

Andrzej KULESZA

Instytut Podstawowych Problemów  
Elektrotechniki i Energoelektroniki  
Politechniki Śląskiej

CZASOPTYMALNE STEROWANIE MOMENTEM ELEKTROMAGNETYCZNYM  
SILNIKA ASYNCHRONICZNEGO KLATKOWEGO

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono metodę zastosowania zasady optymalności do wyznaczenia czasooptymalnego sterowania momentem elektromagnetycznym silnika asynchronicznego klatkowego. Zamieszczono wyniki obliczeń optymalizacyjnych sterowania i obliczeń symulacyjnych przebiegów czasowych momentu.

1. Sterowanie silnika asynchronicznego klatkowego według zasady optymalności

Zasada optymalności Bellmana znana jest w literaturze jako podstawa funkcjonalnego równania Bellmana. Najprostsze sformułowanie zasady optymalności mówi: "ostatni odcinek trajektorii optymalnej jest trajektorią optymalną".

Zgodnie ze sformułowaną zasadą, niezależnie od tego, za pomocą jakiego sterowania został osiągnięty punkt pośredni, sterowanie na ostatnim odcinku trajektorii powinno być obrane optymalnie dla tego odcinka. Proste i intuicyjne oczywiste ujęcie zasady optymalności może służyć do bezpośredniego wyznaczenia optymalnego sterowania silnika asynchronicznego klatkowego.

Stan elektromagnetyczny silnika asynchronicznego klatkowego jest opisany układem równań różniczkowych [2]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_{1x}}{dt} &= -a_{11} i_{1x} + \alpha_{11} i_{1y} + a_{13} \psi_{2x} + b_{11} \gamma_x \\ \frac{di_{1y}}{dt} &= -\alpha_{11} i_{1x} + a_{22} i_{1y} + a_{23} \psi_{2x} + b_{22} \gamma_y \\ \frac{d\psi_{2x}}{dt} &= a_{13} i_{1x} + a_{33} \psi_{2x} \end{aligned} \right\} (1)$$

Wielkości fizyczne w układzie równań (1) oraz równaniach (2) i (3) wyrażono w jednostkach względnych, przyjmując jednostki odniesienia określone w pracy [2]. Również w pracy [2] podano znaczenie współczynników występujących w równaniach opisujących stan elektromagnetyczny i elektromechaniczny silnika asynchronicznego.

Występująca w równaniach wartość względna częstotliwości  $\alpha$  jest sumą wartości względnych: prędkości kątowej  $\omega$  i poślizgu  $\beta$ ; określa ją zależność (2):

$$\alpha = \omega + k_2 r_2 \frac{i_{1y}}{\Phi_{2x}} \quad (2)$$

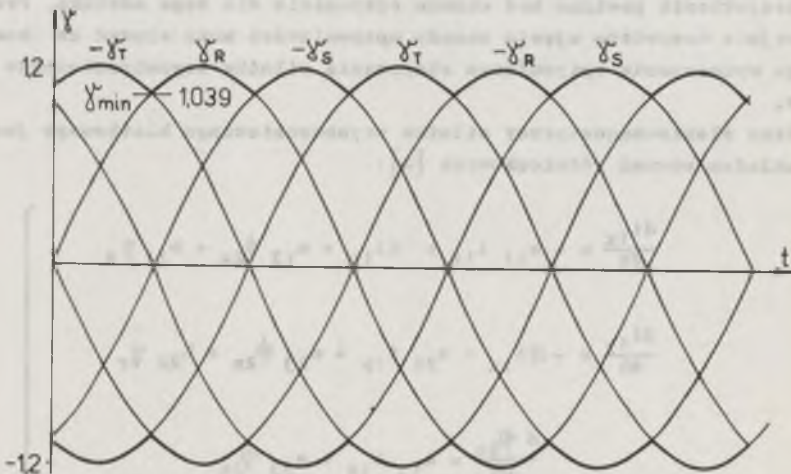
Moment elektromagnetyczny  $\mu$  jest określony jako iloczyn prądu  $i_{1y}$  i strumienia skojarzonego  $\Phi_{2x}$ :

$$\mu = k_2 \Phi_{2x} i_{1y} \quad (3)$$

Przyjmuje się, że:

- silnik jest zasilany z trójfazowej sieci o napięciu  $\gamma = \gamma_{\max} = 1.2$ , co oznacza, że amplituda napięcia sieci jest o 20% większa od amplitudy znamionowej napięcia silnika,
- istnieje możliwość zasilania uzwojenia każdej fazy stojana silnika z tej fazy sieci, której napięcie jest w danej chwili najwyższe, a uzwojenie może zostać przyłączone do sieci z dowolną biegunowością.

