

Anna LASICZ

METODY PORÓWNAWCZEJ ANALIZY WRAŻLIWOŚCI KOREKTORÓW FAZY

Streszczenie. W artykule omówione są dwie metody: pośrednia i bezpośrednia badania wrażliwości transmitancji korektorów fazy na zmianę wartości parametrów elementów.

Korektory fazy opisuje transmitancja napięciowo-napięciowa

$$K(j\omega) = A \frac{(j\omega - z_1) \dots (j\omega - z_l) \dots (j\omega - z_n)}{(j\omega - p_1) \dots (j\omega - p_l) \dots (j\omega - p_n)} =$$

$$= |K(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = A \prod_{i=1}^n \frac{(j\omega - z_i)}{(j\omega - p_i)} \quad (1)$$

gdzie:

$|K(j\omega)|$, $\varphi(\omega)$ - moduł i argument transmitancji $K(j\omega)$,
 A - żądana wartość modułu $|K(j\omega)|$.

Przyjmijmy, że zera z_i i bieguny p_i są rzeczywiste. Są one równe co do wartości, różnią się znakiem i w ogólnym przypadku wyrażone są przez różne parametry obwodu. Inna jest więc wrażliwość zer i biegunów na zmianę wartości parametrów elementów. Jest to przyczyną powstania błędów, jakimi w wyniku praktycznej realizacji obarczony jest nie tylko argument, ale i moduł transmitancji $K(j\omega)$.

Zastosowania korektorów fazy wymagają znajomości tych błędów [5]. Ich obliczenie można sprowadzić do analizy wrażliwości funkcji $K(j\omega)$, a więc do wyznaczenia wektora wrażliwości wieloparametrowej $S_x^K [1]$, której elementy $S_{x_k}^K(\omega)$ zdefiniowane są następująco:

$$S_{x_k}^K(\omega) = \frac{\partial \ln K(j\omega)}{\partial \ln x_k} = \frac{\partial \ln |K(j\omega)|}{\partial \ln x_k} + j \frac{\partial \varphi(\omega)}{\partial \ln x_k} = S_{x_k}^{|K(j\omega)|}(\omega) + j W_{x_k}^{\varphi(\omega)} \quad (2)$$

$x = [x_1 \dots x_k \dots x_m]$ - wierszowy wektor parametrów obwodu.

Są dwa sposoby badania wrażliwości modułu i argumentu funkcji przenoszenia $K(j\omega)$.

1. Metoda pośrednia

Wektor wrażliwości wieloparametrowej wyznacza się, stosując wzór:

$$S_x^K = S_x^A + S_z^K S_x^z + S_p^K S_x^p \quad (3)$$

gdzie:

$Z = [z_1 \dots z_1 \dots z_n]$ - wierszowy wektor zer transmitancji,

$P = [p_1 \dots p_1 \dots p_n]$ - wierszowy wektor biegunów transmitancji,

$$S_{x_1}^A = \frac{\partial \ln A}{\partial \ln x_1}$$

- wrażliwość współczynnika A na zmiany wartości parametru x_1 obwodu,

$$S_z^K, S_p^K$$

- wektory wrażliwości transmitancji na zmianę wartości odpowiednio zer i biegunów o wymiarach $(1 \times n)$.

Ich elementy określone są następująco:

$$S_{z_1}^K(\omega) = \frac{\partial \ln K(j\omega)}{\partial \ln z_1} = \frac{-z_1}{j\omega - z_1} = \frac{z_1^2}{z_1^2 + \omega^2} + j \frac{\omega z_1}{\omega^2 + z_1^2} \quad (4a)$$

$$S_{p_1}^K(\omega) = \frac{\partial \ln K(j\omega)}{\partial \ln p_1} = \frac{p_1}{j\omega - p_1} = \frac{-p_1^2}{p_1^2 + \omega^2} + j \frac{-p_1 \omega}{\omega^2 + p_1^2} \quad (4b)$$

$$S_x^z = \begin{bmatrix} z_1 & \dots & z_1 & \dots & z_1 \\ S_{x_1}^z & \dots & S_{x_k}^z & \dots & S_{x_n}^z \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ z_n & \dots & z_n & \dots & z_n \\ S_{x_1}^z & \dots & S_{x_k}^z & \dots & S_{x_n}^z \end{bmatrix} \quad (5)$$

Macierz S_x^z ma postać analogiczną do macierzy S_x^p . Elementami macierzy S_x^p i S_x^z są liczby rzeczywiste, których wartości zależą od struktury obwodu i od wartości parametrów elementów.

