

Zbigniew ŚMIGIEL

ANALIZA TOPOLOGICZNA I STABILNOŚĆ ROZWIĄZAŃ OKRESOWYCH
ORTOGONALNEGO TRANSFORMATORA PARAMETRYCZNEGO

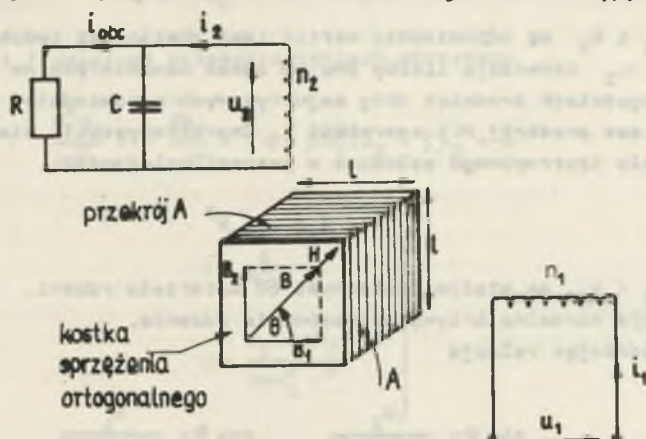
Streszczenie. Praca zawiera analizę układu ortogonalnego transformatora parametrycznego oraz określa stabilność rozwiązań okresowych w sensie Lapunowa. Zajmuje się stanem nieustalonym konwertora magnetycznego i badaniem stabilności lokalnej.

Wstęp

Topologiczna metoda analizy stosowana do badania układów autonomicznych pozwala na znajdowanie rozwiązań równań różniczkowych w postaci krzywych całkowych w przestrzeni stanu. Warunek równowagi, przy którym zmienne układu znajdują się w spoczynku, odpowiada punktowi osobliwemu lub cyklowi granicznemu. Stan nieustalony układu reprezentuje trajektorie punktu odwzorowującego, zdążająca do takiej osobliwości lub cyklu granicznego.

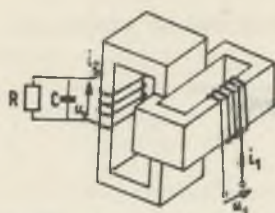
1. Indukcja pola magnetycznego strony wtórnej transformatora

Przedmiotem rozważań jest analiza pracy obwodu ferorezonansowego przedstawionego na rys. 1. Obwód ten reprezentuje różne typy ortogonal-



Rys. 1. Schemat ideowy ortogonalnego transformatora parametrycznego

nych transformatorów parametrycznych. Prostopadłe sprzężenie strumieni magnetycznych w tych transformatorach zachodzi w kostce sprzężenia (rys. 1).



Rys. 2. Konwertyor łańcuchowy

Wymiary kostki sprzężenia zależne będą od rodzaju konwertyora magnetycznego [2] (łańcuchowy (rys. 2), krzyżowy, paraformer itp.) i sposobu realizacji ortogonalnego sprzężenia.

Przyjęto następujące założenia upraszczające: a) nieuwzględnianie pętli histerezy, b) aproksymację normalnej krzywej magnesowania wielomianem trzeciego stopnia zgodnie z relacją (2), c) przyjęcie izotropowości rdzenia, d) nieuwzględnianie strumieni rozproszenia, e) nieuwzględnianie strat na prądy wirowe.

Biorąc pod uwagę oznaczenia stosowane na rys. 1, można dla rozważanego obwodu napisać następujące równania:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= A n_1 \frac{dB_1}{dt} \\ u_2 &= -A n_2 \frac{dB_2}{dt} \\ i_2 &= C \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{R} \\ H_1 l_1 + H l \cos \theta &= n_1 i_1 \\ H_2 l_2 + H l \sin \theta &= n_2 i_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

gdzie B_1 i B_2 są odpowiednio wartościami chwilowymi indukcji w rdzeniach a n_1 i n_2 oznaczają liczby zwojów cewek nawiniętych na rdzenie. Rdzenie o długościach średnich dróg magnetycznych odpowiednio l_1 i l_2 posiadają ten sam przekrój A i szerokość l . Charakterystyki nieliniowe rdzenia z materiału izotropowego założono w postaci zależności

$$H = a_1 B + a_3 B^3 \quad (2)$$

gdzie a_1 i a_3 są stałymi zależnymi od materiału rdzenia, a relacja (2) aproksymuje normalną krzywą magnesowania rdzenia.

