

Tadeusz Sawik

Akademia Górniczo-Hutnicza

HARMONOGRAMOWANIE PRODUKCJI PRZY OGRANICZONYCH ZAPASACH MIĘDZYOPERACYJNYCH

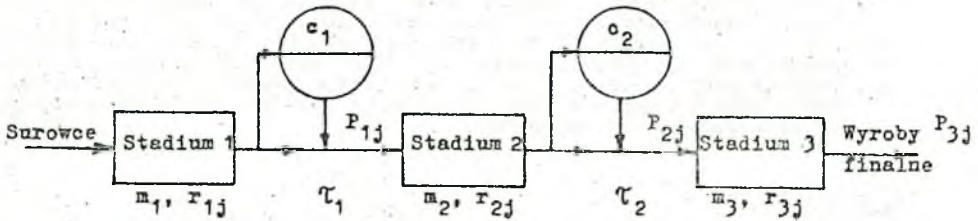
Streszczenie. Rozważa się 3-stadialny proces produkcyjny z magazynami międzystadialnymi o ograniczonych pojemnościach. Każde stadium zawiera zbiór identycznych maszyn pracujących równolegle. Należy wyznaczyć harmonogram produkcji dla niejednostkowego zlecenia obejmującego wiele wyrobów. Jako kryterium optymalności przyjmuje się minimum czasu wykonywania zlecenia przy możliwie najniższych kosztach magazynowania półwyrobów. Problem sformułowany jako wielopoziomowe zadanie programowania całkowitoliczbowego, w którym każdy poziom dotyczy innego stadium procesu, a interakcje pomiędzy poziomami uwzględniają dostępność półwyrobów produkowanych we wcześniejszych stadiach procesu oraz pojemności magazynów.

1. Wstęp

Rozważmy trójstadialny system produkcyjny z dwoma magazynami pomiędzy stadiami 1 i 2 oraz 2 i 3 o ograniczonych pojemnościach odpowiednio c_1 i c_2 . W systemie wytwarza się N różnych wyrobów P_j ($j=1, \dots, N$). Wyprodukowanie wyrobu P_j wymaga wykonania operacji kolejno w stadiach 1, 2 i 3, których wynikiem są kolejne półwyroby odpowiednio P_{1j} , P_{2j} i wyrób finalny P_{3j} . Półwyrób P_{ij} wytworzony w stadium i ($i=1, 2$) przekazywany jest albo do magazynu pomiędzy stadiami i oraz $i+1$ albo bezpośrednio do stadium $i+1$, w którym przetworzony zostaje na wyrób $P_{i+1,j}$. Horyzont harmonogramowania obejmuje T okresów produkcyjnych o jednakowych długościach (np. zmian roboczych). W stadium i ($i=1, 2, 3$) pracuje równolegle m_i jednakowych maszyn tak, że wyrób P_{ij} może być wytwarzany jednocześnie na wielu maszynach z taką samą wydajnością wynoszącą r_{ij} sztuk/maszyno-okres. Zadane jest zlecenie produkcyjne (w_1, \dots, w_N) , gdzie w_j ($j=1, \dots, N$) jest żądaną liczbą maszynookresów produkcji wyrobu finalnego P_{3j} . Należy wyznaczyć harmonogram produkcji dla każdego stadium tak, aby zlecenie produkcyjne wykonać w najkrótszym czasie i przy możliwie najmniejszych zapasach półwyrobów w magazynach międzystadialnych.

Zapasy międzyoperacyjne półwyrobów zmagazynowanych pomiędzy kolejnymi stadiami umożliwiają względnie niezależną pracę poszczególnych stadiów. Z drugiej jednak strony ograniczone pojemności magazynów przy różnych jednocześnie wydajnościach kolejnych stadiów powodują, że pełne wykorzystanie mocy produkcyjnych systemu nie zawsze będzie możliwe. Powyższe uwagi wskazują na możliwość sformułowania przedstawionego problemu harmonogramowania jako wielopoziomowe zadanie programowania całkowitoliczbowego z różnymi wskaźnikami jakości na poszczególnych poziomach. Pierwszy (najwyższy) po-

zium dotyczyć będzie harmonogramu produkcji dla stadium 3 (finalnego) zapewniającego wykonanie zlecenia w najkrótszym czasie. W rezultacie wyznaczone zostanie zapotrzebowanie w kolejnych okresach na półwyroby produkowane we wcześniejszych stadiach. Kolejne zaś poziomy - drugi i trzeci (najniższy) - związane będą ze stadiami 2 i 1, dla których wyznaczmy harmonogramy produkcji zapewniające pokrycie zapotrzebowania na półwyroby przy możliwie najniższych poziomach zapasów półwyrobów w magazynach międzystadialnych. W zadaniach programowania całkowitoliczbowego każdego poziomu występować będą ograniczenia uwzględniające skończone pojemności odpowiednich magazynów międzystadialnych oraz wydajności wcześniejszych stadiów produkcji.



