ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: AUTOMATYKA z. 93 Nr kol. 969

Piotr WALICHIEWICZ

MODYFIKACJA METODY SAATY'EGO

Streszczenie. W pracy omówiono metodę Saaty ego oraz nową metodę opartą na zasadzie metody Saaty'ego i stanowiącą jej rozszerzenie. Metoda Saaty ego służy do uszeregowania cech i obliczenia ich wag. Wprowadzone rozwinięcie pozwala na analizę istotności cech badanych zjawisk ujmowanych odpowiednio w całych populacjach.

1. Wstęp. Sformułowanie problemu

Celem metody Saaty'ego jest uporządkowanie cech $A_i [i = 1,...,n]$ względem ważności w charakteryzowaniu zjawiska. Można przy tym wskazać na wiele zastosowań tej metody w ocenie programów optymalizacji [1], [2], w ocenie układów [1]. Przypomnijmy zatem pokrótce podstawy tej metody:

Uporządkowanie polega na ocenie i uszeregowaniu w kolejności cech A_i. Odbywa się to przez porównanie parami. Każda cecha porównana jest z pozostałymi. Wynikiem porównania jest ocena c_{ij} będąca wartością liczbową z ustalonej wcześniej skali. Dla przypadku zapis $A_1 \longrightarrow A_2 = 7$ oznacza, że cecha A_1 porównywana jest z cechą A_2 i cecha A_1 jest ważniejsza niż cecha A_2.

Do oceny porównania możemy posługiwać się następującymi określeniami i odpowiadającymi im wartościami liczbowymi (por. [3], [4]):

równie ważne	:= 1
niewiele ważniejsze	:= 3
ważniejsze	:= 5
dużo ważniejsze	:= 7
bezwzględnie ważniejsze	:= 9.

Istotnym elementem metody Saaty'ego jest spełnienie tzw. związku ilorazowego (ang. receprocal propearty), tj. gdy dla ocen

$$A_i \longrightarrow A_j = c_{ij}$$
$$A_j \longrightarrow A_i = c_{ji}$$

zachodzą relacje

$$c_{ij}c_{ji} = 1 \qquad c_{ji} = \frac{1}{c_{ij}}$$

Wracając do przykładu, zachodziłoby tu $A_2 \longrightarrow A_1 = \frac{1}{7}$ i mówimy, że cecha A_2 jest porównywana z cechą A_1 i cecha A_2 jest dużo mniej ważna niż cecha A_1.

Jak widać, wynikiem porównania pary cech jest liczba c_{ij}, która jest elementem macierzy $\mathbb{C} = \left[c_{ij}\right]_{nn}$. Oczywiste są tu stwierdzenia

$A_i \longrightarrow A_j = c_{ij} > 1$ A_i jest ważniejsza od A_j

$\forall_i \; A_i \longrightarrow A_i = 1$ cecha porównana sama z sobą jest jednakowo ważna

Takim przykładem porównania np. czterech cech będzie macierz opisująca całość relacji pomiędzy poszczególnymi cechami, których odpowiednie ważności zaproponował ekspert:

$$
\mathbb{C} \quad
\begin{array}{c|cccc|}
 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\
\hline
A_1 & 1 & 3 & 5 & 7 \\
A_2 & \frac{1}{3} & 1 & 3 & 5 \\
A_3 & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 & 3 \\
A_4 & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Zatem możemy stwierdzić, że macierz $\mathbb{C}$ jest pełnym wynikiem procesu porównania parami wszystkich elementów. Oceny umieszczone w macierzy są wynikiem pracy eksperta.

Ekspertowi przedkłada się do wypełnienia odpowiednio przygotowaną ankietę, np.:

	Równie ważne	Niewiele ważniejsze	Ważniejsze	Dużo ważniejsze	Bezwzględnie ważniejsze
$A_1 \longrightarrow A_2$		X			
$A_1 \longrightarrow A_3$			X		
$A_1 \longrightarrow A_4$				X	
$A_2 \longrightarrow A_3$		X			
$A_2 \longrightarrow A_4$			X		
$A_3 \longrightarrow A_4$		X			

Zakreślone prostokąty oznaczają porównania poszczególnych par cech.