Składowe wektorów S_z^K i S_p^K są zależne od częstotliwości i od wartości zer i biegunów transmitancji $K(j\omega)$. Oznacza to, że również elementy wektora S_x^K są funkcjami częstotliwości (zależność (3)). Maksymalne ich wartości występują w zakresie częstotliwości wyznaczonych głównie przez wartości zer i biegunów transmitancji (a więc w zakresie częstotliwości pracy korektorów). Pokażemy to dla korektorów fazy drugiego rzędu.

Elementy macierzy S_x^z i S_x^p transmitancji korektorów fazy drugiego rzędu związane są ze sobą zależnościami:

$$S_{x_k}^{z_1} + S_{x_k}^{z_2} = S_{x_k}^{p_1} + S_{x_k}^{p_2} \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^2 (S_{x_k}^{z_i} + S_{x_k}^{p_i}) = 0; \quad i = 2$$

(W zależności od typu i funkcji elementu).

Wobec zależności (2), (3), (4), (5) wrażliwość modułu funkcji $K(j\omega)$ przyjmuje postać:

$$S_{x_k}^{|K(j\omega)|}(\omega) = \frac{z_1^2}{z_1^2 + \omega^2} S_{x_k}^{z_1} + \frac{z_2^2}{z_2^2 + \omega^2} S_{x_k}^{z_2} - \frac{p_1^2}{p_1^2 + \omega^2} S_{x_k}^{p_1} - \frac{p_2^2}{p_2^2 + \omega^2} S_{x_k}^{p_2} + S_{x_k}^A \quad (7)$$

Uwzględniając związek (6), otrzymujemy maksymalną wartość wrażliwości modułu:

$$(S_{x_k}^{|K(j\omega)|}(\omega))_{\max} = (S_{x_k}^{z_1} - S_{x_k}^{p_1}) \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \right) + S_{x_k}^A \quad (8)$$

która występuje dla $\omega = \sqrt{z_1 \cdot z_2}$.

Postępując analogicznie, używujemy wyrażenie określające wrażliwość argumentu $\varphi(\omega)$ na zmianę wartości parametru x_1 :

$$W_{x_k}^{\varphi}(\omega) = \frac{\omega z_1}{z_1^2 + \omega^2} S_{x_k}^{z_1} + \frac{\omega z_2}{z_2^2 + \omega^2} S_{x_k}^{z_2} - \frac{\omega p_1}{p_1^2 + \omega^2} S_{x_k}^{p_1} - \frac{\omega p_2}{p_2^2 + \omega^2} S_{x_k}^{p_2} \quad (9)$$

które przyjmuje największą wartość dla:

$$\omega \approx z_1 \quad \text{lub} \quad \omega \approx z_2 \quad \text{lub} \quad \omega \approx z_1 \text{ i } z_2.$$

Macierze S_x^z i S_x^p charakteryzują obwody pod względem wrażliwości, lecz poauginanie się nimi przy ocenie wrażliwości wielu struktur jest niemożliwe. Wprowadza się więc miary (wskaźniki) wrażliwości zer i biegunów na zmianę wartości parametrów elementów. W zależności od potrzeby i od liczby elementów obwodu przyjmuje się miary wrażliwości statystyczne (przypadek najbardziej prawdopodobny) i najgorszego przypadku [2].

Miary wrażliwości zer i biegunów najgorszego przypadku zdefiniowane są następująco:

- zer

$$M_{z_1} = \sum_{k=1}^n |s_{x_k}^{z_1}|$$

- biegunów

$$M_{p_1} = \sum_{k=1}^n |s_{x_k}^{p_1}|$$

(10)

Miary statystyczne określają wyrażenia:

- zer

$$R_{z_1} = \sqrt{\sum_{k=1}^n (s_{x_k}^{z_1})^2}$$

- biegunów

$$R_{p_1} = \sqrt{\sum_{k=1}^n (s_{x_k}^{p_1})^2}$$

(11)

Badanie wrażliwości transmitancji metodą pośrednią wyjaśnia mechanizm powstania wyników takiej analizy. Prowadzi do wniosku, że porównywanie różnych struktur pod względem wrażliwości jest możliwe wtedy, gdy każda z nich realizuje tę samą wartość zer i biegunów, przy takim doborze parametrów, aby wskaźniki wrażliwości każdego obwodu sprowadzone były do pewnego poziomu (np. minimalnego) [4]. Ponadto takie badania muszą się odbywać w tym samym paśmie częstotliwości.