Rys.1. Trójstadialny proces produkcyjny z magazynami międzystadialnymi
Fig.1. Three-Stage Production Process with Intermediate Buffers

Artykuł niniejszy jest kontynuacją prac [5], [6]. Podobny problem szeregowania operacji ale w systemie 1-stadialnym przedstawiono w [2]. System przepływowi wielomaszynowy rozważa się w [4], zaś w [1], 3-maszynowy bez magazynów.

2. Sformułowanie problemu

2.1. Założenia

Przedstawione we wstępie zadanie harmonogramowania sformułujemy przy następujących założeniach dotyczących systemu produkcji i magazynowania:

1. W każdym okresie na jednej maszynie można wytwarzać co najwyżej jeden wyrób, przy czym przydzielenie wyrobu P_j do maszyny w stadium i oznacza, że na maszynie tej wyprodukowanych zostanie dokładnie r_{ij} sztuk P_{ij} w tym okresie.
2. W każdym okresie przydział wyrobów do maszyn w każdym stadium jest stały, co przy stałej wydajności maszyn powoduje, że zapasy półwyrobów w magazynach międzystadialnych w ciągu okresu zmieniają się liniowo (Rys.2).
3. Wyrób $P_{i+1,j}$ ($i=1,2$) wyprodukowany w stadium $i+1$ w okresie t otrzymywany jest z półwyrobu P_{ij} wytworzonego w stadium i najpóźniej w okresie $t-\tau_i$, gdzie τ_i jest stałym opóźnieniem czasowym pomiędzy stadiami i oraz $i+1$.
4. Jeden maszynookres produkcji każdego z wyrobów P_{ij} ($i=1,2$) zajmuje taką samą pojemność magazynu pomiędzy stadiami i oraz $i+1$ tak, że pojemność c_i można wyrazić w maszynookresach produkcji w stadium i .
5. W magazynach międzystadialnych nie ma początkowych zapasów półwyrobów.

2.2. Definicje zmiennych

Celem harmonogramowania jest wyznaczenie wartości całkowitoliczbowej zmiennej x_{ijt} ($i=1,2,3$ $j=1,\dots,N$ $t=1,\dots,T$), która oznacza liczbę maszyn przydzielonych do produkcji wyrobu P_j w stadium i w okresie t .

Ponadto oznaczmy przez v_{ijt} ($i=1,2$ $j=1,\dots,N$ $t=1,\dots,T$) minimalną liczbę maszynookresów produkcji półwyrobu P_{ij} w ciągu t pierwszych okresów, konieczną do pokrycia zapotrzebowania na ten półwyrob.

$$v_{ijt} = \left\lceil a_{i+1,ij} \sum_{k=1}^{t+\tau_i} x_{i+1,jk} \right\rceil, \quad t \leq T_i - 1 \quad (1)$$

$$v_{ijT_i} = \left\lceil a_{i+1,ij} \sum_{t=1}^{T_{i+1}} x_{i+1,jt} \right\rceil = \left\lceil a_{i+1,ij} w_{i+1,j} \right\rceil = w_{ij} \quad (2)$$

gdzie $a_{i+1,ij} = r_{i+1,j}/r_{ij}$, $w_{3j} = w_j$, $T_{i+1} = T_i + \tau_i$

T_i oznacza liczbę okresów koniecznych do wykonania zlecenia w stadium i

$\lceil a \rceil$ - najmniejsza liczba całkowita nie mniejsza niż a .

