

Macierze $\mathbf{X}$ i $\mathbf{B}$, zgodnie z (6) i (7), możemy przedstawić w postaci

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_o + \Delta_1\mathbf{X}_o + \Delta_2\mathbf{X},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_o + \Delta_1\mathbf{B}_o + \Delta_2\mathbf{B}.$$

W kolejnym i-tym kroku iteracyjnym otrzymamy

$$\mathbf{A}.\, \Delta_i\mathbf{X} = \Delta_i\mathbf{B}, \tag{13}$$

przy czym

$$\Delta_i\mathbf{X} = \Delta_i\mathbf{X}_o + \Delta_{i+1}\mathbf{X}$$

$$\Delta_i\mathbf{B} = \Delta_i\mathbf{B}_o + \Delta_{i+1}\mathbf{B}$$

Macierz $\Delta_i\mathbf{X}_o$ spełnia równanie

$$\mathbf{A}_o\Delta_i\mathbf{X}_o = \Delta_i\mathbf{B}; \tag{14}$$

stąd obliczamy

$$\Delta_i\mathbf{X}_o = \mathbf{A}_o^{-1} \,.\, \Delta_i\mathbf{B} \tag{14a}$$

Ponieważ

$$\Delta_i\mathbf{B} = \mathbf{r}^i \,.\mathbf{B}, \tag{15}$$

więc

$$\Delta_i \mathbf{X}_o = \mathbf{A}_o^{-1} \cdot \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{B} \tag{16}$$

Ostatecznie, rozwiązanie równania (1) otrzymujemy w postaci nieskończonego szeregu macierzowego

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_o + \Delta_1 \mathbf{X}_o + \ldots + \Delta_i \mathbf{X}_o + \ldots \tag{17}$$

Podstawiając do szeregu (17) związek (16) otrzymamy

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_o^{-1}(\mathbf{J} + \mathbf{r} + \mathbf{r}^2 + \ldots + \mathbf{r}^i + \ldots) \tag{18}$$

Porównując związek (1a) ze związkiem (18) stwierdzamy, że

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}_o^{-1}(\mathbf{J} + \mathbf{r} + \ldots + \mathbf{r}^i + \ldots). \tag{18a}$$

Żeby szereg potęgowy utworzony z macierzy $\mathbf{r}$ był zbieżny, należy tak dobrać macierz $\mathbf{r}$, by jej norma była mniejsza od jedności, czyli aby

$$\|\mathbf{r}\| < 1$$

W takim przypadku sumą tego szeregu będzie

$$\mathbf{A}_o^{-1}(\mathbf{J} - \mathbf{r})^{-1} = \mathbf{A}_o^{-1}(\mathbf{J} - \mathbf{J} + \mathbf{A}\mathbf{A}_o^{-1})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$$

Przybliżone wartości elementów odwróconej macierzy $\mathbf{A}$ możemy więc obliczyć jako

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}_o^{-1}(\mathbf{J} + \mathbf{r} + \mathbf{r}^2 + \ldots + \mathbf{r}^i). \tag{19}$$

3. Dobór macierzy $\mathbf{A}_o$

Macierz $\mathbf{A}_o$ musi spełniać dwa wynikające z poprzednich rozważań warunki. Po pierwsze musi być tak dobrana, by jej norma spełniała nierówność $\|\mathbf{r}\| < 1$ a po drugie musi być taka, by nakład pracy przy jej odwracaniu był mniejszy aniżeli w przypadku odwracania macierzy $\mathbf{A}$.

Najwygodniej byłoby więc przyjąć macierz $\mathbf{A}_o$ w postaci diagonalnej.

Załóżmy taką właśnie postać macierzy $\mathbf{A}_o$. Jej odwrócenie nie przedstawia wówczas żadnych trudności rachunkowych.

Z nierówności $\|\mathbf{\Gamma}\| < 1$ otrzymamy

$$\|\mathbf{J} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_o^{-1}\| < 1 \tag{20}$$

Obliczmy macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 1 & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & 1 & \dots \\ \cdot & & & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,i} & \\ a_{2,1} & a_{22} & & & \\ & & & & \\ & & & a_{k,i} & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & \\ 0 & \alpha_2 & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \alpha_i \dots \\ \cdot & & & \end{bmatrix}$$

więc

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 - a_{11} \cdot \alpha_1 & - a_{12} \cdot \alpha_2 & \dots & - a_{1,i}\,\alpha_i & \dots & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ - a_{k,1} \cdot \alpha_1 & - a_{k,2} \cdot \alpha_2 & ,\dots & - a_{k,i}\alpha_i & \dots & 1-a_{k,k}\alpha_k & \dots \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \end{bmatrix}$$

Obliczając normę macierzy $\mathbf{\Gamma}$ otrzymamy wg [1]

$$\|\mathbf{\Gamma}\| = \max_k \left({\sum_{i=1}^{n}}' |a_{k,i} \cdot \alpha_i| + |1 - a_{k,k} \cdot \alpha_k| \right) \tag{21}$$

gdzie

$\sum'$ - oznacza sumowanie dla $i = 1,2\dots n$ z wyłączeniem $i=k$.