Korektory fazowe wyższych rzędów tworzy się przez łańcuchowe połączenie korektorów pierwszego i drugiego rzędu. Porównywanie własności korektorów wyższych rzędów można więc sprowadzić do badania korektorów pierwszego i drugiego rzędu.

2. Metoda bezpośrednia

Elementy wektora wrażliwości wieloparametrowej transmitancji $K(j\omega)$ wyznacza się bezpośrednio z definicji wrażliwości. Dla porównywania różnych struktur korektorów pod względem wrażliwości i dla oceny błędów realizacji wprowadza się miary wrażliwości wieloparametrowej statystyczne i najgorszego przypadku oddzielnie dla modułu i argumentu transmitancji.

Są one określone następująco:

Miary statystyczne wrażliwości:

- modułu funkcji $K(j\omega)$

$$R^{|K|}(\omega) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (S_{x_k}^{|K|}(\omega))^2}$$

- argumentu $\varphi(\omega)$

(12)

$$R^{\varphi}(\omega) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (W_{x_k}^{\varphi}(\omega))^2}$$

Miary wrażliwości najgorszego przypadku:

- modułu funkcji $K(j\omega)$

$$M^{|K|}(\omega) = \sum_{k=1}^n |S_{x_k}^{|K|}(\omega)|$$

- argumentu $\varphi(\omega)$

(13)

$$M^{\varphi}(\omega) = \sum_{k=1}^n |W_{x_k}^{\varphi}(\omega)|$$

Badanie wrażliwości tym sposobem można prowadzić numerycznie, wykorzystując metodę obwodu dołączonego [3].

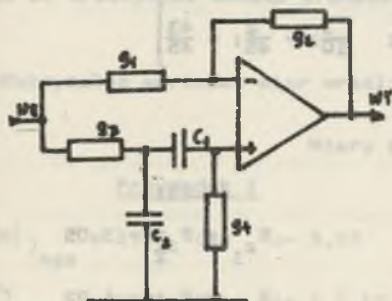
Przykład

Określamy wartości miar wrażliwości: (10), (11), (12), (13), transmittancji korektora fazy drugiego rzędu [6], o strukturze pokazanej na rys. 1, dla dwu przypadków takiego doboru wartości parametrów [4], by:

$$\begin{aligned} K(s) &= A \frac{s^2 - 11s + 10}{s^2 + 11s + 10} = \\ &= A \frac{(s-1)(s-10)}{(s+1)(s+10)} \end{aligned} \quad (14)$$

Przypadek I

$$\begin{aligned} g_1 &= 10; \quad g_2 = 3,4; \quad g_3 = 5,0 \\ g_4 &= 4,0 \\ C_1 &= 2,0; \quad C_2 = 1,0 \end{aligned}$$



Rys.-1

Przypadek II

$$g_1 = 1,0; g_2 = 2,0; g_3 = 3,2$$

$$g_4 = 1,0$$

$$C_1 = 0,73; C_2 = 0,43$$

Transmitancja napięciowo-napięciowa tego obwodu ma postać:

$$K(s) = \left(-\frac{g_1}{g_2}\right) \frac{s^2 + s\left(\frac{g_4}{C_1} + \frac{g_4}{C_2} - \frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{g_3}{C_2}\right) + \frac{g_3 g_4}{C_1 C_2}}{s^2 + s\left(\frac{g_4}{C_1} + \frac{g_4}{C_2} + \frac{g_3}{C_2}\right) + \frac{g_3 g_4}{C_1 C_2}} \quad (15)$$

Macierze S_x^Z i S_x^P dla obu przypadków są następujące:

$$I \quad S_x^Z = \begin{bmatrix} \frac{20}{11}; & -\frac{20}{11}; & -\frac{7}{9}; & \frac{16}{9}; & -\frac{4}{3}; & \frac{1}{3} \\ -\frac{20}{11}; & \frac{20}{11}; & \frac{16}{9}; & -\frac{7}{9}; & \frac{1}{3}; & -\frac{4}{3} \end{bmatrix};$$

$$S_x^P = \begin{bmatrix} 0; & 0; & \frac{5}{9}; & \frac{4}{9}; & -\frac{8}{9}; & -\frac{1}{9} \\ 0; & 0; & \frac{4}{9}; & \frac{5}{9}; & -\frac{1}{9}; & -\frac{8}{9} \end{bmatrix}$$