Niech b_{ist} ($i=2,3$ $s=1,\dots,i-1$ $t=\tau_s+\dots+\tau_{i-1}+1,\dots,T$) będzie maksymalną liczbą maszynookresów produkcji w stadium s , którą można przetworzyć w stadium i ($i > s$) w ciągu t pierwszych okresów

$$b_{ist} = \max\left\{0, m_s \left(t - \sum_{p=s}^{i-1} \tau_p\right)\right\} \quad (3)$$

natomiast c_{it} niech oznacza maksymalną liczbę maszynookresów produkcji w stadium i , którą można przetworzyć w stadium $i+1$ lub zmagazynować pomiędzy stadiami i oraz $i+1$ w ciągu t pierwszych okresów

$$c_{it} = c_i + \left\lfloor \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^t a_{i+1,ij} x_{i+1,jk} \right\rfloor \quad (4)$$

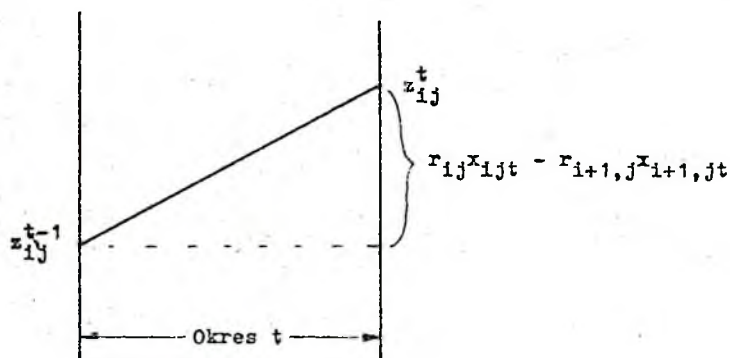
gdzie $\lfloor a \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż a .

2.3. Koszty magazynowania półwyrobów

Niech z_{ij}^t będzie poziomem zapasów wyrobu P_{ij} na końcu okresu t . Mamy

$$z_{ij}^t = r_{ij} \sum_{k=1}^t x_{ijk} - r_{i+1,j} \sum_{k=1}^t x_{i+1,jk}, \quad t=1,\dots,T \quad (5)$$

Rysunek 2 ilustruje zmianę zapasu półwyrobu P_{ij} w ciągu jednego okresu w przypadku, gdy produkcja tego półwyrobu przewyższa jego zużycie w tym okresie. Oczywiście liniowa zmiana zapasów wyrobu P_{ij} w ciągu okresu jest funkcją liczby maszyn produkujących P_{ij} w stadium i oraz $P_{i+1,j}$ w stadium $i+1$. W każdym przypadku średnie zapasy półwyrobu P_{ij} w ciągu okresu t można przyjąć jako równe



Rys.2. Zmiana zapasu półwyrobu w ciągu okresu

Fig.2. Semi-Finished Product Inventory Change During a Period

$$\frac{1}{2}(z_{ij}^{t-1} + z_{ij}^t) = \frac{1}{2} r_{ij} (x_{ijt} + 2 \sum_{k=1}^{t-1} x_{ijk}) - \frac{1}{2} r_{i+1,j} (x_{i+1,jt} + 2 \sum_{k=1}^{t-1} x_{i+1,jk})$$

Jeżeli przez $\alpha_{ij} > 0$ oznaczymy koszty magazynowania jednej sztuki półwyrobu P_{ij} w ciągu jednego okresu, to całkowite koszty magazynowania półwyrobów w magazynie pomiędzy stadiami i oraz $i+1$ będą równe

$$\sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T \frac{1}{2} \alpha_{ij} (z_{ij}^{t-1} + z_{ij}^t) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \alpha_{ij} (r_{ij} \sum_{t=1}^T (x_{ijt} + 2 \sum_{k=1}^{t-1} x_{ijk}) + - r_{i+1,j} \sum_{t=1}^T (x_{i+1,jt} + 2 \sum_{k=1}^{t-1} x_{i+1,jk}))$$

Zauważmy, że w powyższym wyrażeniu mają miejsce następujące uproszczenia

$$\sum_{t=1}^T 2 \sum_{k=1}^{t-1} x_{ijk} = \sum_{t=1}^T (2T - 2t) x_{ijt}, \quad \sum_{t=1}^T x_{ijt} = w_{ij}$$

i wprowadźmy oznaczenia

$$K_i = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \alpha_{ij} (r_{ij} w_{ij} - r_{i+1,j} \sum_{t=1}^T (x_{i+1,jt} + 2 \sum_{k=1}^{t-1} x_{i+1,jk})), \quad e_{ij} = \alpha_{ij} r_{ij}$$

Możemy teraz całkowite koszty magazynowania półwyrobów pomiędzy stadiami i oraz $i+1$ zapisać następująco

$$f_i = \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T e_{ij} (T - t) x_{ijt} + K_i, \quad i=1,2 \quad (6)$$

gdzie K_i jest stałą, gdyż harmonogram produkcji dla stadium i wyznacza się przy znajomości ustalonego wcześniej harmonogramu $\{x_{i+1,jt}\}$ dla stadium $i+1$.