Wykres przebiegów osazowych napięć fazowych sieci zasilającej przedstawia rys. 1.



Rys. 1. Wykres przebiegów osazowych napięć fazowych

Opisany sposób zasilania silnika asynchronicznego oznacza wykorzystanie jedynie dodatniej i ujemnej obwiedni krzywych chwilowych napięć fazowych. Do realizacji takiego sposobu zasilania służy bezpośredni przemiennik częstotliwości o wymuszonej komutacji. Ponieważ różnica pomiędzy maksymalną wartością (w jednostkach względnych) napięcia obwiedni  $\gamma_{\max} = 1,2$  i minimalną  $\gamma_{\min} = 1,039$  jest niewielka, można pomijając chwilowy charakter obwiedni napięć przyjąć, że uzwojenie silnika jest zasilane napięciem stałym, którego wartość jest równa wartości średniej napięcia obwiedni  $\bar{\gamma} = \pm 1,146$ . Oznacza to, że rozwiązaniem technicznym takiego sposobu zasilania jest przemiennik częstotliwości z pośredniczącym obwodem napięcia stałego.

Z punktu widzenia proponowanego sposobu sterowania obydwa rozwiązania techniczne przy przyjętych jednakowych wartościach napięcia prowadzą do zbliżonych rezultatów.

Napięcie osiowe  $\gamma_x$  i  $\gamma_y$  wyznacza się z napięć fazowych  $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C$  za pomocą odwrotnej transformacji Parka:

$$\gamma = N^{-1}(\varphi) \gamma_f \quad (4)$$

przy czym:

$\gamma$  - wektor napięć osiowych,  $\gamma = [\gamma_x, \gamma_y]^T$ ,

$\gamma_f$  - wektor napięć fazowych,  $\gamma_f = [\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C]^T$ ,

$N^{-1}(\varphi)$  - macierz odwrotnej transformacji Parka,

$$N^{-1}(\varphi) = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\alpha t + \varphi_0), & \cos(\alpha t + \varphi_0 - \frac{2\pi}{3}), & \cos(\alpha t + \varphi_0 + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\alpha t + \varphi_0), & (\sin(\alpha t + \varphi_0 - \frac{2\pi}{3}), & -\sin(\alpha t + \varphi_0 + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$\varphi_0$  - kąt, jaki tworzy oś x (wektor strumienia  $\psi_2$ ) układu współrzędnych XOY z osią fazy A stojana w chwili  $t = 0$ .

Ponieważ każde z trzech napięć fazowych:  $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C$  może w dowolnej chwili przyjmować dwie różne wartości  $\gamma = \pm 1,146$ , liczba różnych wektorów napięć  $\gamma$  jest równa  $2^3 = 8$ .

Wszystkie przypadki wektorów napięć osiowych  $\gamma$  dla dowolnej kombinacji napięć fazowych, w danej chwili  $t$  i przy określonym kącie  $\varphi_0$  zawiera tabela 1.

Tabela 1

$\gamma$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$	$\gamma_7$	$\gamma_8$
$\gamma_A$	+1,146	+1,146	+1,146	+1,146	-1,146	-1,146	-1,146	-1,146
$\gamma_B$	+1,146	+1,146	-1,146	-1,146	+1,146	+1,146	-1,146	-1,146
$\gamma_C$	+1,146	-1,146	+1,146	-1,146	+1,146	-1,146	+1,146	-1,146

Napięcie osiowe  $\mathcal{U}_k$  zamieszczone w tabeli 1 wyznacza się z zależności (6):

$$\mathcal{U}_k = |N|^{-1}(\varphi) \mathcal{U}_{fk} \quad k = 1, 2, \dots, 8 \quad (6)$$

Najmniejszy przedział czasu  $\Delta t$ , po którym może nastąpić zmiana sterowania, określono przyjmując  $\Delta t = 10 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ .

Przedziałowi czasu  $\Delta t = 10 \mu\text{s}$  odpowiada maksymalna częstotliwość przełączeń  $f_{\max} = 10^5 \text{ Hz} = 100 \text{ kHz}$ .

Przyjęta wartość maksymalnej częstotliwości przełączeń  $f_{\max}$  (odpowiadająca przedziałowi czasu  $\Delta t$ ) w obecnym stanie rozwoju elementów i układów energoelektronicznych nie jest realizowalna praktycznie. Przyjęcie częstotliwości  $f_{\max}$  o rząd wielkości większej od częstotliwości osiągniętych w praktycznych rozwiązaniach falowników (o mocy odpowiadającej przyjętemu silnikowi) ma na celu jedynie określenie granicy jakości sterowania, do której mogą dążyć układy napędowe z silnikiem asynchronicznym klatkowym. Przyjęty został wskaźnik jakości sterowania w postaci całki modułu różnicy wartości chwilowej momentu elektromagnetycznego i jego wartości zadanej:

$$Q = \int_n^{(n+1)\Delta t} |\mu^* - \mu| dt \quad (7)$$

Obliczenia sterowania optymalnego w sensie minimalizacji wskaźnika jakości (7), przy przyjętych uprzednio założeniach dotyczących rozwiązania układu zasilania i jego parametrów  $\mathcal{U}_{\max}$  i  $f_{\max}$ , przeprowadzono zakładając:

- parametry przyjętego w pracy [2] silnika asynchronicznego,
- znamionowe warunki początkowe prądu  $i_{1x}$  i strumienia  $\psi_2$ :

$$i_{1x}(0) = i_{1xN}$$

$$\psi_2(0) = \psi_{2N}$$

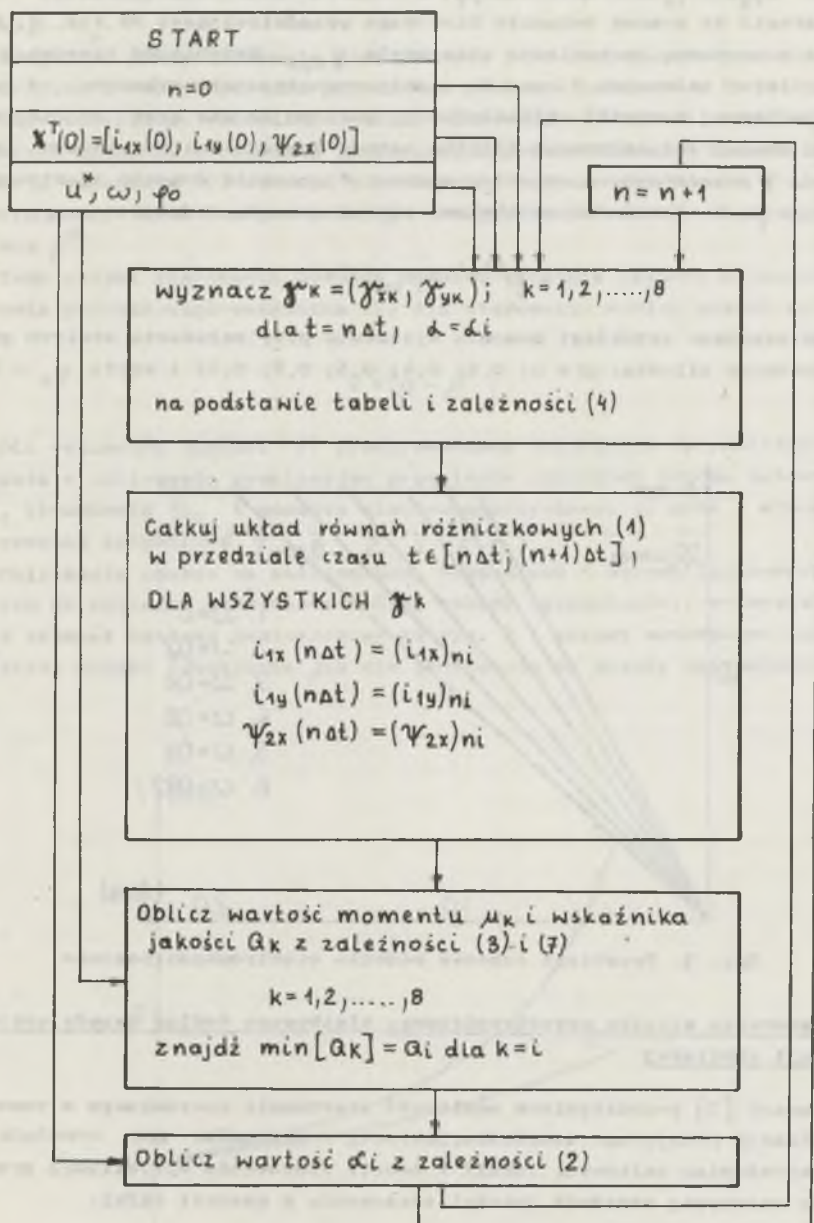
- zerowy warunek początkowy prądu  $i_{1y}$ :