Warunek (20) przyjmie więc postać

$$\max_k \left({\sum_{i=1}^{n}}' |a_{k,i} \cdot \alpha_i| + |1 - a_{k,k} \cdot \alpha_k| \right) < 1 \tag{22}$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{ki} \cdot \alpha_i) = \sigma_k$$

oraz niech $a'_{k,k}$ i α'_k będą wartościami występującymi w relacji (22), odpowiadającymi normie macierzy $\mathbf{\Gamma}$.

Możemy wówczas zapisać

$$\sigma'_k + \left|1 - a'_{k,k}\ \alpha'_k\right| < 1 \tag{23}$$

Otrzymamy stąd dwie nierówności

$$\begin{aligned} a'_{kk}\,\alpha'_k - \sigma'_k &> 0, \\ a'_{kk}\,\alpha'_k + \sigma'_k &< 2. \end{aligned} \tag{24}$$

Ponieważ norma $\|\mathbf{r}\|$ spełnia warunki (24), zatem wartości sumy bezwzględnych wartości elementów pozostałych wierszy macierzy - jako mniejsze od wartości normy $\|\mathbf{r}\|$ - muszą spełniać warunki (24). W przeciwnym bowiem wypadku, któryś z wyrazów $\sigma_k + \left|1 - a_{k,k} \cdot \alpha_k\right|$ byłby większy od normy, co jest sprzeczne z definicją normy macierzy.

Stwierdzamy więc, że aby spełniona była nierówność $\|\mathbf{r}\| < 1$, zachodzić muszą dla każdej wartości $k = 1,2,\ldots n$ następujące warunki

$$\begin{aligned} a_{k,k} \cdot \alpha_k - \sigma_k &> 0, \\ a_{k,k} \cdot \alpha_k + \sigma_k &< 2. \end{aligned} \tag{25}$$

Nierówności (25) nie zmienią swej postaci przy założeniu stałej wartości $\alpha_k = \alpha$; wówczas

$$a_{k,k} - \sum_{i=1}^{n}{}' \left|a_{k,i}\right| > 0 \tag{26}$$

oraz

$$a_{k,k} + \sum_{i=1}^{n}{}' \left|a_{k,i}\right| < \frac{2}{\alpha} \tag{27}$$

Przy powyższych założeniach macierz $\mathbf{A}_o^{-1}$ przyjmie następującą postać diagonalną

$$\mathbf{A}_o^{-1} = \alpha \,.\, \mathbf{J}$$

Wzór (20) przyjmie zatem postać

$$\left|\|\mathbf{J}\| - \alpha \,.\, \|\mathbf{A}\|\right| < 1,$$

czyli

$$\left|1 - \alpha \; \|\mathbf{A}\|\right| < 1. \tag{28}$$

Stąd stwierdzamy, że

$$\alpha > 0 \quad i \quad \alpha < \frac{2}{\|\mathbf{A}\|} \tag{29}$$

Widzimy, że nieskończenie wiele wartości α, zawartych w przedziale $(0, \frac{2}{\|\mathbf{A}\|})$, spełnia warunki zadania.

Spróbujmy dobrać taką wartość α, dla której norma $\|\mathbf{r}\|$ będzie najmniejsza. W tym celu przyjmujemy, że

$$\alpha = \frac{2}{\|\mathbf{A}\|}\varkappa ,$$

gdzie

$$0 < \varkappa < 1$$

i podstawimy tę wartość α do wzoru (21).
Otrzymamy

$$\|\mathbf{r}(\varkappa)\| = \left|1 - a'_{k,k} \cdot \frac{2}{\|\mathbf{A}\|}\varkappa\right| + \frac{2\varkappa}{\|\mathbf{A}\|}\sum_{i=1}^{n}{}' |a'_{k,i}| \tag{30}$$

Relacja (30) przedstawia równanie dwu prostych w układzie współrzędnych $\|\mathbf{r}(\varkappa)\|$, $\varkappa$.