2.4. Model matematyczny zadania harmonogramowania wielopoziomowego

Zadanie pierwszego poziomu związane z wyznaczaniem harmonogramu produkcji wyrobów finalnych P_{3j} ($j=1, \dots, N$) ma następującą postać

Zminimalizować

 T_3

(7)

przy ograniczeniach

$$\sum_{j=1}^N x_{3jt} \leq m_3, \quad t=1, \dots, T \quad (8)$$

$$x_{3jt} \geq 0 \text{ i całkowite}, \quad j=1, \dots, N, \quad t=1, \dots, T \quad (9)$$

$$\sum_{t=1}^{T_3} x_{3jt} = w_j, \quad j=1, \dots, N \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^t a_{3sj} x_{3jk} \leq b_{3st}, \quad s=1, 2, \quad t=1, \dots, T \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^N \left[a_{32j} \sum_{k=1}^t x_{3jk} \right] \leq c_{2,t-T_2}, \quad t=1, \dots, T \quad (12)$$

Zadanie drugiego poziomu związane z harmonogramowaniem produkcji półwyrobów P_{2j} ($j=1, \dots, N$) w stadium 2 ma postać

Zminimalizować

$$\sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^{T_2} e_{2j} (T_2 - t) x_{2jt} \quad (13)$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{j=1}^N x_{2jt} \leq m_2, \quad t=1, \dots, T_2 \quad (14)$$

$$x_{2jt} \geq 0 \text{ i całkowite}, \quad j=1, \dots, N, \quad t=1, \dots, T_2 \quad (15)$$

$$\sum_{k=1}^t x_{2jk} \geq v_{2jt}, \quad j=1, \dots, N, \quad t=1, \dots, T_2 - 1 \quad (16)$$

$$\sum_{t=1}^{T_2} x_{2jt} = w_{2j}, \quad j=1, \dots, N \quad (17)$$

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^t a_{21j} x_{2jk} \leq b_{21t}, \quad t=1, \dots, T_2 \quad (18)$$

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^t x_{2jk} \leq c_{02t}, \quad t=1, \dots, T_2 \quad (19)$$

$$\sum_{j=1}^N \left[a_{21j} \sum_{k=1}^t x_{2jk} \right] \leq c_{01,t-T_1}, \quad t=1, \dots, T_2 \quad (20)$$

Zadanie poziomu pierwszego (najniższego) związane z harmonogramowaniem produkcji półwyrobów P_{1j} ($j=1, \dots, N$) w stadium 1 ma postać

Zminimalizować

$$\sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^{T_1} e_{ij}(T_i - t)x_{ijt} \quad (21)$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{j=1}^N x_{ijt} \leq m_t, \quad t=1, \dots, T_1 \quad (22)$$

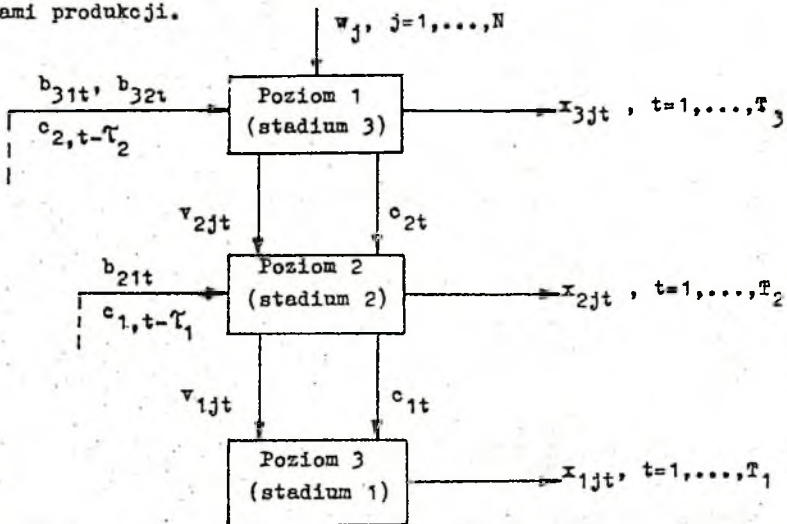
$$x_{ijt} \geq 0 \text{ i całkowite}, \quad j=1, \dots, N, \quad t=1, \dots, T_1 \quad (23)$$

$$\sum_{k=1}^t x_{ijk} \geq v_{ijt}, \quad j=1, \dots, N, \quad t=1, \dots, T_1-1 \quad (24)$$

$$\sum_{t=1}^{T_1} x_{ijt} = w_{ij}, \quad j=1, \dots, N \quad (25)$$

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^t x_{ijk} \leq c_{it}, \quad t=1, \dots, T_1 \quad (26)$$