$$II \quad S_x^Z = \begin{bmatrix} \frac{8}{5}; & -\frac{8}{5}; & -\frac{1}{2}; & \frac{3}{2}; & -\frac{23}{18}; & \frac{5}{18} \\ -\frac{8}{5}; & \frac{8}{5}; & \frac{3}{2}; & -\frac{1}{2}; & \frac{5}{18}; & -\frac{23}{18} \end{bmatrix}$$

$$S_x^P = \begin{bmatrix} 0; & 0; & \frac{3}{10}; & \frac{7}{10}; & -\frac{43}{45}; & -\frac{2}{45} \\ 0; & 0; & \frac{7}{10}; & \frac{3}{10}; & -\frac{2}{45}; & -\frac{43}{45} \end{bmatrix}$$

Miary wrażliwości statystyczne:

I

$$R_{z_1} = 3,53$$

$$R_{z_2} = R_{z_1}$$

$$R_{p_1} = R_{p_2} = 1,14$$

II

$$R_{z_1} = R_{z_2} = 3,05$$

$$R_{p_1} = R_{p_2} = 1,22$$

Miary wrażliwości najgorszego przypadku:

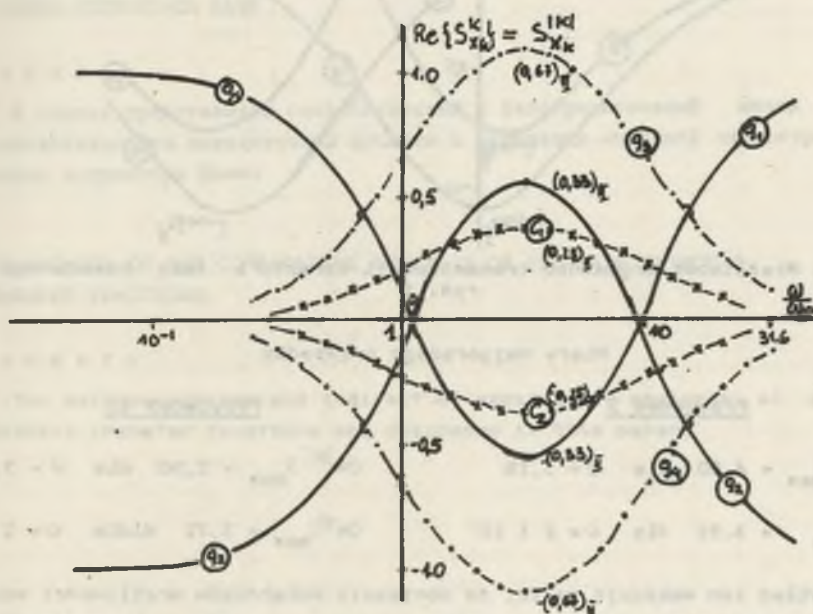
$$M_{z_1} = M_{z_2} = 8,0$$

$$M_{z_1} = M_{z_2} = 6,75$$

$$M_{p_1} = M_{p_1} = 2,0$$

$$M_{p_1} = M_{p_2} = 2,0$$

Wrażliwość modułu i argumentu transmitancji jako funkcja częstotliwości dla tego korektora określona bezpośrednio ilustrują wykresy na rys. 2 i 3. Dotyczą one przypadku I. Podane obok wartości odnoszą się do przypadku II [4].



Rys. 2. Wrażliwość modułu transmitancji korektora przedstawionego na rys. 1

Maksymalne wartości miar wrażliwości modułu i argumentu:

Miary statystyczne

Przypadek I

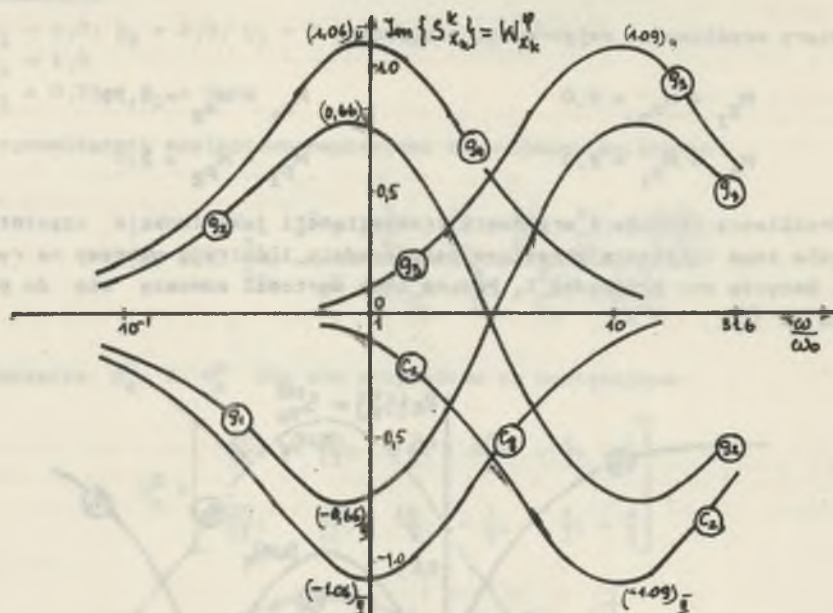
$$(R^{|k|})_{\max} = 1,70 \text{ dla } \omega = 3,18$$

