

Tadeusz SKOCZKOWSKI

Marian KALUS

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

ROZKŁAD WEWNĘTRZNYCH ŹRÓDEŁ CIEPŁA PRZY INDUKCYJNYM NAGRZEWANIU
STAŁOWYCH WSADÓW CYLINDRYCZNYCH

Streszczenie. Omówiono rozkłady wewnętrznych źródeł ciepła o maszynowych walcach i rurach ferromagnetycznych przy nagrzewaniu indukcyjnym. Pokazano proste aproksymacje funkcji opisujących źródła ciepła dla różnych etapów procesu nagrzewania.

1. Wstęp

Przy projektowaniu nagrzewnic indukcyjnych konstruktor spotyka się z dwoma podstawowymi rodzajami problemów: cieplnymi i elektromagnetycznymi.

Ostatecznym celem, do którego dąży konstruktor jest uzyskanie požądane go z technologicznego punktu widzenia rozkładu temperatur we wsadzie.

Wynikiem obliczeń cieplnych muszą być niezbędne dane wyjściowe do wyznaczenia parametrów elektrycznego schematu zastępczego nagrzewnicy. Określa się więc czas nagrzewania, moc źródła zasilania, czasami również zmianę tej mocy w czasie lub wymaganą nierównomierność okładu prądowego wzbudnika.

Proces obliczeń cieplnych polega na rozwiązywaniu równania przewodnictwa cieplnego Fouriera wraz z odpowiednimi warunkami granicznymi. Równanie to dla przypadku nagrzewania walców nieskończenie długich ma postać:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} = \frac{a}{\lambda} w(R) \quad (1)$$

gdzie:

$T(R)$ - temperatura w odległości R od osi walca,

a - współczynnik przewodzenia temperatury,

λ - przewodność cieplna,

$w(R)$ - wydajność wewnętrznych źródeł ciepła w odległości R od osi walca,

R - promień bieżący.

Równanie (1) z uwagi na nieliniowe zależności współczynników cieplnych stali od temperatury może być rozwiązane dla każdej konkretnej nagrzewnicy

cy i wsadu metodami numerycznymi, ale rozwiązanie takie nie posiada waloru wymaganego w szybkich obliczeniach inżynierskich, zwiększa koszty projektowania, a wyniki uzyskane bezpośrednio z EMC wymagają pracochłonnego opracowywania oraz zmuszają każdorazowo konstruktora do korzystania z ETO.

Rozwiązywanie równania (1) można znacznie uprościć przez podział całego procesu nagrzewania na etapy, w których właściwości fizyczne stali traktujemy jako stałe, uśrednione dla danego przedziału temperatur. Możliwe jest wtedy korzystanie z gotowych rozwiązań równania (1) opisanych np. w pracach [1, 2]. Aby można to jednak wykonywać, konieczne jest aproksymowanie funkcji opisującej rzeczywisty rozkład wewnętrznych źródeł ciepła jedną z funkcji elementarnych, np. stałą, liniową, wykładniczą, eksponencjalną, dla których w pracach [1, 2] rozwiązywane jest równanie (1). Zazwyczaj korzysta się z rozwiązania dla najprostszego przypadku rozkładu, tj. przyjmując równomierny rozkład źródła ciepła w pewnej cienkiej warstwie przy powierzchni wsadu [3]. Rozkład ten w rzeczywistości, w zależności od parametrów fizycznych stali (μ, ρ), wymiarów geometrycznych wsadu i wzbudnika oraz częstotliwości zasilania może, co zostanie pokazane poniżej, znacznie odbiegać od tak przyjętego.

Choć obliczyć rzeczywisty rozkład wewnętrznych źródeł ciepła, korzystamy z równania:

$$w(R) = \frac{j_m(R)}{2\eta} \quad (2)$$

gdzie:

$j_m(R)$ - amplituda gęstości prądów wirowych,
 η - konduktywność wsadu.