$$i_{1y}(0) = 0$$

- skokowy sygnał momentu zadanego  $\mu^*$  o maksymalnej wartości:

$$\mu^*(t) = \mu_{\max} 1(t)$$

- stałą prędkość kątową silnika  $\omega$ .

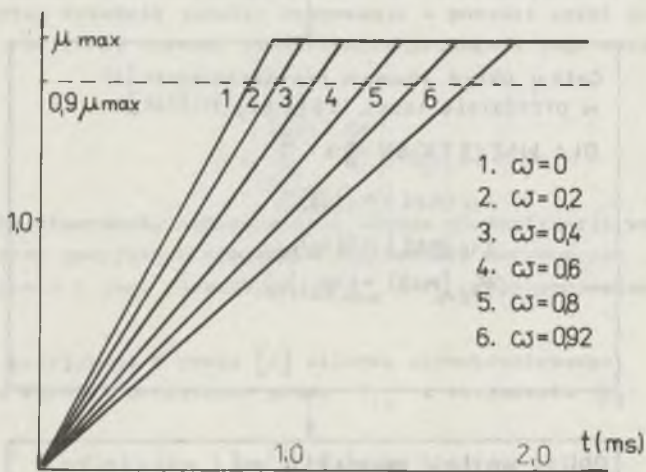


Rys. 2. Schemat blokowy obliczeń

Tok obliczeń optymalnego sterowania  $\mathcal{J}_k = \mathcal{J}_{opt}$ , przebiegów czasowych prądów  $i_{1x}$ ,  $i_{1y}$ , strumienia  $\psi_2$  i momentu elektromagnetycznego można przedstawić za pomocą schematu blokowego przedstawionego na rys. 2. Obliczenia numeryczne optymalnego sterowania  $\mathcal{J}_{opt}$ , przebiegów czasowych poszczególnych zmiennych i momentu elektromagnetycznego wykonano za pomocą elektronicznej techniki obliczeniowej, posługując się przy rozwiązywaniu układu równań różniczkowych silnika metodą Rungego-Kutty wyższego rzędu. Na rys. 3 przedstawiono przebieg czasowy formowania momentu elektromagnetycznego  $\mu$  w odpowiedzi na skokowy sygnał momentu zadanego:

$$\mu^*(t) = \mu_{max} 1(t)$$

Zamieszczone przebiegi momentu wyliczono przy założeniu stałych prędkości kątowych silnika:  $\omega = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 0,92$  i kącie  $\varphi_0 = 0$ .



Rys. 3. Przebiegi czasowe momentu elektromagnetycznego

## 2. Sterowanie silnika asynchronicznego klatkowego według zasady optymalizacji chwilowej

W pracy [3] przedstawiono możliwość sterowania optymalnego w sensie minimalizacji przyjętego wskaźnika, jakości, w przypadku gdy wskaźnik nie jest wyrażeniem całkowym. Jeżeli w teorii sterowania optymalnego przyjmuje się zazwyczaj wskaźnik jakości sterowania w postaci całki:

$$Q = \int_{t_0}^{t_k} f_0(x, u) dt \quad (8)$$

to zasada optymalizacji chwilowej stawia zadanie poszukiwania sterowania  $u(t)$ , które nie minimalizuje wartości całki (8), lecz chwilową wartość funkcji  $f_0$ .