Uwzględniając relacje

$$\sin \theta = \frac{B_2}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}} \quad \cos \theta = \frac{B_1}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}} \quad (3)$$

ze wzorów (1) i (2) wynika

$$CAn_2^2 \frac{d^2 B_2}{dt^2} + \frac{An_2^2}{R} \cdot \frac{dB_2}{dt} + a_1(1+l_2)B_2 + a_3(1+l_2)B_2^3 + a_3l_2^2 B_2 = 0 \quad (4)$$

Wprowadzono zmienne bezwymiarowe określone następująco:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= I_n V_1 \\ i_2 &= I_n V_2 \\ B_1 &= B_n b_1 \\ B_2 &= B_n b_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

gdzie wielkości podstawowe B_n i I_n łączy zależność

$$B_n n_2 A \omega^2 C = I_n \quad (6)$$

Założono ponadto

$$\omega t = \tau \quad (7)$$

i przyjęto fazę początkową indukcji strony pierwotnej równą zero, czyli

$$B_1(\tau) = B_{1m} \sin \omega t = B_n b_1 \quad (8)$$

gdzie:

$$b_1 = \frac{B_{1m}}{B_n} \sin \tau = \beta_1 \sin \tau \quad (9)$$

Po normalizacji i dalszych przekształceniach otrzymano

$$\frac{d^2 b_2}{d\tau^2} + \delta \frac{db_2}{d\tau} + (\varphi + \beta b_1^2) b_2 + \xi b_2^3 = 0 \quad (10)$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{1}{RC\omega} \\ \varphi &= \frac{a_1(1+l_2)}{CAn_2^2 \omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\delta} &= \frac{a_3 1 B_n^2}{C a n^2 \omega^2} \\ \delta &= \frac{a_3 (1 + l_2) B_n^2}{C a n^2 \omega^2} \\ \beta^2 &= \bar{\beta} \beta_1^2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Równanie (10) jest nieliniowym równaniem różniczkowym drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach, określającym indukcję wtórnej strony transformatora parametrycznego. Strona wtórna jest układem oscylującym o dużej dobroci, a wartości współczynnika δ (a tym samym udział członu $\delta \frac{db_2}{dt}$) są bardzo małe.

2. Analiza układu równań autonomicznych

Badania eksperymentalne [1] ortogonalnego transformatora parametrycznego wykazują, że indukcja pola magnetycznego b_2 jest przebiegiem harmonijnym (z dokładnością 5÷10% [1]) o częstotliwości takiej jak indukcja pola magnetycznego b_1 .

Można więc zmienną bezwymiarową b_2 założyć w postaci

$$b_2 = x(\tau) \sin \tau + y(\tau) \cos \tau \quad (12)$$

gdzie $x(\tau)$ i $y(\tau)$ są wolnozmiennymi funkcjami czasu i są to zmienne płaszczysty stanu.

Korzystając z metody bilansu harmonicznego [3], otrzymano z relacji (10) i (12) układ równań autonomicznych

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{y(1-\alpha)}{2} - \frac{3\delta y^3}{8} - \frac{\delta x}{2} - \frac{y\beta^2}{8} - \frac{3}{8} \delta x^2 y \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{x(\alpha-1)}{2} + \frac{3\delta x^3}{8} - \frac{\delta y}{2} + \frac{3x\beta^2}{8} + \frac{3}{8} \delta x y^2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Założono ponadto, że $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\delta \dot{x}$, $\delta \dot{y}$ są pomijalnie małe (wyżej założono wolnozmiennosc funkcji $x(\tau)$ i $y(\tau)$) oraz nie uwzględniono funkcji o innych częstotliwościach.

Układ równań (13) po przekształceniach przyjmuje postać:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -Mx + Ny - Pyr^2 = X(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= -N_1x - My + Pxr^2 = Y(x,y) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{\alpha}{2} \\ N &= \frac{1-\alpha}{2} - \frac{\beta^2}{8} \\ N_1 &= N - \frac{\beta^2}{4} \\ P &= \frac{3}{8}\beta \\ r^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Stąd zależność

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-N_1x - My + Pxr^2}{-Mx + Ny - Pyr^2} \quad (16)$$

pozwala na znalezienie (np. przy pomocy metody izoklin) trajektorii punktu odwzorowującego na płaszczyźnie stanu xy .

W pracy [1] podane algorytm, program i wyniki obliczeń na maszynie cyfrowej obrazujące za pomocą metody izoklin krzywa całkowa, punkty osobliwe i cykle graniczne.