W powyższych sformułowaniach ograniczenia (8) i (9), (14) i (15) oraz (22) i (23) zapewniają dopuszczalny przydział maszyn do wyrobów w każdym stadium i w każdym okresie. Ograniczenia (10), (17) i (25) zapewniają wykonanie zlecenia produkcyjnego, zaś (16) i (24) odpowiednie zaspokojenie zapotrzebowania na półwyroby. Ograniczenia (11) i (18) zabezpieczają przed zużyciem półwyrobów przekraczającym możliwości produkcyjne wcześniejszych stadiów produkcji. Natomiast ograniczenia (12) i (20) oraz (19) i (26) zabezpieczają przed przepełnieniem magazynów odpowiednio przed oraz za kolejnymi stadiami produkcji.



Rys.3. Schemat harmonogramowania wielopoziomowego
Fig.3. Scheme for Multi-Level Scheduling

3. Warunki istnienia harmonogramu dopuszczalnego

Analizując wielopoziomowy problem programowania całkowitoliczbowego przedstawiony w rozdziale 2.4 można wykazać, że aby mogło istnieć rozwiązanie dopuszczalne horyzont harmonogramowania T powinien być nie krótszy niż

$$T \geq LB = \max_i \{LB_i\} \quad (27)$$

gdzie LB_i jest oszacowaniem od dołu liczby okresów produkcyjnych T_i w stadium i ($i=1,2,3$)

$$LB_i = \max \left\{ \left[\sum_{j=1}^N w_{ij} / m_i \right], \max_{1 \leq s \leq i-1} \left[\sum_{j=1}^N a_{isj} w_{ij} / m_s + \sum_{p=s}^{i-1} \tau_p \right] \right\} \quad (28)$$

Ponadto nierówności (14), (17) i (19) oraz (22), (25) i (26) implikują następujące dodatkowe ograniczenie od dołu na liczbę okresów T_i , $i=1,2$

$$T_i \geq T_i(i+1) = \max_{1 \leq t \leq T_{i+1} - \tau_i} \left\{ t + \left[\left(\sum_{j=1}^N w_{ij} - c_{it} \right) / m_i \right] \right\} \quad (29)$$

Natomiast nierówności (16) i (19) oraz (24) i (26) prowadzą do następującego ograniczenia na minimalną pojemność magazynu pomiędzy stadiami i oraz $i+1$

$$c_i \geq c_{imin} = \max_t \left\{ \sum_{j=1}^N \left[a_{i+1,ij} \sum_{k=1}^{t+\tau_i} x_{i+1,jk} \right] - \left[\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^t a_{i+1,ij} x_{i+1,jk} \right] \right\} \quad (30)$$

Kolejne warunki na istnienie harmonogramów dopuszczalnych w stadium i i 2 wynikają z ograniczeń (14) i (16), (22) i (24) oraz (16), (18) i (20)

$$\sum_{j=1}^N v_{ij} t \leq m_i t, \quad i=1,2, \quad t=1, \dots, T \quad (31)$$

$$\sum_{j=1}^N a_{21j} v_{2j} t \leq b_{21} t, \quad \sum_{j=1}^N a_{21j} v_{2j} t \leq c_{1,t-\tau_1}, \quad t=1, \dots, T \quad (32)$$

Warunek (27) można traktować jako oszacowanie od dołu minimalnej wartości T_3^* - wskaźnika jakości (7) harmonogramu w stadium 3.

Łatwo również wykazać, że optymalne koszty f_1^* , (6), magazynowania półwyrobów pomiędzy stadiami i oraz $i+1$ są ograniczone od dołu następująco

$$K_1^* \geq \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^{T-1} e_{1j} v_{ij,t-1} + K_1^* \quad (33)$$

Z (33) wynikają zaś odpowiednie ograniczenia od dołu na wartości optymalne $f_1^* - K_1^*$ wskaźników jakości (13) i (21) harmonogramów w stadiach i i 2 .