Aby znaleźć rozkład $j_m(R)$ należy uprzednio rozwiązać równanie pola elektromagnetycznego (3). Rozwiązanie takie dla nieskończonego długości wsadów walcowych i rurowych przedstawiono np. w pracy [4].

$$\frac{d^2 \underline{H}_m(R)}{dR^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{d \underline{H}_m}{dR} - j\omega \mu_0 \mu \eta \underline{H}_m = 0 \quad (3)$$

gdzie:

$\underline{H}_m(R)$ - zespolona amplituda natężenia pola magnetycznego w odległości R od osi walców,
 $\omega = 2\pi f$ - pulsacja źródła zasilania,
 $\mu_0 \mu$ - przenikalność magnetyczna wsadu.

2. Nagrzewanie walców masywnych

W zależności od zmian właściwości magnetycznych stali w przekroju wsadu celowy jest podział procesu nagrzewania indukcyjnego na następujące etapy: zimny, pośredni i gorący.

W etapie zimnym nakładamy, że cały wsad ma właściwości ferromagnetyczne, a $\mu = f(R)$ dla każdego punktu przekroju może być określona z przyjętej krzywej magnesowania stali. Rezystywność wsadu jest w przybliżeniu stała, obliczana zazwyczaj dla temperatury początkowej nagrzewania, tj. około 20°C. Przy silnym efekcie powierzchniowym krzywiznę powierzchni walcowej można pominąć i posłużyć się rozwiązaniem dla fali płaskiej. Według pracy [5] rozkład gęstości prądów wirowych jest liniowy i opisany zależnością:

$$\delta_m = \begin{cases} \delta_{me} \left(1 - \frac{R_2 - R}{x_1}\right) & R_2 \geq R \geq R_2 - x_1 \\ 0 & R_2 - x_1 \geq R \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

gdzie:

- δ_{me} - amplituda gęstości prądów wirowych na powierzchni cylindra,
- R_2 - promień zewnętrzny cylindra,
- x_1 - odległość od powierzchni cylindra do tej warstwy metalu, gdzie gęstość prądu wynosi 0.

$$x_1 = \frac{g(s)}{\Delta_0}$$

gdzie:

$$\Delta_0 = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \mu \eta}}$$

$g(s)$ - pewna funkcja.

Δ_0 - głębokość wnikania obliczona dla $\mu = \mu_0$ na powierzchni cylindra; s - wykładnik funkcji aproksymującej rzeczywistą krzywą magnesowania $B = k \cdot H^{\frac{1}{s}}$. Dla $s \rightarrow \infty$, otrzymujemy $x_1 = 1,46 \Delta_0$.

Wzór (4) jest prawdziwy tylko dla skrajnego przypadku $x_1 \ll R_2$. Rozwiązując jednak równanie fali elektromagnetycznej walcowej (3) przy założeniu, że $x_1 = R$ (drugi skrajny przypadek) z obowiązującą wtedy zależnością zmiany μ na przekroju wg zależności otrzymanej w pracy [6]:

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{R}{R_2}\right)^2 \quad (5)$$

otrzymujemy:

$$\delta_m = \delta_{me} \left(\frac{R}{R_2}\right)^{\frac{s+1}{s-1}} \quad (6)$$

Łatwo pokazać, że dla $s \rightarrow \infty$ wzór (6) stanowi szczególny przypadek wzoru (4) dla $x_1 = R_2$. Ponieważ dla dwóch granicznych wartości x_1 , tj. $x_1 \ll R_2$ i $x_1 = R_2$, otrzymaliśmy liniowy rozkład gęstości prądu, nie należy się spodziewać, że dla pośrednich wartości x_1 rozkład ten będzie się znacznie różnił od liniowego. Obliczamy moc powierzchniową przypadającą na jednostkę długości wsadu:

$$P_0 = \frac{1}{2\pi R_2} \int_{R_2 - x_1}^{R_2} j_m^2(R) R dR \quad (7)$$

Po podstawieniu do równania (7) zależności (4) mamy:

$$P_0 = \frac{j_m^2 x_1}{6\eta} \left(1 - \frac{x_1}{4R_2}\right) \quad (8)$$

Wprowadzając bezwymiarową wielkość $\alpha = 1 - \frac{x_1}{R}$ i względny promień $B = \frac{R}{R_2}$ otrzymujemy:

$$w(\alpha, B) = \begin{cases} \frac{12 P_0 (B - \alpha)^2}{R(\alpha + 3)(1 - \alpha)^3} & B \geq \alpha \\ 0 & B < \alpha \end{cases} \quad (9)$$

$\alpha \in [0, 1]$

Z zależności (9) wynika, że dla walca magnetycznego rozkład wewnętrznych źródeł ciepła jest opisany funkcją kwadratową.

Etap przejściowy charakteryzuje się tym, że powierzchnia wsadu jest jeszcze nagrzana poniżej punktu Curie (dla większości stali przyjmujemy $T_c = 750^\circ\text{C}$), ale z uwagi na znaczny gradient temperatury rezystywność należałoby traktować jako funkcję współrzędnej R , tj. $\rho = \rho(R)$. Rezystywność na głębokości $(1,5 - 2) \Delta e$ zmienia się dwukrotnie, co jest nieproporcjonalne ze zmianą μ , która rośnie na takiej głębokości setki a nawet tysiące razy. W praktyce przyjmuje się więc stałą rezystywność na przekroju walca, a jej wartość oblicza się dla $T = 600 - 650^\circ\text{C}$, $\rho_2 = (6,0 - 6,5) \cdot 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$. Uwzględnienie zmiany μ jest znacznie trudniejsze, a obliczenia dokładne wręcz niemożliwe [6]. Przyjmuje się więc, co zapewnia dostateczną dokładność obliczeń cieplnych, że źródła ciepła są rozłożone równomiernie w pewnej warstwie aktywnej ξ . Grubość warstwy można obliczyć ze wzoru podanego w pracy [6]:

$$\xi = \frac{\Delta e}{f_1(s)} \quad (10)$$

$$f_1(s) = \frac{4s}{\sqrt{8s(3s+1)^2(s+1)}} \quad (11)$$

Dla $s \rightarrow \infty$ otrzymamy $\xi = 1,37 \Delta e$.

Rozkład wewnętrznych źródeł ciepła w stanie przejściowym opisany jest więc zależnością:

$$w(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{p_0}{R} \frac{1}{1 - \alpha^2} & \alpha < \beta \leq 1 \\ 0 & 0 \leq \beta \leq \alpha \end{cases} \quad (12)$$

gdzie $\alpha = 1 - \frac{\beta}{R_2}$,

W stanie gorącym zewnętrzna warstwa wsadu jest nagrzana powyżej punktu Curie, warstwy głębsze zachowują własności magnetyczne. Praktycznie jednak już dla grubości warstwy niemagnetycznej większej niż $2\Delta_k$, gdzie Δ_k jest głębokością wnikania prądu obłożoną dla $\mu = 1$, można przyjmować, że cały wsad jest niemagnetyczny. Rzeczywisty rozkład wewnętrznych źródeł ciepła dla walca niemagnetycznego można opisać równaniem:

$$w(m, \beta) = \frac{2m (\text{ber}'^2 \beta_m + \text{bei}'^2 \beta_m)}{\text{ber } m \text{ber}' m + \text{bei } m \text{bei}' m} \quad (13)$$

gdzie:

$$m = \frac{\sqrt{2} R_2}{\Delta_k}$$

$$\Delta_k = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \eta}}$$

$$\beta = \frac{R}{R_2}$$

ber, bei, ber', bei' - funkcje Thompsona i ich pochodne.