W ogólnym przypadku takie postępowanie jest podporządkowane chwilowym korzyściom i nie uwzględnia globalnego efektu sterowania.

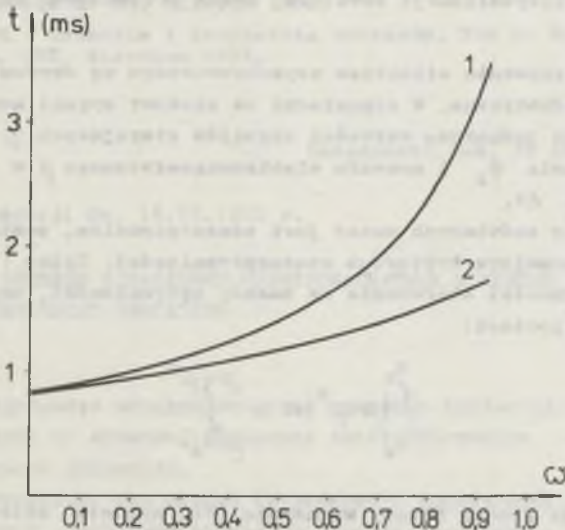
Dla konkretnego wskaźnika jakości sterowania (7) można oczekiwać zachęcających wyników, ponieważ z praktycznego punktu widzenia żądanie minimalizacji wskaźnika (7) oznacza poszukiwanie takiego sterowania  $\gamma(t)$ , przy którym moment elektromagnetyczny  $\mu$  w najkrótszym czasie osiągnie wartość zadaną  $\mu^*$ .

Temu celowi sterowania podlega również wskaźnik jakości w postaci wyrażenia podcałkowego wskaźnika (7) dla sterowania według zasady optymalności:

$$Q = |\mu - \mu^*| \quad (9)$$

Dla wskaźnika jakości (9) przeprowadzono obliczenia optymalizacyjne sterowania i obliczenia symulacyjne przebiegów czasowych prądów osiowych  $i_{1x}$ ,  $i_{1y}$ , strumienia  $\psi_2$  i momentu elektromagnetycznego  $\mu$  przy wyznaczonym sterowaniu optymalnym  $\gamma_{opt}$ .

Obliczenia oparto na założeniach, równaniach i danych liczbowych przyjętych do obliczeń sterowania według zasady optymalności; wykorzystano również schemat blokowy zamieszczony na rys. 2 i metody numeryczne obliczeń. Uzyskano wyniki identyczne jak dla sterowania wg zasady optymalności.



Rys. 4. Zależność czasu formowania momentu od prędkości kątowej

Na rys. 4 przedstawiono zależność czasu  $t_{\mu}$  formowania momentu elektromagnetycznego (zdefiniowanego w pracy [2]) od prędkości kątowej  $\omega$ . Czas formowania  $t_{\mu}$  silnie zależy od prędkości kątowej silnika, przy której zachodzi formowanie. Czas  $t_{\mu}$  zmienia się od 0,82 ms przy  $\omega = 0$  do 1,70 ms przy  $\omega = 0,92$ . Krzywa 1 na rys. 4 dotyczy sterowania za pomocą sprzężeń zwrotnych od zmiennych stanu [2], krzywa 2 sterowania według zasady optymalności i zasady optymalizacji chwilowej.

Czasy formowania momentu  $t_{\mu}$  przy małych prędkościach  $\omega$  mają podobne wartości dla obu wariantów sterowania. Przy prędkościach bliskich wartości znamionowej czas formowania momentu w układzie przedstawionym w pracy [2] jest około dwukrotnie większy od czasu uzyskanego w układzie sterowania wg zasady optymalności. Źródłem tak poważnych różnic są napięcia fazowe zasilające silniki, w pierwszym przypadku napięcie sinusoidalne o amplitudzie  $\gamma = 1,2$ , w drugim zaś napięcia stałe o wartości  $\gamma_{sr} = \pm 1,146$ , lub obwiednie sinusoidalnych napięć trójfazowych o amplitudzie  $\gamma_{max} = 1,2$ . Uwzględniając fakt, że sygnał napięciowy sterujący momentem w stanach przejściowych jest różnicą napięcia zasilającego silnik i siły elektromotorycznej można ocenić, że w drugim przypadku, w zakresie prędkości zbliżonych do wartości znamionowej, formowanie momentu zachodzi pod wpływem sygnału o wartości co najmniej dwukrotnie większej.