Stan okresowy jest stanem, dla którego funkcje $x(t)$ oraz $y(t)$ są stałe, co oznacza że:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{dy}{dt} = 0$$

a układ równań (14) przyjmuje postać

$$\left. \begin{aligned} -Mx + Ny - Pyr^2 &= 0 \\ -N_1x - My + Pxr^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Pozwala to na wyznaczenia amplitudy w stanie ustalonym

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} x_0^2 &= \frac{(N - Pr_0^2)r_0^2}{N - N_1} \\ y_0^2 &= \frac{(Pr_0^2 - N_1)r_0^2}{N - N_1} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Układ równań (17) określa amplitudę r_0 i po przekształceniach daje

$$P^2 r_0^4 - Pr_0^2 (N + N_1) + M^2 + NN_1 = 0 \quad (19)$$

a amplituda w stanie ustalonym

$$r_0^2 = \frac{N + N_1 \pm \sqrt{(N + N_1)^2 - 4(M^2 + NN_1)}}{2P} \quad (20)$$

Relację (20) można zapisać za pomocą wielkości podstawowych (tzn. wielkości geometrycznych i elektrycznych z rys. 1)

$$B_{2m}^2 = \frac{4CAn_2^2 \omega^2 - 4a_1(1 + l_2) - 2a_2 l_{1m}^2 \pm \sqrt{(a_3 l_{1m}^2)^2 - \left(\frac{4An_2^2}{R}\right)^2}}{3a_3(1 + l_2)} \quad (21)$$

Relacja (21) pozwala na wyprowadzenie statycznych charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych (przyczocono je w pracach [4, 1]) takich jak:

charakterystyka amplitudowa $B_{2m} = f(B_{1m})$ przy $f = \text{const}$,

charakterystyka zewnętrzna $B_{2m} = f(R)$ przy $f = \text{const}$

(a tym samym $u_2 = f(I_{obc})$). Zależność (21) pozwala określić ponadto: przedział obciążeń (R_{min}), dla których istnieją stabilne drgania oscylacyjne strony wtórnej, wartości indukcji B_{1m} , dla których B_{2m} osiąga maksimum oraz poniżej których następuje zerwanie oscylacji, wartość pojemności C niezbędnej dla powstania oscylacji.

3. Stabilność rozwiązań okresowych

Rozwiązanie okresowe, to znaczy stan równowagi układu (14), jest związane z punktem osobliwym (x_0, y_0) na płaszczyźnie stanu xy . Może się zdarzyć, że rozwiązanie to jest niestabilne w sensie Lapunowa [3] i wówczas przebiegi okresowe nie utrzymują się w obwodzie, a rozwiązanie przyjmuje

inny charakter. Według Lapunowa rozwiązanie jest stabilne, jeżeli wszystkie rozwiązania zbliżające się doń pozostają w jego otoczeniu, jest zaś asymptotycznie stabilne, jeżeli rozwiązania zbliżające się doń asymptotycznie. Jeżeli zdarzyłoby się, że wszystkie rozwiązania układu równań (14) są niestabilne, to w układzie fizycznym opisanym tymi równaniami wzbudzałaby się przebiegi prawie okrężowe posiadające na płaszczyźnie xy stabilny cykl graniczny. Analityczne podejście do teorii stabilności polega na zbadaaniu tak zwanych równań wariacyjnych (wg Poincaré).

Rozpatrzmy układ równań (14), założmy, że znamy rozwiązanie tego układu x_0, y_0 , które będziemy uważać za rozwiązanie niezaburzone. Niech x, y będzie rozwiązaniem zaburzonym odpowiadającym wartościom początkowym $x(\xi_0) \neq 0, y(\eta_0) \neq 0$.

Miedzy zaburzeniami zachodzi związek

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \xi \\ y &= y_0 + \eta \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

gdzie funkcje ξ, η nazywamy zaburzeniami lub perturbacjami. Zakładamy że $|\xi|, |\eta|$ są dostatecznie małe, tak że można pominąć ich wyższe potęgi.

Podstawiając rozwiązania (22) do (14) i rozwijając funkcje $X(x, y), Y(x, y)$ w otoczeniu wartości niezaburzonych x_0, y_0 w szeregi oraz odrzucając wyrazy stopnia wyższego niż pierwszy względem ξ, η , otrzymamy układ równań wariacyjnych

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)_0 \xi + \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)_0 \eta \\ \frac{d\eta}{dt} &= \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)_0 \xi + \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right)_0 \eta \end{aligned} \quad (23)$$

Lapunow wykazał [3], że jeżeli części rzeczywiste pierwiastków równania charakterystycznego układu (23) są ujemne, to odpowiedni stan równowagi jest stabilny. Jeżeli chociaż jeden pierwiastek ma część rzeczywistą dodatnią, stan równowagi jest niestabilny.