Funkcję (13) można aproksymować funkcją o postaci:

$$w(R) = w_0 \left(\frac{R}{R_2} \right)^n \quad (14)$$

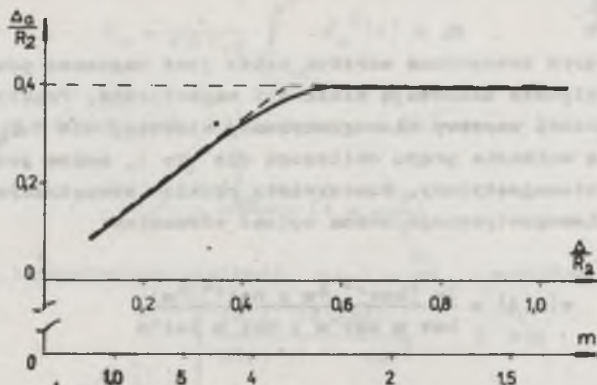
Należy znaleźć zależność wykładnika n od wymiarów geometrycznych, fizycznych właściwości wsadu i parametrów nagrzewania. W tym celu określimy głębokość Δ_a warstwy aktywnej, w której wydziela się 86,5% całej mocy generowanej we wsadzie:

$$\int_{R_2 - \Delta_a}^{R_2} 2\pi R w(R) dR = 0,865 \int_0^{R_2} 2\pi R w(R) dR \quad (15)$$

Wynik rozwiązania równania (15) dla wydajności $w(R)$ opisanych wzorem (13) pokazany jest na rys. 1. Rozwiązując to samo równanie (15) przy $w(R)$

opisanych wzorem aproksymującym (14) otrzymuje się zależność wykładnika n od głębokości Δ_a i promienia walca R_2 :

$$n = \frac{\lg 0,135}{\lg \left(1 - \frac{\Delta_a}{R_2}\right)} - 2 \quad (16)$$



Rys. 1. Zależność względnej grubości warstwy aktywnej od parametru m

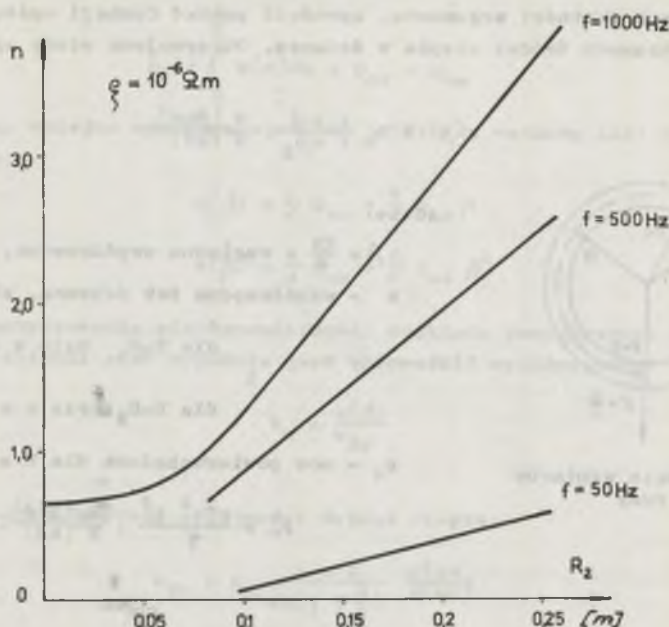
Z przebiegu krzywej na rys. 1 widać, że może być ona aproksymowana dwu-odcinkowo:

$$\frac{\Delta_a}{R_2} = \begin{cases} 0,85 \frac{\Delta}{R_2} & 0 \leq \frac{\Delta}{R_2} \leq \frac{1}{2} \\ 0,394 & \frac{\Delta}{R_2} > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (17)$$

Równanie (16) z wykorzystaniem wzorów (17) można zapisać w postaci:

$$n = \frac{\lg 0,135}{\lg \left(1 - \frac{1,2}{n}\right)} - 2 \quad (18)$$

Korzystając ze wzoru (18) otrzymujemy dla przypadku nagrzewania głębokościowego ($m_2 \rightarrow \infty$) $n=2$, przy nagrzewaniu powierzchniowym ($m_2 \rightarrow \infty$) $n \rightarrow \infty$. Obie otrzymane wartości n dobrze odpowiadają fizycznej stronie zjawiska. Wyniki rozwiązania równania (18) dla różnych częstotliwości pokazano na rys. 2. Równanie (18) może być oczywiście wykorzystywane również w przypadku nagrzewania wsadów wykonanych z materiałów niemagnetycznych.