4. Algorytm harmonogramowania wielopoziomowego

Przedstawimy obecnie 3 algorytmy A_1 , A_2 i A_3 dla wyznaczania harmonogramów produkcji odpowiednio w stadiach 3, 2 i 1, zgodnie z 3-poziomą struk-

tura pokazaną na rysunku 3. W algorytmach tych przydział maszyn do wyrobów w każdym okresie wyznaczany jest tylko raz, przy czym w algorytmie A1 obliczenia rozpoczyna się od okresu pierwszego, zaś w A2 i A3 od okresu ostatniego, odpowiednio $T_2 = T_2(3)$ i $T_1 = T_1(2)$, (29). W algorytmie A1 przydział maszyn do wyrobów dokonywany jest w kolejności nierosnących czasów wykonywania zadań produkcyjnych, tzn. kolejno rozpatrując wyroby uporządkowane następująco:

$$q_1 w_1 \geq q_2 w_2 \geq \dots \geq q_N w_N, \quad (34)$$

gdzie $q_j = \max\{1/m_3, a_{32j}/m_2, a_{31j}/m_1\}$, $j=1, \dots, N$.

Natomiast w algorytmach A2 i A3 odpowiednie półwyroby P_{ij} ($i=1,2$) rozpatruje się w kolejności od N do 1, po uporządkowaniu ich według nierosnących kosztów jednostkowych magazynowania:

$$e_{iN} \geq e_{iN-1} \geq \dots \geq e_{i1}, \quad i=1,2 \quad (35)$$

Algorytmy A1 i A2 są algorytmami przybliżonymi dla rozwiązywanych przez nie zadań, natomiast algorytm A3 jest algorytmem optymalnym [2], [7].

Algorytm A1 (harmonogramowanie produkcji w stadium 3)

Krok 0. Ponumeruj wyroby wg. (34). Podstaw $t = 0$.

Krok 1. Podstaw

$$t = t+1, \quad \bar{m}_3 = m_3, \quad \bar{b}_{3st} = b_{3st} - \left[\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{t-1} a_{3sj} x_{3jk} \right], \quad s=1,2, \quad t > \sum_{p=s}^2 \tau_p$$

$$\bar{c}_t = c_{2,t-\tau_2}$$

$$j = 1$$

Krok 2. Wyznacz

$$x_{3jt} = \min \left\{ \bar{m}_3, w_j - \sum_{k=1}^{t-1} x_{3jk}, \min_{s=1,2} \left\{ \left\lfloor \bar{b}_{3st} / a_{3sj} \right\rfloor \right\}, \max \left\{ 0, \left\lfloor \bar{c}_t / a_{32j} - \sum_{k=1}^{t-1} x_{3jk} \right\rfloor \right\} \right\}$$

Podstaw

$$\bar{m}_3 = \bar{m}_3 - x_{3jt}, \quad \bar{b}_{3st} = \bar{b}_{3st} - a_{3sj} x_{3jt}, \quad s=1,2, \quad \bar{c}_t = \bar{c}_t - \left\lfloor a_{32j} \sum_{k=1}^t x_{3jk} \right\rfloor$$

Krok 3. Podstaw $j = j+1$. Jeżeli $j \leq N$, to idź do kroku 2.

Krok 4. Jeżeli $\sum_{k=1}^t x_{3jk} = w_j$, $\forall j=1, \dots, N$, to podstaw $T_3 = t$ i zakończ obliczenia. Inaczej idź do kroku 1.

Algorytm A2 (harmonogramowanie produkcji w stadium 2)

Krok 0. Ponumeruj wyroby wg. (35) dla $i=2$. Podstaw $t = T_2$.

Krok 1. Podstaw

$$\bar{m}_2 = m_2, \quad \bar{b}_{21r} = b_{21r} - \left[\sum_{j=1}^N \sum_{k=t+1}^r a_{21j} x_{2jk} \right], \quad r=t, \dots, T_2, \quad t > \tau_1$$

$$\bar{c}_{2r} = c_{2r} - \sum_{j=1}^N \sum_{k=t+1}^r x_{2jk}, \quad r=t, \dots, T_2$$

$$j = N$$

Krok 2. Wyznacz

$$x_{2jt} = \min \left\{ \bar{m}_2, w_{2j} - v_{2j,t-1} - \sum_{k=t+1}^{T_2} x_{2jk}, \min_{t < r < T_2} \{ \bar{c}_{2r}, [b_{21r}/a_{21j}] \} \right\}$$

Podstaw

$$\bar{m}_2 = \bar{m}_2 - x_{2jt}, \quad b_{21r} = b_{21r} - a_{21j}x_{2jt}, \quad \bar{c}_{2r} = \bar{c}_{2r} - x_{2jt}, \quad r=t, \dots, T_2$$

Krok 3. Podstaw $j = j-1$. Jeżeli $j \geq 1$, to idź do kroku 2.

