ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: BUDOWNICTWO z. 45 Nr kol. 525

Bogusław CIEŚLAR

BELKI SPOCZYWAJĄCE PRZEDZIAŁAMI NA SPRĘŻYSTYM PODŁOŻU

Streszczenie. W pracy podano nowy sposób podejścia do rozwiązania belek o stałej sztywności przedziałami spoczywających na sprężystym podłożu typu Winklera. Wykorzystano tutaj aparat operatorów w sensie Mikusińskiego dla rozwiązania równań całkowych Volterry II rodzaju. Uzyskano w ten sposób skończony układ równań,z których wyznaczono szukane funkcje odporu gruntu.

W oparciu o przejście do granicy otrzymano również rozwiązanie problemu belek spoczywających na podporach podatnych.

Oznaczenia

s	- operator różniczkowy
h^{l_n}, h^{t_n}	- operator przesunięcia
$\{y(x)\}$	- funkcja linii ugięcia belki
EJ	- sztywność zginania belki
K_n	- współczynnik podatności podłoża.

Wstęp

W pracy zastosowano operatory w sensie Mikusińskiego [1] do obliczania belek przedziałami spoczywających na sprężystym podłożu. Rozważania ograniczono do belek o stałej sztywności, tym niemniej można je uogólnić na belki o zmiennej sztywności [2] . Rozpatrzony problem belek o dowolnych warunkach brzegowych doprowadzono w bardzo prosty sposób do układu równań całkowych Volterry II rodzaju.

1. Równanie wyjściowe i jego rozwiązanie

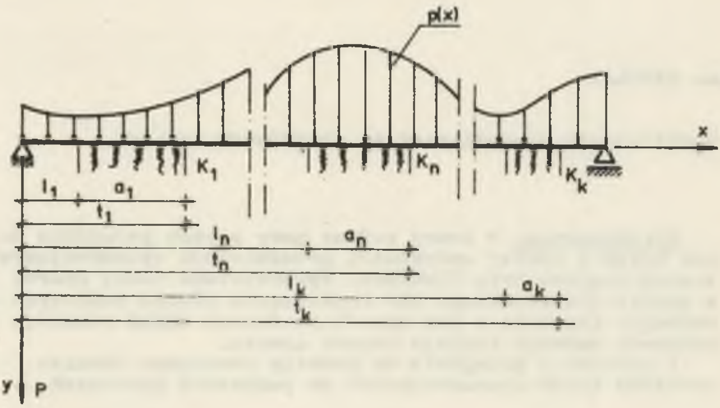
Równanie różniczkowe linii ugięcia belki (rys. 1) posiada kształt

$$EJ\, y^{(4)} = q \qquad (1.1)$$

gdzie:

$$q = \{p(x)\} - \{r(x)\}, \qquad (1.2)$$

a $p(x)$ jest funkcją obciążenia belki, zaś $r(x)$ jest funkcją odporu gruntu.



Rys. 1

Przyjmując model podłoża według Winklera mamy następująoy związek

$$r_n(x - l_n) = K_n\, y(x) \tag{1.3}$$

dla $l_n < x < t_n$.

Funkoja odporu gruntu wyraża się tu ogólnym wzorem

$$r(x) = \sum_{n=1}^{k} r_n(x) h^{l_n} - \sum_{n=1}^{k} r_n(x+a_n) h^{t_n}. \tag{1.4}$$

Podstawiająo (1.2) i (1.4) do (1.1), otrzymujemy operatorową postać linii ugięcia belki

$$\{y(x)\} = W(s) + \frac{1}{EJ}\frac{\{p(x)\}}{s^4} - \frac{1}{EJ\,s^4}\left[\sum_{m=1}^{n-1} r_m(x) h^{l_m} - \sum_{m=1}^{n-1} r_m(x + a_m) h^{t_m}\right] - \frac{1}{EJ\,s^4}\, r_n\, h^{l_n} \tag{1.5}$$

gdzie:

$$W(s) = \frac{1}{s^4}\left(y^{(3)}(o) + s y^{(2)}(o) + s^2 y^{(1)}(o) \quad s^3 y(o)\right).$$

Wstawiając do równania (1.5) funkcyjną postać operatora $\frac{1}{s^4}$ oraz wykonując odpowiednie mnożenie splotowe, otrzymujemy

$$\{y(x)\} = \{Y(x)\} + \{Q(x)\} - \frac{1}{EJ}\left[\sum_{m=1}^{n-1}\int_0^{x-l_m} r_m(u)\frac{(x-u-l_m)^3}{3!}\,du - \right.$$
$$\left. - \sum_{m=1}^{n-1}\int_0^{x-t_m} r_m(u+a_m)\frac{(x-t_m-u)^3}{3!}\,du\right] - \frac{1}{EJ}\int_0^{x-l_n} r_n(u)\frac{(x-u-t_n)^3}{3!}\,du \tag{1.6}$$

gdzie:

$$\{Y(x)\} = \left\{\frac{y^{(3)}(o)}{3!}x^3 + \frac{y^{(2)}(o)}{2!}x^2 + y^{(1)}(o)x + y(o)\right\}$$

$$\{Q(x)\} = \frac{1}{EJ}\left\{\int_0^x \frac{(x-u)^3}{3!}\,p(u)\,du\right\}.$$

Jeśli do równania (1.6) wstawimy zgodnie z przyjętą hipotezą Winklera relację (1.3), to otrzymamy równanie (1.7) o postaci

$$\frac{K_n}{EJ}\left[\sum_{m=1}^{n-1}\int_0^{x-l_m} r_m(u)\frac{(x-l_m-u)^3}{3!}\,du - \sum_{m=1}^{n-1}\int_0^{x-t_m} r_m(u+a_m)\frac{(x-t_m-u)^3}{3!}\,du\right] +$$
$$+ \frac{K_n}{EJ}\int_0^{x-l_n} r_n(u)\frac{(x-l_n-u)^3}{3!}\,du + r_n(x-l_n) = K_n\,Y(x) + K_n\,Q(x). \tag{1.7}$$

Relacja (1.7) ważna jest zgodnie z (1.3) dla

$$l_n < x < t_n.$$

Podstawiając do (1.7) $n = 1,2,\ldots,k$, otrzymamy układ k równań całkowych Volterry II rodzaju z przesuniętymi argumentami. Z układu tego można wyznaczyć k nieznanych funkcji $r_n(x)$ odporu gruntu.

2. Wyznaczanie funkcji odporu gruntu w poszczególnych przedziałach

Dokonując w równaniu (1.7) podstawienia

$$z_n = x - l_n$$

otrzymujemy równanie (2.1) o postaci operatorowej

$$\frac{1}{s^4}\frac{K_n}{EJ}\left[\sum_{m=1}^{n-1} r_m(z_n+l_n)h^{l_m} - \sum_{m=1}^{n-1} r_m(z_n+a_m+l_n)h^{t_m}\right] +$$

$$+\frac{1}{s^4}\frac{K_n}{EJ}\, r_n(z_n) + r_n(z_n) = K_n\,\bar{Y}(z_n) + K_n\,\bar{Q}(z_n) \tag{2.1}$$

gdzie:

$$\bar{Y}(z_n) = Y(z_n + l_n)$$

$$\bar{Q}(z_n) = Q(z_n + l_n).$$

Oznaczając

$$\frac{K_n}{EJ} = \beta_n^4$$

oraz dokonując elementarnych przekształceń równania (2.1), szukana funkcja w przedziale n-tym posiada postać:

$$r_n(z_n) = \frac{K_n s^4}{s^4+\beta_n^4}\,\bar{Y}(z_n) + \frac{K_n s^4}{s^4+\beta_n^4}\,\bar{Q}(z_n) -$$

$$-\frac{\beta_n^4}{s^4+{}_n^4}\left[\sum_{m=1}^{n-1} r_m(z_n+l_n)h^{l_m} - \sum_{m=1}^{n-1} r_m(z_n+l_n+a_m)\,h^{t_m}\right]. \tag{2.2}$$

Dla $n = 1,2,\ldots,k$ otrzymujemy stąd układ k równań algebraicznych, liniowych względem nieznanych funkcji $r_n(z_n)$. Układ ten przedstawia się następująco

$$r_1(z_1) = \frac{K_1 s^4}{s^4+\beta_1^4}\,\bar{Y}(z_1) + \frac{K_1 s^4}{s^4+\beta_1^4}\,\bar{Q}(z_1)$$

$$r_2(z_2) = \frac{K_2 s_4}{s^4+\beta_2^4}\,\bar{Y}(z_2) + \frac{K_2 s^4}{s^4+\beta_2^4}\,\bar{Q}(z_2) -$$

$$-\frac{\beta_2^4}{s^4+\beta_2^4}\left(r_1(z_2+l_2)h^{l_1} - r_1(z_2+l_2+a_1)\,h^{t_1}\right). \tag{2.3}$$

....

$$r_k(z_k) = \frac{K_k\, s^4}{s^4+\beta_k^4}\,\bar{Y}(z_k) + \frac{K_k\, s^4}{s^4+\beta_k^4}\,\bar{Q}(z_k) -$$

$$- \frac{\beta_k^4}{s^4+\beta_k^4}\left[\sum_{m=1}^{k-1} r_m(z_k+l_k)h^{l_m} - \sum_{m=1}^{k-1} r_m(z_k+l_k+a_m)h^{t_m}\right].$$

Po rozwiązaniu układu (2.3), uwzględniając reakcje (1.3), możemy określić w każdym z przedziałów funkcję linii ugięcia, a ze znanych zależności różniczkowych w dalszej konsekwencji siły wewnętrzne.