Rys. 2. Wartość składnika n dla różnych częstotliwości nagrzewania

3. Nagrzewanie rur

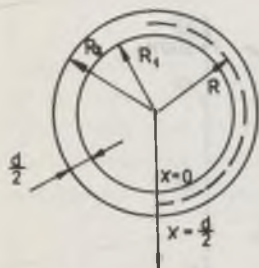
Przy nagrzewaniu rur rozkład wewnętrznych źródeł ciepła, z uwagi na złożony rozkład pola magnetycznego, jest znacznie bardziej skomplikowany niż przy nagrzewaniu pełnych wsadów cylindrycznych. Przy nagrzewaniu rur stalowych powyżej punktu Curie w dwóch początkowych etapach nagrzewania, tj. zimnym i przejściowym, głębokość wnikania prądu jest zawsze znacznie mniejsza niż grubość ścianki rury i do obliczeń można wykorzystać wzory dla walca pełnego (wzory (9) i (12)). Dla rur w stanie niemagnetycznym rozkład źródeł ciepła zależy od dwóch wielkości: $kd = \frac{d}{\Delta_k}$ - stosunku podwójnej grubości ścianki d do głębokości wnikania prądu Δ_k i $\xi = \frac{d}{2R_1}$ - stosunku grubości ścianki do wewnętrznego promienia rury. Zakres zmian tych wielkości dla typowych rur i poprawnie wybranej częstotliwości prądu jest dość wąski:

$$0,07 < \xi < 0,12$$

$$0,5 < kd < 2$$

Dla tego zakresu zmian ϵ i kd można, stosując rozwinięcie funkcji Bessela dla dużych wartości argumentu, uprościć postać funkcji opisujących rozkład wewnętrznych źródeł ciepła w ścianie. Otrzymujemy wtedy wg pracy [4]:

$$w(\beta) = p_0 \frac{1 + \epsilon}{1 + \beta \epsilon} \frac{M(\beta kd)}{M(kd)} \quad (19)$$



Rys. 3. Szkic wymiarów rury

gdzie:

$$\beta = \frac{2x}{d} - \text{względna współrzędna,}$$

x - współrzędna tak dobrana, aby:

$$\text{dla } R=R_1 \text{ było } x = 0$$

1

$$\text{dla } R=R_2 \text{ było } x = \frac{d}{2}, \text{ (rys.3)}$$

p_0 - moc powierzchniowa dla $R = R_2$,

$$p_0 = \frac{o^2 z^2 I^2}{\eta} \cdot \frac{M(\beta kd)}{N(kd)},$$

$$M(\beta kd) = \text{ch}(\beta kd) - \cos(\beta kd) + \frac{(kd)^2}{8\epsilon} [\text{ch}(\beta kd) + \cos(\beta kd)] + \\ + \frac{kd}{2} [\text{sh}(\beta kd) + \sin(\beta kd)]$$

$$N(kd) = \text{ch}(kd) + \cos(kd) + \frac{(kd)^2}{8\epsilon} [\text{ch}(kd) - \cos(kd)] + \\ + \frac{kd}{2} [\text{sh}(kd) - \sin(kd)],$$

o - stała liczbowa,

z - liczba zwojów wzbudnika,

I - wartość skuteczna prądu wzbudnika,

η - konduktywność wosadu.

Rozkład (19) może być aproksymowany następująco:

prostą

$$w(\beta) = A_L p_{00} + B_L p_{0e} \beta \quad (20)$$

lub parabolą

$$w(\beta) = A_P p_{00} + B_P p_{0e} \beta^2 \quad (21)$$

gdzie:

p_{00}, p_{0e} - współczynniki stałe, mające wymiar mocy powierzchniowej.