Krok 4. Podstaw $t = t-1$. Jeżeli $t \geq 1$, to idź do kroku 1.

Krok 5. Korekta harmonogramu.

Jeżeli ograniczenia (20) są spełnione, to zakończ obliczenia.

W przypadku przeciwnym skoryguj harmonogram poprzez zastąpienie każdego z okresów przeciążonych (tj. takich, w których (20) nie jest spełnione) przez dwa kolejne okresy obejmujące łącznie pierwotną liczbę maszynookresów. Odpowiednio skoryguj harmonogram dla stadium 3.

Algorytm A3 (harmonogramowanie produkcji w stadium 1)

Krok 0. Ponumeruj wyroby wg (95) dla $i=1$. Podstaw $t = T_1$.

Krok 1. Podstaw

$$\bar{m}_1 = m_1, \quad \bar{c}_{1r} = c_{1r} - \sum_{j=1}^N \sum_{k=t+1}^r x_{1jk}, \quad r=t, \dots, T_1$$

$j = N$

Krok 2. Wyznacz

$$x_{1jt} = \min \left\{ \bar{m}_1, w_{1j} - v_{1j,t-1} - \sum_{k=t+1}^{T_1} x_{1jk}, \min_{t < r < T_1} (\bar{c}_{1r}) \right\}$$

Podstaw

$$\bar{m}_1 = \bar{m}_1 - x_{1jt}, \quad \bar{c}_{1r} = \bar{c}_{1r} - x_{1jt}, \quad r=t, \dots, T_1$$

Krok 3. Podstaw $j = j-1$. Jeżeli $j \geq 1$, to idź do kroku 2.

Krok 4. Podstaw $t = t-1$. Jeżeli $t \geq 1$, to idź do kroku 1. Inaczej zakończ obliczenia.

5. Przykład

Rozważany problem harmonogramowania zilustrujemy obecnie przykładem liczbowym dla następujących danych, które dotyczą rzeczywistego procesu produkcyjnego:

$$\begin{aligned} N &= 3, \quad T = 15, \quad m_1 = 3, \quad m_2 = 2, \quad m_3 = 4, \quad c_1 = 4, \quad c_2 = 3, \quad \tau_1 = \tau_2 = 1, \\ a_{211} &= 2, \quad a_{212} = 1/2, \quad a_{213} = 2, \quad a_{321} = 1/2, \quad a_{322} = 2, \quad a_{323} = 1/2, \\ a_{311} &= a_{312} = a_{313} = 1, \quad w_1 = 4, \quad w_2 = 6, \quad w_3 = 8, \quad e_{1j} = 1, \quad i=1,2, \quad j=1,2,3. \end{aligned}$$

W przykładzie niniejszym złagodzone ponadto założenie 5 z rozdziału 2.1 i przyjęto, że w magazynach międzystadialnych znajdują się niezerowe zapasy początkowe półwyrobów $z_{ij}^0 = r_{ij}$ ($i=1,2, j=1,2,3$) i takie same zapasy należy w magazynach również pozostawić po wykonaniu zlecenia produkcyjnego.

Dla powyższych danych oszacowanie od dołu czasu T_3^* , wyznaczone z (27) i (28), gdzie wyrażenie (28) zmodyfikowano na przypadek niezerowych zapasów początkowych (por. [6], [7]). Otrzymano $LB_1=6, LB_2=LB_3=9$, czyli $LB=9$.