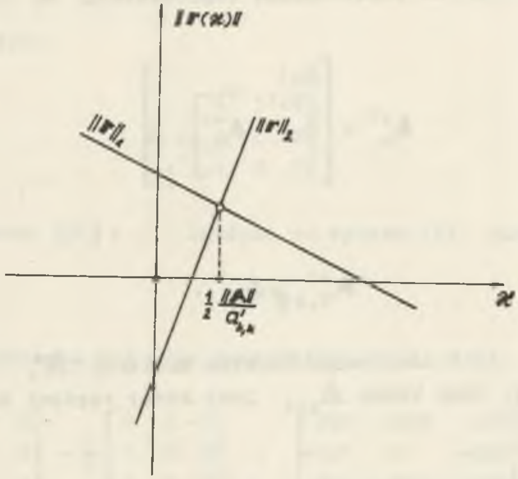
Równania tych prostych przedstawiają się następująco:

$$\|\mathbf{r}\|_1 = 1 - a'_{k,k} \cdot \frac{2\varkappa}{\|\mathbf{A}\|} + \frac{2\varkappa}{\|\mathbf{A}\|} \cdot \sum_{i=1}^{n}{}' |a_{k,i}| \tag{30a}$$

oraz

$$\|\mathbf{r}\|_2 = a'_{kk} \cdot \frac{2\varkappa}{\|\mathbf{A}\|} - 1 + \frac{2\varkappa}{\|\mathbf{A}\|} \cdot \sum_{i=1}^{n}{}' |a'_{k,i}| \tag{30b}$$

Rysunek 1 przedstawia wykresy prostych opisanych równaniami (30a) i (30b). Widać, że najmniejszą wspólną wartością norm $\|\mathbf{r}\|_1$ i $\|\mathbf{r}\|_2$ jest



Rys. 1

ich punkt przecięcia. Wynika stąd warunek $\|\mathbf{r}\|_1 = \|\mathbf{r}\|_2$, z którego otrzymamy

$$\varkappa = \frac{1}{2}\,\frac{\|\mathbf{A}\|}{a'_{k,k}}$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\alpha = \frac{1}{a'_{k,k}} \tag{31}$$

Przy czym $a'_{k,k}$ jest elementem macierzy $\mathbf{A}$ należącym do tego wiersza, który decyduje o wartości jej normy.

Przedstawiony sposób przyjęcia macierzy $\mathbf{A}_0$ jest najprostszy lecz zbieżność szeregu (18) jest wówczas - jak wykazały testy - słaba. W celu polepszenia zbieżności można rozważyć w podobny sposób macierz $\mathbf{A}_0$ diagonalną o zróżnicowanych elementach. Aby otrzymać przy tym normę $\|\mathbf{r}\|$ najmniejszą, wystarczy - jak stwierdzono - elementy macierzy $\mathbf{A}_0$ obliczać jako

$$\alpha_i = \frac{1}{a_{ii}}. \tag{32}$$

Stwierdzono również, że można przyjąć za macierz $\mathbf{A}_0$ macierz quasi - diagonalną o blokach dowolnego rzędu.

Rozważania, podobne do poprzednich, doprowadzają do następującej macierzy $\mathbf{A}_0^{-1}$:

$$\mathbf{A}_0^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{0,1}^{-1} & 0\dots & \\ 0 & \mathbf{A}_{0,2}^{-1} & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\mathbf{A}_{0,i}^{-1} = \mathbf{A}_{i,i}^{-1}.$$

Macierz $\mathbf{A}_{i,i}^{-1}$ jest odwróconym blokiem macierzy $\mathbf{A}$, leżącym na jej głównej przekątnej. Rząd bloku $\mathbf{A}_{i,i}$ jest równy rzędowi bloku $\mathbf{A}_{0,i}$.

4. Oszacowanie zbieżności iteracji

Dla dowolnej liczby "i" kroków iteracyjnych możemy zapisać, że przybliżona wartość reszty normy $\|\mathbf{A}^{-1}\|$, czyli R $\|\mathbf{A}^{-1}\|$, wynosi wg [1]

$$R\,\|\mathbf{A}^{-1}\| = \|\mathbf{A}_0^{-1}(\mathbf{J}-\mathbf{r})^{-1} - \mathbf{A}_0^{-1}(\mathbf{J}+\mathbf{r}+\dots\mathbf{r}^i)\|, \tag{34}$$

czyli

$$R\,\|\mathbf{A}^{-1}\| \leqslant \|\mathbf{A}_0^{-1}\| \frac{\|\mathbf{r}\|^{i+1}}{1-\|\mathbf{r}\|} \tag{35}$$

Dla przypadku przyjęcia macierzy $\mathbf{A}_0^{-1}$ diagonalnej o równych wartościach α można wykazać, korzystając ze wzoru (35), że

$$R\,\|\mathbf{A}^{-1}\| \leqslant \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}{}' |a'_{k,i}|\right)^{i+1}}{(a'_{k,k})^{i+1}\left(a'_{k,k} - \sum\limits_{i=1}^{n}{}' |a'_{k,i}|\right)} \tag{36}$$

Ze wzoru (36) wynika, że o zbieżności iteracji decyduje macierz $\mathbf{A}$, co wynika również z nierówności (26).