Stałe A_L , B_L , A_p , B_p można wyliczyć z warunku:

$$p_o = \int_0^{\frac{d}{2}} w(x) dx = p_{oo} + p_{oe} \quad (22)$$

Podstawiając kolejno aproksymacje (20) i (21) do warunku (22) otrzymujemy odpowiednio:

$$w(\beta) = \frac{2}{d} p_{oo} + \frac{4}{d} p_{oe} \beta \quad (23)$$

$$w(\beta) = \frac{2}{d} p_{oo} + \frac{6}{d} p_{oe} \beta^2 \quad (24)$$

W celu zobrazowania nierównomierności rozkładu wewnętrznych źródeł ciepła wzdłuż ścianki rury wygodnie jest wprowadzić współczynnik:

$$k_w = \frac{w(\beta)}{w_{sr}} \quad (25)$$

gdzie:

w_{sr} - średnia wartość wydajności źródeł ciepła,

$$w_{sr} = p_o \frac{1 + \xi}{kd(1 + \frac{\xi}{2})} \frac{Q(kd)}{M(kd)}$$

$$Q(kd) = \text{sh}(kd) - \sin(kd) + \frac{(kd)^2}{8\xi^2} [\text{sh}(kd) + \sin(kd)] +$$

$$+ \frac{kd}{2\xi} [\text{ch}(kd) - \cos(kd)] \quad (26)$$

Dla rzeczywistego rozkładu (19) otrzymujemy przy zastosowaniu aproksymacji:

linią prostą $k_{wL} = 1 - \frac{1}{2} F(kd) + F(kd) \beta$

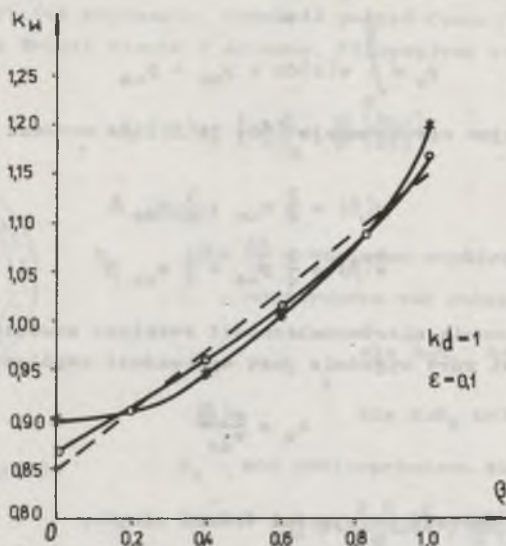
parabolą $k_{wp} = 1 - \frac{1}{3} F(kd) + F(kd) \beta^2 \quad (27)$

gdzie:

$$F(kd) = k_w(1) - k_w(0) = \frac{kd(1 + \frac{\xi}{2})}{Q(kd)} \left[\frac{M(kd)}{1 + \xi} - \frac{(kd)^2}{4\xi^2} \right] \quad (28)$$

Wartość współczynników p_{oo} , p_{oe} w równaniach (20), (21) otrzymuje się po podstawieniu wzorów (23), (24) do wzoru (25) i obliczeniu wartości $k_w(\beta)$ dla $\beta = 0$ i $\beta = 1$.

Rozkład wewnętrznych źródeł ciepła przy aproksymacji liniowej i parabolicznej dla $kd = 1$ i $\xi = 0,1$ pokazano na rys. 4. Zaleca się stosować aproksymację liniową dla $kd < 1,25$ - błąd nie przekracza 5%, a dla $kd \geq 1,25$ aproksymację paraboliczną, przy błędzie ok. 3%.