### 3. Podsumowanie

Na podstawie wyników uzyskanych na drodze modelowania cyfrowego układów sterowania silnika asynchronicznego klatkowego według zasady optymalności i zasady optymalizacji chwilowej można sformułować następujące wnioski:

1. Rezultaty sterowania silnikiem asynchronicznym wg obydwu zasad optymalizacji są identyczne. W odpowiedzi na skokowy sygnał momentu zadanego  $\mu^*$ , uzyskano jednakowe wartości sygnałów sterujących  $\gamma$ , prądów  $i_{1x}$ ,  $i_{1y}$ , strumienia  $\psi_2$  i momentu elektromagnetycznego  $\mu$  w każdym przedziale czasu  $\Delta t$ .
2. Sterowanie wg omówionych zasad jest czasooptymalne, pomimo że nie jest oparte na formalnym kryterium czasooptymalności. Całkę (7) stanowiącą funkcjonal jakości sterowania wg zasady optymalności, można przedstawić w innej postaci:

$$\int_{t_0}^{t_k} |\mu - \mu^*| dt = \int_{\mu(t_0)}^{\mu} dt \quad (10)$$

Minimalizacja prawej strony wyrażenia (10) oznacza sterowanie czasooptymalne.



3. Jak wykazały badania symulacyjne, sterowanie optymalne wg przyjętych kryteriów w stanie przejściowym (podczas formowania momentu od wartości  $\mu = 0$  do  $\mu = \mu^* = \mu_{\max}$ ) pozostaje stałe. Pierwsza zmiana sterowania (pierwsze połączenie) następuje po przekroczeniu przez moment wartości zadanej.  
Stałe sterowanie przy formowaniu momentu, uzyskane w rozpatrywanym przypadku jest stanem szczególnym związanym z przyjęciem warunku początkowego:  $\varphi_0 = 0$ .
4. Układ realizujący opisane sterowanie w stanie ustalonym utrzymuje zadaną wartość momentu  $\mu = \mu^* = \mu_{\max}$  z błędem chwilowym mniejszym od  $0,01 \mu_N$ , przy średniej częstotliwości przełączeń około 30 kHz.  
Taka wysoka częstotliwość przełączeń w stanie ustalonym jest konsekwencją tego, że sterowanie minimalizujące wskaźnik jakości postaci (7) lub (9) oznacza w praktyce śledzenie momentu zadanego  $\mu^*$  z zerowym błędem.
5. Zbliżone rezultaty sterowania według różnych zasad stawiają problem wyboru metody czasooptymalnego sterowania momentem elektromagnetycznym silnika asynchronicznego klatkowego w kategoriach technicznych a nie teoretycznych.

## LITERATURA

- [1] Kulesza A.: Zagadnienia syntezy struktur częstotliwościowego sterowania silnika asynchronicznego klatkowego. Politechnika Śląska. Praca doktorska, Gliwice 1981.
- [2] Kulesza A.: Optymalizacja własności dynamicznych układu sterowania silnika asynchronicznego klatkowego. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Elektryka nr 84, Gliwice 1982.
- [3] Douglas J.M.: Dynamika i sterowanie procesów. Tom 2: Synteza układów sterowania. WNT, Warszawa 1976.

Recenzent: doc. dr inż. Michał Tall

Wpłynęło do redakcji dn. 16.VI.1982 r.

## ОПТИМАЛЬНОЕ ПО ВРЕМЕНИ УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ АСИНХРОННОГО КЛЕТОЧНОГО ДВИГАТЕЛЯ

## Р е з ю м е

В статье представлен метод применения принципа оптимальности для определения оптимального по времени управления электромагнитным моментом асинхронного клеточного двигателя.

Приведены результаты вычислений оптимального управления, а также результаты симуляционных переходных процессов момента двигателя.

THE TIME OPTIMAL CONTROL OF ELECTROMAGNETIC MOMENT OF THE SQUIRREL - CAGE AC MOTOR

Summary

In the paper the method of application of the optimal rule for finding the time optimal control of the electromagnetic moment of the squirrel - cage AC motor is presented. The results of optimal control counting and simulation of the moment time - waves are shown.