Równanie charakterystyczne układu równań (23) jest następujące

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (24)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)_0 = -M - 2Px_0y_0 \\ a_{12} &= \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)_0 = N - 3Py_0^2 - Px_0^2 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{21} &= \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)_0 = -N_1 + P y_0^2 + 3 P x_0^2 \\ a_{22} &= \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right)_0 = -M + 2 P x_0 y_0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Znaki części rzeczywistych pierwiastków można wyznaczyć za pomocą kryterium Routha-Hurwitza. Kryterium to stawia następujące warunki stabilności

$$-a_{11} - a_{22} > 0 \quad (26)$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \quad (27)$$

Warunek (26) implikuje $2M > 0$, czyli $\frac{1}{RC\omega} > 0$ (26a) i jest to warunek spełniony zawsze.

Relacja (27) daje drugi warunek stabilności rozwiązania okresowego czyli

$$5P^2 r_0^4 - 3Pr_0^2 \left[(1 - \alpha) - \frac{\beta^2}{2} \right] + M^2 + NN_1 > 0 \quad (27a)$$

co daje przedział r_0^2 dla rozwiązań stabilnych

$$r_0^2 \in (0, r_{01}^2) \cup (r_{02}^2, \infty)$$

gdzie

$$r_{01,2}^2 = \frac{3 \left[(1 - \alpha) - \frac{\beta^2}{2} \right] \pm \sqrt{4(1 - \alpha)^2 + \frac{21}{16} \beta^4 - 5\delta^2 + 4(1 - \alpha)\beta^2}}{10P} \quad (28)$$

4. Cykl graniczny

Określimy jeszcze możliwość występowania cykli granicznych, czyli drgań prawie okresowych. Posłużymy się sposobem wyznaczenia krzywej stykowej wg Poincaré [3].

Rozpatrując równanie (16) widać, że początek układu współrzędnych na płaszczyźnie stanu x, y jest jednym z punktów osobliwych. Weźmy pod uwagę rodzinę koncentrycznych okręgów o środku w początku punktu osobliwego, czyli w początku układu

$$x^2 + y^2 = \text{const} \quad \text{co implikuje} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (29)$$

Krzywą stykową będzie zatem opisywało równanie

$$\frac{-N_1x - My + Px(x^2 + y^2)}{-Mx + Ny - Py(x^2 + y^2)} = -\frac{x}{y} \quad (30)$$

lub

$$M(x^2 + y^2) + (N_1 - N)xy = 0 \quad (31)$$

Wprowadzając współrzędne biegunowe:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi, \end{aligned}$$

przekształcamy relację (31) do postaci

$$r^2(M + \frac{N - N_1}{2} \sin 2\varphi) = 0 \quad (32)$$

Z relacji (32) wynika, że nie można znaleźć pierścienia na płaszczyźnie stanu (wokół punktu osobliwego), wewnątrz którego istniałaby zamknięta krzywa stykowa i cykl graniczny. Wynika stąd, że w układzie opisanym równaniem (10) nie mogą powstawać drgania prawie okresowe.

Podobny rezultat daje zastosowanie do wzoru (25) kryterium Bendixona [3].

LITERATURA

- [1] Śmigiel Z.: Analiza magnetycznego konwertyora parametrycznego. Praca doktorska Politechnika Śląska, Gliwice 1979.
- [2] Śmigiel Z.: Magnetyczne konwertyory parametryczne. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Elektryka z. 68, 1979.
- [3] Hayashi Ch. Drgania nieliniowe w układach fizycznych. WNT, Warszawa 1968.
- [4] Śmigiel Z.: Charakterystyki statyczne łańcuchowego konwertyora parametrycznego. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Elektryka, z. 75, 1981.

Recenzent: doc. dr inż. Karol Lubelski

Wpłynęło do redakcji 12.XI.1982 r.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ТРАНСФОРМАТОРА

Р е з ю м е

В статье проведено анализ охемы ортогонального паратранса и определено уотойчивость по Ляпунову периодических решений. Проведено анализ переходных процессов магнитного конвертора и исследовано локальную уотойчивооть.

TOPOLOGICAL ANALYSIS AND STABILITY OF PERIODIC SOLUTIONS OF THE ORTOGONAL PARAMETRIC TRANSFORMER

S u m m a r y

The analysis of the orthogonal parametric transformer and Lyapunov stability of its periodic solutions are considered. The transient state of the magnetic converter and its local stability are examined.