Na tej podstawie wypełniamy macierz $\underline{C}$. Korzystając z różnych metod, możemy obliczyć wektor $\underline{w} = [w_1, \ldots, w_n]$ [1] (w przykładzie n=4).

Wartości w_i są wagami bezwzględnymi cech A_i. Wagi te porządkują zbiór cech względem ważności w charakterze zjawisk.

Przedstawiona powyżej metoda Saaty'ego nie daje odpowiedzi co do relacji pomiędzy cechami i wpływu tych relacji na porządkowanie oraz ocenę cech. Ocenia po prostu zjawisko bez uwzględnienia sytuacji, gdy nastąpiłoby usunięcie jednej lub kilku cech z danej populacji. Stąd też wynikła tematyka badawcza niniejszej pracy, która jest rozszerzeniem metody Saaty'ego tak, by można było uzyskać odpowiednie wagi, przy uwzględnieniu wzajemnego oddziaływania cech na siebie.

Przykłady, które wymagają takiego uwzględnienia charakteru cech i zjawisk, można znaleźć między innymi w fizjologii i patologii człowieka.

Diagnostyka ma do dyspozycji wiele metod pomiarowych, za pomocą których usiłuje ustalić zmiany parametrów mierzonych i skorelowanych z badanym zjawiskiem. Przy tym zmiany niektórych parametrów mogą się pojawiać lub nie. Należy tu jednocześnie prowadzić ocenę zjawiska przy różnych układach nie tych samych parametrów opisujących to zjawisko. Uwzględnia się również, że zmiany zachodzące w poszczególnych parametrach mogą być niemierzalne. Nadto parametry mogą także zmieniać się z innych powodów niż badane zjawisko.

2. Zmodyfikowana metoda Saaty'ego

Obecnie omówimy zasadę zmodyfikowanej metody Saaty'ego.

Niech A_k^i oznacza cechę, gdzie i,k=1,...,n. Ekspert porządkuje wszystkie cechy od najbardziej istotnej do najmniej istotnej. Wynikiem tego uporządkowania jest wektor $\underline{w}_1$. Indeks k jest określony przy pierwszym uporządkowaniu; k=1 dla cechy najbardziej istotnej, k=2 dla cechy w drugiej kolejności, aż do cechy najmniej istotnej, dla której k=n. Indeks "k" pozostaje stały przez wszystkie następne uporządkowania.

Indeks "i" w pierwszym uporządkowaniu jest równy "k".

Na przykład:

$$\underline{w}_1 = [A_1^1, A_2^2, \ldots, A_n^n]$$

Dla tak utworzonego wektora $\underline{w}_1$ tworzymy wektor $\underline{c}_1$, w którym zapisujemy wyniki porównania parami najważniejszej cechy, w tym uporządkowaniu, z każdą pozostałą cechą.

Na przykład:

$$\underline{c}_1 = [c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}]$$

gdzie:

$$c_{11} = A_1^1 \longrightarrow A_1^1 \qquad c_{1n} = A_1^1 \longrightarrow A_n^n$$

Drugi krok - to usunięcie cechy najbardziej istotnej i ponowne uporządkowanie cech.

W wektorze $\underline{w}_2$, by zachować wymiar wektorów $\underline{w}_i$ na miejscu A_1^1 piszemy zero, pozostałe cechy zapisujemy w kolejności jak w $\underline{w}_1$ (zgodnie z indeksem "k"). O kolejności cech określonej przez eksperta w drugim uporządkowaniu świadczy indeks "i".

Na przykład:

$$\underline{w}_2 = \left[0, A_2^3, A_3^2, \ldots, A_n^n\right]$$

Taki zapis oznacza, że w drugim uporządkowaniu najbardziej istotna jest cecha, która w pierwszym uporządkowaniu była na trzeciej pozycji.

Dla wektora $\underline{w}_2$ tworzymy wektor cech $\underline{c}_2$.

Na przykład: odpowiednio do poprzedniego przykładu

$$\underline{c}_2 = \left[0, c_{32}, 1, \ldots, c_{3n}\right]$$

W trzecim kroku znów eliminujemy cechę, która w drugim uporządkowaniu była najbardziej znacząca i ustalamy od nowa kolejność cech. Ta trzecia kolejność wyrażona jest tylko w indeksie $i\left[i, 3, \ldots, n\right]$.