3. Belka ciągła spoczywająca na podporach podatnych

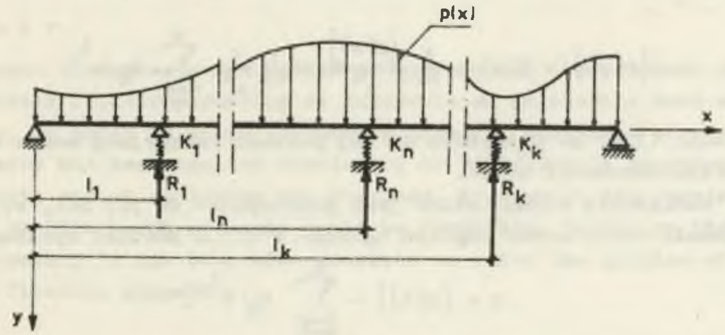
Na podstawie uzyskanego rozwiązania ogólnego bardzo łatwo można przejść do równań dla belek ciągłych (rys. 2) podpartych podatnie punktowo.

W tym celu w równaniu (1.7) należy przejść do granicy, gdy

$$a_n \longrightarrow 0 \quad \text{i} \quad r_n(x) \longrightarrow \infty$$

przy

$$\int_{l_n}^{t_n} r_n(x)dx \longrightarrow R_n.$$



Rys. 2

Z równania (1.7) otrzymujemy wtedy układ k równań zawierających k nieznanych reakcji R_m

$$\frac{K_n}{EJ}\sum_{m=1}^{n-1} R_m \frac{(l_n-l_m)^3}{3!} + R_n = K_n\, Y(l_n) + K_n\, Q(l_n) \tag{3.1}$$

dla n = 1,2,...,k.

Wykorzystano tutaj oczywistą tożsamość

$$\sum_{m=1}^{n-1}\int_0^{x-l_m} r_m(u)\frac{(x-l_m-u)^3}{3!}\,du - \sum_{m=1}^{n-1}\int_0^{x-t_m} r_m(u+a_m)\frac{(x-t_m-u)^3}{3!}\,du =$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1}\int_{l_m}^{t_m} r_m(u-l_m)\frac{(x-u)^3}{3!}\,du. \tag{3.2}$$

Podobnie jak w relacji (1.3) zakładamy liniowość

$$R_n = K_n\, y(l_n). \tag{3.3}$$

Układ równań (3.1) razem z (3.3) formalnie odpowiada spełnieniu warunków ugięć nad podporami.

Po wyznaczeniu z liniowego układu równań (3.1) nieznanych oddziaływań R_n równanie funkcji linii ugięcia belki jest określone relacją

$$\{y(x)\} = W(s) + \frac{1}{EJ}\frac{\{p(x)\}}{s^4} - \frac{1}{EJ}\frac{1}{s^4}\sum_{n=1}^{k} R_n\, h^{l_n} \tag{3.4}$$

Z relacji (3.4) po przejściu do jej postaci funkcyjnej można wyznaczać żądane przemieszczenia belki.

Jeśli obciążenie czynne belki jest prostopadłe do jej osi, to całkowite obciążenie belki można zapisać zgodnie z [1] w postaci wyrażenia

$$q = \{p(x)\} - \sum_{n=1}^{k} R_n\, h^{l_n}. \tag{3.5}$$

Siły wewnętrzne można wyznaczyć wtedy z relacji:

$$\{M(x)\} = -\frac{q}{s^2}$$

$$\{T(x)\} = -\frac{q}{s} \tag{3.6}$$

gdzie $M(x)$ jest funkcją momentu zginającego, a $T(x)$ jest funkcją siły poprzecznej. W relacji (3.5) $p(x)$ zawiera obciążenie początku i końca analizowanej belki.

LITERATURA

[1] Mikusiński J.: Rachunek operatorów, PWN, Warszawa 1957.

[2] Boblewski J., Bojda K.: Zastosowanie operatorów Mukusińskiego do zagadnień teorii konstrukcji nośnych. Mechanika Teor. i Stosowana, 2,11 (1973).

БАЛКИ, ОПИРАЮЩИЕСЯ ОТДЕЛЕНИЯМИ НА УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ

Р е з ю м е

В работе подан новый способ подхода к решению балок с постоянной жесткостью, опирающихся отделениями на упругое основание типа Винклера. Здесь использован аппарат операторов в смысле Микусиньского для решения интегральных уравнений Вольтерры II рода.

Таким образом получена конечная система уравнений, по которым определены искомые функции сопротивления грунта.

Опираясь на переход к пределу, получено тоже решение вопроса балок, опирающихся на податливые опоры.

BEAMS RESTING AT INTERVALS ON ELASTIC BASE

S u m m a r y

The paper discusses a new method of approaching the solution of beams with constant rigidity, resting at intervals on an elastic base of the Winkler type. In order to solve Volterra's integral equations of the II class an apparatus has been applied consisting of Mikusiński's operators. In this way a finite set of equations was obtained, from which the reguired functions of passive earth pressure could be developed. Basing on the approach of the boundary it has been also possible to solve the problem of beams resting on flexible supportts.