Harmonogram produkcji wyznaczony przy zastosowaniu podanych algorytmów

jest następujący (czas wykonania zlecenia $T_3 = 11$):

t	x_{31t}	x_{32t}	x_{33t}	x_{21t}	x_{22t}	x_{23t}	x_{11t}	x_{12t}	x_{13t}
1	2	0	2	0	1	1	0	1	1
2	0	1	2	0	2	0	0	1	0
3	0	1	0	0	2	0	0	1	0
4	0	1	0	0	2	0	0	1	0
5	0	1	0	0	2	0	0	0	2
6	0	1	0	0	0	1	0	0	2
7	0	0	2	0	0	1	0	1	0
8	0	0	2	0	2	0	1	0	0
9	0	1	0	1	0	0	2	0	0
10	1	0	0	1	0	0	0	0	2
11	1	0	0	0	1	1	1	1	1

Jeśliby pojemności magazynów były równe $c_2 = c_{2min} = 3$ i $c_1 = c_{1min} = 6$, (30), to zlecenie można by wykonać w ciągu $T_3 = LB = 9$ okresów:

t	x_{31t}	x_{32t}	x_{33t}	x_{21t}	x_{22t}	x_{23t}	x_{11t}	x_{12t}	x_{13t}
1	2	0	2	0	1	1	0	1	1
2	0	1	2	0	2	0	0	1	0
3	0	1	0	0	2	0	0	1	0
4	0	1	0	0	2	0	0	1	1
5	0	1	0	0	2	0	0	0	3
6	0	1	0	0	0	2	0	1	0
7	0	0	4	0	2	0	3	0	0
8	0	1	0	2	0	0	0	0	2
9	2	0	0	0	1	1	1	1	1

6. Wnioski

Przedstawiony w pracy model i algorytm wielopoziomowy harmonogramowania produkcji można łatwo uogólnić na przypadek wielostadialnego procesu z wieloma magazynami pośrednimi (por. [6], [7]). Analizę dokładności zaproponowanego podejścia w ogólnym przypadku procesu wielostadialnego jak i też w pewnych przypadkach szczególnych przedstawiono w pracy [7].

LITERATURA

- [1] Cadambi B.V., Venkoba Rao T.S.: Multiproduct, Three-Stage Production Inventory System. *J.Opl.Res.Soc.*, vol.35, 1984, pp.105-116.
- [2] Dorsey R.C., Hodgson T.J., Ratliff H.D.: A Network Approach to a Multi-Facility, Multi-Product Production Scheduling Problem without Backordering. *Management Sci.*, vol.21, 1975, pp.813-822.
- [3] Dutta S.K., Cunningham A.A.: Sequencing Two-Machine Flow-Shops with Finite Intermediate Storage. *Management Sci.*, vol.21, 1975, pp.989-996.
- [4] Papadimitriou G.H., Kanellakis P.G.: Flowshop Scheduling with Limited Temporary Storage. *J.Assoc.Comput.Mach.*, vol.27, 1980, pp.533-549.
- [5] Sawik T.: Hierarchical Scheduling Two-Stage, Multi-Machine Production with Finite Intermediate Storage. *UMM Scientific Bulletins, Automatics*, no 32, 1982, pp.373-383.
- [6] Sawik T.: Hierarchical Scheduling Multi-Stage Production with Limited In-Process Inventory. *Proc. 3rd International Conf. on Systems Engg, Dayton, Ohio, Sept.5 - 7, 1984.*
- [7] Sawik T.: Hierarchical Scheduling Multi-Stage Production with Limited Intermediate Storages. *J.Opl.Res.Soc.* (w druku).

Recenzent: Dr hab.inż. Mirosław Zaborowski

Wpłynęło do Redakcji do 1986.04.30

КАЛЕНДАРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВА ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ЗАПАСОВ
НА ПОЛУПРОДУКТЫ

Резюме

В статье рассматривается задача теории расписаний для многостадийного производственного процесса с междуоперационными буферами с ограниченной ёмкостью. В задаче минимизируются время выполнения производственного заказа и затраты на содержание запасов полупродуктов. Задача сформулирована как многоуровневая проблема целочисленного программирования. Представлен алгоритм составления расписания и пример его приложения.

PRODUCTION SCHEDULING WITH LIMITED IN-PROCESS INVENTORY

Summary

A three-stage, multi-product production scheduling with limited in-process buffers between the stage is considered with the objective of minimizing the total processing time and the in-process inventory holding costs. Each stage of production is made up of identical parallel machines. The problem is modelled by three-level integer programmes each of which is concerned with scheduling of different stage of production. The interactions among the stage are modelled by additional constraints that take into account the semi-finished products availability and limited capacities of intermediate storages.

A hierarchical, three-level scheduling algorithm is presented which is made up of three interconnected single pass procedures. Each procedure schedules different stage of production with different scheduling objective. Remarks are made on generalization of the approach for multi-stage production process with many intermediate storages of limited capacity. A numerical example is given data from a real three-stage production process.