Na przykład:

$$\underline{w}_3 = \left[0, A_2^3, 0, A_4^4, \ldots, A_n^n\right]$$

co oznacza, że najbardziej znacząca jest cecha A_2^3 i

$$\underline{c}_3 = \left[0, 1, 0, c_{24}, \ldots, c_{2n}\right]$$

Postępujemy tak n-krotnie, aż w wektorze $\underline{w}_n$ pozostaje tylko jedna cecha.

Na przykład:

$$\underline{w}_n = \left[0, \ldots, A_i^n, \ldots, 0\right]$$

Odpowiada temu wektor $\underline{c}_n$

$$\underline{c}_n = \left[0, \ldots, \underset{(i)}{1}, \ldots, 0\right]$$

Należy zaznaczyć, że właśnie taka procedura pozwala na wyeliminowanie związków pomiędzy cechami przy danym uszeregowaniu.

Cechy charakteryzujące zjawisko mogą grupować się w podzbiory. Cechy w jednym podzbiorze są istotniejsze od cech w pozostałych podzbiorach tylko wtedy, gdy mamy pewność co do zaistnienia najbardziej istotnej cechy w tym podzbiorze. Usunięcie najbardziej znaczącej cechy może spowodować wysunięcie się na najwyższą pozycję cechy z innego podzbioru, co w konsekwencji wpływa na uporządkowanie danych cech w omawianym wektorze $\underline{w}_i$.

Po otrzymaniu n wektorów $\underline{w}_i$ oraz $\underline{c}_i$, tworzymy macierz $\mathbb{C}$. Tworzymy ją tak, aby jedynki będące wynikiem relacji c_{kk} tworzyły przekątną główną macierzy.

Na przykład:

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ponieważ oceny istotności podawane są dla poszczególnych uporządkowań i przy różnych liczbach zjawisk, to wagi wyliczone z poszczególnych ciągów zawierających oceny istotności mogą być różne. Naszym zadaniem jest uporządkowanie zbioru wszystkich cech według istotności. Dlatego za Saatym przyjmujemy, że oceny istotności w i-tym oraz j-tym ciągu wybranych zjawisk podane w wektorach ocen $\underline{c}_i$ jako współrzędne c_{ik} oraz c_{ij} są dla pozycji "k" związane odpowiednio wagami w_{ik} oraz w_{jk} na ogół różnymi od zera, gdy "k" jest numerem zjawiska pierwszego uporządkowania; i,j są numerami ciągu, z którego wagę wyliczamy.

Możemy zatem uznać, że zachodzą następujące zależności:

$$c_{ik} = \frac{w_{ii}}{w_{ik}}$$

$$c_{ik}c_{kj} = \frac{w_{ii}}{w_{ik}}\,\frac{w_{kk}}{w_{kj}} = \frac{w_{ii}}{w_{ij}}\,\frac{\frac{w_{ij}}{w_{kj}}}{\frac{w_{ik}}{w_{kk}}}$$

skąd wynika, że

$$\underset{\substack{i\leq j \\ 1\leq i,j,k\leq n}}{\forall} \frac{w_{ik}}{w_{jk}} \overset{df}{=} a_k^{ij}$$

$$\underset{\substack{i\leq j \\ 1\leq i,j,k\leq n}}{\forall} \frac{c_{ik}c_{kj}}{c_{ij}} = \frac{a_j^{ik}}{a_k^{ik}} := b_{jk}^{ik}\ R^{+} \cup \{0, +\infty\} \qquad (1)$$

Takie określenie wartości b_{jk}^{ik} jest związane z dopuszczeniem mianownika równego 0 pod warunkiem, że licznik występuje w postaci iloczynu, którego jeden czynnik jest równy zeru zaś drugi różny od zera.

Wtedy to określamy:

$$\forall_{a \in R^+} \quad \frac{0 \cdot a}{0} = a; \quad \frac{a}{0} = +\infty$$

Symbol $\frac{0}{0}$ uważamy za pozbawiony sensu.