Rys. 4. Rozkład wewnętrznych źródeł ciepła dla rury przy aproksymacji liniowej i parabolicznej

Dla $k_d > 2$ aproksymacja paraboliczna wprowadza duże błędy i funkcję rzeczywistą należałoby aproksymować wielomianem wyższego rzędu. W praktyce nie stosuje się jednak częstotliwości, dla których $k_d > 2$.

4. Wnioski

1. Rozkład wewnętrznych źródeł ciepła w zależności od wymiarów geometrycznych wsadu, etapu nagrzewania i częstości źródła zasilania może znacznie odbiegać od rozkładu równomiernego.
2. Przy nagrzewaniu wsadów cylindrycznych ferromagnetycznych wewnętrzne źródła ciepła są rozłożone parabolicznie (równanie (9)).
3. Dla wsadów niemagnetycznych można stosować prosty rozkład wykładniczy (14). Równanie (18) w prosty sposób pozwala obliczyć wykładnik n dla danych warunków nagrzewania i parametrów wsadu.
4. Z uwagi na czas trwania stanu gorącego (ok. 70% czasu całego procesu nagrzewania) i wynikające z tego najczęstsze przeprowadzanie obliczeń elektrycznych nagrzewnicy dla tego właśnie stanu, równanie (14) jest najczęściej stosowane w praktyce.
5. Wprowadzenie współczynnika nierównomierności rozkładu wewnętrznych źródeł ciepła k_w dla rury pozwala w prosty sposób obliczyć rozkład rzeczywisty, a otrzymane dokładności przy aproksymacji liniowej lub parabolicznej są wystarczające do obliczeń cieplnych.

6. Równania opisujące rozkład wewnętrznych źródeł ciepła w każdym z trzech etapów mają postać umożliwiającą proste rozwiązanie równania przewodnictwa cieplnego Fouriera (1).

LITERATURA

- [1] Łykov A.W.: Teoria ciepłowodności. Izd. Wyższa Szkoła. Moskwa, 1967.
- [2] Carslow H.S., Jaeger J.C.: Conduction of Heat in Solids. Oxford University Press, Oxford 1959.
- [3] Schwartz T.: Termokinetyka układów elektrotermicznych. WNT, Warszawa 1966.
- [4] Rodygin N.M.: Indukcyjny nagrzew stalnych izdzielij tokami promyslennoj ozastoty. Metallurgizdat, Moskwa 1959.
- [5] Pawłow N.A., Słuchockij A.E.: Rasozot raspredielenija tiemperatury po sieczeniju oylindriozeskich obrazcow pri indukcyjnom nagriewie. IZW Energietika nr 6, 1965.
- [6] Słuchockij A.E.; Ryskin S.E.: Induktory dla indukcyjnego nagriewa. Energija, Leningrad 1974.

Artykuł opracowano w ramach badań grupy tematycznej nr 1 (teoria pola), Podproblemu Węzłowego 05.5A pt. "Wybrane podstawowe badania w dziedzinie elektrotechniki" wchodzącego w skład problemu węzłowego 05.5 pt. "Rozwój podzespołów i urządzeń elektrotechnicznych".

Recenzent: doc. dr hab. inż. Kazimierz Zakrzewski

Wpłynęło do redakcji dn. 28.V.1982 r.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА
ПРИ ИНДУКЦИОННОМ НАГРЕВЕ СТАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ШИХТ

Р е з ю м е

В статье показаны распределения внутренних источников тепла в массивных цилиндрах и ферромагнитных трубах при индукционном нагреве. Показаны простые аппроксимации функций представляющих источники тепла для разных этапов нагревательного процесса.

DISTRIBUTIONS OF INTERNAL HEAT SOURCES IN INDUCTION HEATING OF FERROMAGNETIC CYLINDRICAL BODIES

Summary

In the article the problem of finding simple approximations of functions describing internal heat sources generated in ferromagnetic bodies is considered. The heating cycle has been divided into three periods with constant physical coefficients and for each of these a simplified function has been found. The cases of pipe and cylindrical billet are considered.