5. Przykład

Dana jest macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 1 & 8 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Obliczamy jej normę $\|\mathbf{A}\| = 11$. Zgodnie ze wzorem (31) otrzymamy

$$\alpha = \frac{1}{8}.$$

Macierz $\mathbf{\Gamma}$ przedstawia się więc następująco:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 1 & 8 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 & -125 & 125 \\ -125 & 0 & -250 \\ 125 & -250 & 125 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Norma macierzy $\mathbf{\Gamma}$ wynosi $\|\mathbf{\Gamma}\| = 0{,}5$.

Szacunkowy błąd dla 4 kroków iteracyjnych wynosi

$$R\|\mathbf{A}^{-1}\| \leqslant \frac{1}{8} \cdot \frac{0{,}5^5}{1 - 0{,}5} = 0{,}008$$

Potęgi macierzy $\mathbf{\Gamma}$ przedstawiają się następująco:

$$\mathbf{\Gamma}^2 = \begin{bmatrix} 94 & -62 & 78 \\ -62 & 78 & -47 \\ 78 & -47 & 94 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}; \quad \mathbf{\Gamma}^3 = \begin{bmatrix} 41 & -31 & 37 \\ -31 & 20 & -34 \\ 37 & -34 & 34 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3};$$

$$\mathbf{\Gamma}^4 = \begin{bmatrix} 19 & -14 & 17 \\ -14 & 12 & -15 \\ 17 & -15 & 17 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Zgodnie ze wzorem (19) otrzymamy przybliżoną macierz $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 176 & -29 & 32 \\ -29 & 139 & -43 \\ 32 & -43 & 159 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

wobec dokładnej macierzy

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 178 & -31 & 34 \\ -31 & 140 & -44 \\ 34 & -44 & 160 \end{bmatrix}$$

Obliczanie odwrotności macierzy $\mathbf{A}$ za pomocą macierzy $\mathbf{A}_0^{-1}$, przedstawionej wzorem (33), daje:

$$\mathbf{A}_0^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} 170,2 & -21,3 & 0 \\ -21,3 & 127,7 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 142,8 \end{array}\right] \cdot 10^{-3}; \quad \mathbf{r} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 142,8 \\ 0 & 0 & -285,6 \\ \hline 212,8 & -276,7 & 0 \end{array}\right] \cdot 10^{-3}; \ldots$$

$$\mathbf{r}^4 = \begin{bmatrix} 3,3 & -4,3 & 0 \\ -6,7 & 8,7 & 0 \\ 0 & 0 & 11,7 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Macierz $\mathbf{A}^{-1}$ przedstawia się więc jako $\mathbf{A}^{-1} \cong \mathbf{A}_0^{-1} \sum_{i=1}^{4} \mathbf{r}^i$, czyli

$$\mathbf{A}^{-1} \cong \begin{bmatrix} 170,2 & -21,3 & 0 \\ -21,3 & 127,7 & 0 \\ 0 & 0 & 142,8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,034 & -0,044 & 0,158 \\ -0,067 & 1,088 & -0,317 \\ 0,236 & -0,308 & 1,121 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} =$$

$$= \begin{bmatrix} 177,4 & -30,7 & 33,8 \\ -30,7 & 139,9 & -43,9 \\ 33,8 & -43,9 & 160,0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

LITERATURA

[1] Fadiejewa W.N.: Metody numeryczne algebry liniowej, PWN Warszawa 1955.

[2] Ralston A.: Wstęp do analizy numerycznej, PWN, Warszawa 1971.

[3] Budzianowski Z., Andermann F., Wranik J.: Pewien iteracyjny sposób wyznaczania naprężeń w tarczach wielospójnych, Mechanika Teoretyczna i Stosowana 2, 12/1974.

[4] Wranik J.: Iteracyjna metoda obliczania tarcz o ciągłej zmianie grubości jako funkcji jednej zmiennej. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Budownictwo z. 41/1976.

ИТЕРАЦИОННОЕ ОБРАЩЕНИЕ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ
ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

Р е з ю м е

В работе представлен итерационный способ обращения квадратных матриц. Основывается он на аналогии с методом итерациониого решения дисков. В работе приводится пример обращения симметричной матрицы.

ITERATIONAL REVORSING OF SQUARE MATRIXES APPEARING
IN THE STRUCTURAL MECHANICS

S u m m a r y

In the paper has been presented a method of reversing of square matrixes. The method is based on the iterational method of discs solving. An exemple applied to a symmetric matrix has been given.