Przy poprawnej ocenie mamy:

$$\left. \begin{array}{l} c_k^i c_i^j = c_k^j \\ (1) \end{array} \right\} \Longrightarrow b_{jk}^{ik} = 1$$

Wartości b_{jk}^{ik} pozwalają obliczyć współczynnik zgodności ocen relacji pomiędzy cechami A_k oraz A_j dla wszystkich uporządkowań.

Z uwagi na fakt, że na ogół $b_{jk}^{ik} \neq 1$ wprowadzamy wyrażenie b_{jk} obliczane następująco:

$$\begin{cases} b_{jk}^{ik} = +\infty \Longrightarrow b_{jk} = \max\limits_{i \in I} \left\{ b_{jk}^{ik} \right\} \\ \qquad I = \left\{ 1 \leqslant i \leqslant n \;\middle|\; b_{jk}^{ik} \neq 0, b_{jk}^{ik} \neq 1,\ b_{jk}^{ik} \neq +\infty \right\} \\ b_{jk}^{ik} \in \{0, 1\} \Longrightarrow b_{jk} := 1 \\ \forall_{i,m}\ b_{jk}^{ik} = b_{jk}^{mk} \neq 0 \Longrightarrow b_{jk} := b_{jk}^{ik} \\ \exists\ b_{jk}^{ik} \neq b_{jk}^{mk} \Longrightarrow b_{jk} = \inf\limits_{i \in J} \left\{ b_{jk}^{ik} \right\} \\ \qquad J = \left\{ 1 \leqslant i \leqslant n \;\middle|\; b_{jk}^{ik} \neq 0, b_{jk}^{ik} \neq 1 \right\} \\ b_{ii} := b_{ii}^{ii} \end{cases}$$

Musimy przy tym rozważyć dwa przypadki:

1. $(b_{jk} \in \mathcal{C}_2 \Longrightarrow b_{jk} = 1) \wedge (b_{jk} = 1 \Longrightarrow b_{jk} \in \mathcal{C}_2)$

2. $\exists (b_{jk} \neq 1) \in \mathcal{C}_2$

gdy

$$\mathcal{C}_2 = [c_{ij}]_{nn} \quad \text{gdzie} \quad c_{jk}c_{kj} = 1 \quad \underset{1 \le i,j \le n}{\forall} b_{ij} := c_{ij}$$

W pierwszym przypadku budujemy macierz Saaty'ego biorąc

$$c_{jk}c_{kj} = 1$$

W drugim tworzymy macierz Saaty'ego $\mathcal{C}_2$, która budowana jest z elementów spełniających związki:

$$\underset{1 \le i,j \le n}{\forall} \begin{matrix} c_{jk}c_{kj} = 1 \\ c_{ij} = b_{ji} \end{matrix}$$

Podsumowując, dla pierwszego przypadku w związku z zależnością $c_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$ mamy za Saatym wektor ocen $\underline{w}$.

W drugim przypadku możemy uznać, że $\underline{w}(a) = [a_1, \ldots, a_n]$ został utworzony, gdy braliśmy:

$$b_{ij} := \frac{a_i}{a_j}, \quad a_m^{ij} := \frac{w_{im}}{w_{jm}}, \quad b_{ji} = c_{ij} \in \mathcal{C}_2$$

Mając $\underline{w}(a)$ będziemy z definicji uważać, że mamy wagi istotności jako współrzędne wektora $\underline{w}$ przy następujących ograniczeniach:

$$\underline{w} = \left[1, \frac{1}{c_{12}}, \ldots, \frac{1}{c_{1n}}\right] \quad \text{gdy} \quad \underset{2 \le i \le n}{\forall} a_i = 1$$

$$\underline{w} = [1, b_2, \ldots, b_n] \quad \text{gdy} \quad \underset{2 \le i \le n}{\forall} \begin{cases} a_i = 1 \Longrightarrow b_i = \dfrac{1}{c_{1i}} \\ a_j \le a_i < 1 \Longrightarrow b_j \le b_i < \inf\limits_{a_{ip}=1} \left\{\dfrac{1}{c_{ij}}\right\} \end{cases}$$

Wynik, w którym $a_i < 1$, informuje o rozbieżności wag istotności tego samego zjawiska na pozycji "i", jaką ekspert ustanowił dla nich w różnych ciągach ocen. Nadto taki wynik sugeruje i to, że trudno jest ocenić obserwowane zjawisko, a w konsekwencji jego wagi istotności w różnych ciągach ocen nie są takie same.