$$(R^{\varphi})_{\max} = 1,88 \text{ dla } \omega = 1 \text{ i } 10$$

Przypadek II

$$(R^{|k|})_{\max} = 1,42 \text{ dla } \omega = 3,18$$

$$(R^{\varphi})_{\max} = 1,81 \text{ dla } \omega = 1 \text{ i } 10$$



Rys. 3. Wrażliwość argumentu transmitancji korektora fazy pokazanego na rys. 1

Miary najgorszego przypadku

Przypadek I

$$(M^{|K|})_{\max} = 4,00 \quad \text{dla} \quad \omega = 3,18$$

$$(M^{\varphi})_{\max} = 3,91 \quad \text{dla} \quad \omega = 1 \text{ i } 10$$

Przypadek II

$$(M^{|K|})_{\max} = 2,50 \quad \text{dla} \quad \omega = 3,18$$

$$(M^{\varphi})_{\max} = 3,71 \quad \text{dla} \quad \omega = 1 \text{ i } 10$$

Przykład ten wskazuje na to, że obniżenie wskaźników wrażliwości modułu i argumentu transmitancji spowodowane zmianą wartości parametrów obwodu nie jest jednoznaczne z poprawą miar wrażliwości błędów (zer).

LITERATURA

- [1] Mitra S.K.: Analiza i synteza układów aktywnych liniowych. WNT, Warszawa 1974.
- [2] Geher K.: Teoria tolerancji i wrażliwości układów elektronicznych. WNT Warszawa 1976.
- [3] Director S.W., Rohrer R.A.: The generalized adjoint network and network sensitivities. IEEE Transactions on Circuit Theory, nr 3, August 1969.
- [4] Lasicz A.: Uwagi o zmniejszeniu wrażliwości transmitancji pewnej grupy korektorów fazy. Zeszyty Naukowe Politechniki Śl. Elektryka nr 79, Gliwice 1982.

- [5] Orchard H.J.: Synthesis of wideband two-phase networks. Wireless Engineer, March 1950.
- [6] Dutta Roy S.C.: RC active all-pass network using a differential input operational amplifier. Proceedings IEEE, November 1969.

Recenzent: doc. dr inż. Maria Jastrzębska

Wpłynęło do redakcji dnia 15.IV.1982 r.

МЕТОДЫ СРАВНИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ КОРРЕКТОРОВ ФАЗЫ

Р е з ю м е

В статье представлено посредственный и непосредственный метод анализа чувствительности передаточной функции к изменению значений параметров элементов корректора фазы.

THE METHODS OF THE COMPARATIVE ANALYSIS OF ALL-PASS NETWORKS TRANSFER FUNCTIONS

S u m m a r y

Two methods: direct and indirect of sensitivity analysis of all-pass networks transfer functions are discussed in this paper.

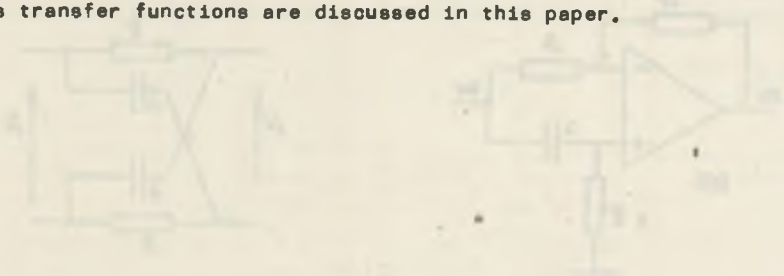


Fig. 1

a) - passive network; b) - active network.

Fig. 2

Fig. 3