Powyższy algorytm prowadzący do wyznaczenia wektora wag $\underline{w}$ zilustrujemy przykładami zawartymi w dalszej części pracy.

3. Przykłady

Rozpatrzmy dwa przykłady, których celem jest ilustracja umożliwiająca śledzenie poszczególnych kroków metody. Pierwszy przykład jest o charakterze ogólnym, drugi dotyczy problemu medycznego.

Przykład 1

Rozpatrzmy zjawisko charakteryzujące się czterema cechami $A_1,\ldots,A_4$. Ekspert uporządkował te cechy i ocenił ich zależności.

I. W pierwszym kroku cechy zostały uporządkowane od najważniejszej do najmniejszej ważnej w następującej kolejnoćci A_1,A_2,A_3,A_4. Zapisujemy to jako wektor

$$\underline{w}_1 = [A_1, A_2, A_3, A_4]$$

Dla tak uszeregowanych ocen dokonujemy oceny ważności wszystkich cech względem cechy najważniejszej:

	Równie ważne	Niewiele ważniejsze	Ważniejsza	Dużo ważniejsza	Bezwzględnie ważniejsza
$A_1 \rightarrow A_1$	X				
$A_1 \rightarrow A_2$		X			
$A_1 \rightarrow A_3$			X		
$A_1 \rightarrow A_4$				X	

Wyniki porównania zapisane wartościami liczbowymi:

$A_1 \rightarrow A_1 = 1 \qquad A_1 \rightarrow A_3 = 5$

$A_1 \rightarrow A_2 = 3 \qquad A_1 \rightarrow A_4 = 7$

Otrzymane wyniki zapisujemy jako wektor $\underline{c}_1$, gdzie:

$$\underline{c}_1 = [1\ 3\ 5\ 7]$$

II. W drugim kroku usuwamy cechę, którą ekspert uznał za najważniejszą w pierwszym uporządkowaniu i przedstawiamy do ponownej oceny ekspertowi zmniejszoną pulę cech. Metoda zakłada, że owa usunięta cecha jest dla eksperta niedostępna przy drugim uporządkowaniu i nie może być brana pod uwagę. Dlatego ekspert musi pozostałe cechy uporządkować od początku, biorąc pod uwagę ewnetualne związki zachodzące między cechami. Cechy uporządkowano następująco:

$$\underline{w}_2 = [0, A_3, A_4, A_2]$$

(Dopisane zero pozwala na zachowanie wymiaru wektora wag). Wyniki porównań przedstawiono w tabeli:

	Równie ważna	Niewiele ważniejsza	Ważniejsza	Dużo ważniejsza	Bezwzględnie ważniejsza
$A_3 \longrightarrow A_3$	X				
$A_3 \longrightarrow A_4$		X			
$A_3 \longrightarrow A_2$				X	

Przypisane zostają następujące oceny:

$A_3 \longrightarrow A_3 = 1$ $\quad A_3 \longrightarrow A_4 = 3$ $\quad A_3 \longrightarrow A_2 = 7$

Na tej podstawie zapisujemy wektor $\underline{c}_2$

$$\underline{c}_2 = [0\ 1\ 3\ 7]$$

Postępując analogicznie:

III. $\underline{w}_3 = [0, 0, A_2, A_4]$ $\qquad \underline{c}_3 = [0\ 0\ 1\ 3]$

IV. $\underline{w}_4 = [0, 0, 0, A_4]$ $\qquad \underline{c}_4 = [0\ 0\ 0\ 1]$

<u>Rozwiązanie</u>

1. Przeredagujmy zapis otrzymany od eksperta. Cechy z omawianego przykładu oznaczmy za pomocą dwóch indeksów "i" oraz "k", gdzie i,k=1,...,4. Indeks "k" jest określony przy pierwszym uporządkowaniu oraz jest zgodny z kolejnością cech względem relacji ważności. Indeks "k" pozostaje nie zmieniony przez wszystkie uporządkowania. Indeks "i" jest zmienny w każdym uporządkowaniu oraz jest zgodny w danym uporządkowaniu z kolejnością cech uporządkowanych w relacji ważności. Otrzymany zapis wygląda następująco:

$$\underline{w}_1 = \left[A_1^1, A_2^2, A_3^3, A_4^4\right] \qquad \underline{c}_1 = \begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 7\end{bmatrix}$$

$$\underline{w}_2 = \left[0, A_2^4, A_3^2, A_4^3\right] \qquad \underline{c}_2 = \begin{bmatrix}0 & 7 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$\underline{w}_3 = \left[0, A_2^3, 0, A_4^4\right] \qquad \underline{c}_3 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$\underline{w}_4 = \left[0, 0, 0, A_4^4\right] \qquad \underline{c}_4 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

2. Z otrzymanych wektorów $\underline{c}_i$ budujemy macierz C. Cechą charakterystyczną tej macierzy jest przekątna główna utworzona przez jedynki. Jest to wynikiem charakteru tabel relacji wypełnionych przez eksperta; tzn. oceny cech względem najważniejszej cechy w danym uporządkowaniu.

C =

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	3	5	7
A_2	0	1	0	3
A_3	0	7	1	3
A_4	0	0	0	1

Na podstawie takiej macierzy możemy otrzymać macierz zgodności ocen. W tym celu, zgodnie z podanym w tekście wzorem, sprawdzamy zgodność ocen w różnych uporządkowaniach.

3. Sprawdzenie zgodności ocen dokonujemy przez obliczenie współczynników b_{jk}^{ik}.

$i=1 \quad j=1 \quad b_{11}^{11}=1 \quad b_{12}^{12}=0 \quad b_{13}^{13}=0 \quad b_{14}^{14}=0$

$j=2 \quad b_{21}^{11}=1 \quad b_{22}^{12}=1 \quad b_{23}^{13}=\frac{35}{3} \quad b_{24}^{14}=0$

$j=3 \quad b_{31}^{11}=1 \quad b_{32}^{12}=0 \quad b_{33}^{13}=1 \quad b_{34}^{14}=0$

$j=4 \quad b_{41}^{11}=1 \quad b_{42}^{12}=\frac{9}{7} \quad b_{43}^{13}=\frac{15}{7} \quad b_{44}^{14}=1$

$i=2 \quad j=2 \quad b_{21}^{21}=0 \quad b_{22}^{22}=1 \quad b_{23}^{23}=0 \quad b_{24}^{24}=0$

$j=3 \quad b_{31}^{21}=+\infty \quad b_{32}^{22}=1 \quad b_{33}^{23}=1 \quad b_{34}^{24}=1$

$j=4 \quad b_{41}^{21}=\frac{7}{3} \quad b_{42}^{22}=1 \quad b_{43}^{23}=0 \quad b_{44}^{24}=1$

$i=3 \quad j=3 \quad b_{31}^{31}=0 \quad b_{32}^{32}=0 \quad b_{33}^{33}=1 \quad b_{34}^{34}=0$

$j=4 \quad b_{41}^{31}=0 \quad b_{42}^{32}=7 \quad b_{43}^{33}=0 \quad b_{44}^{34}=1$

$i=4 \quad j=4 \quad b_{41}^{41}=0 \quad b_{42}^{42}=0 \quad b_{43}^{43}=0 \quad b_{44}^{44}=1$

4. Na podstawie współczynników b_{jk}^{ik} obliczamy współczynniki b_{jk}, które są elementami macierzy $\not{B}$.

$b_{11}=1$

$b_{21}=1 \quad b_{22}=1$

$b_{31}=1 \quad b_{32}=1 \quad b_{33}=1$

$b_{41}=1 \quad b_{42}=1 \quad b_{43}=\frac{15}{7} \quad b_{44}=1$

5. Z elementów b_{jk} tworzymy macierz $\not{B} = b_{kj\ 44}$ spełniającą warunek $b_{ik} = b_{ij}b_{jk}$

$$\not{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \frac{15}{7} \\ 1 & 1 & \frac{7}{15} & 1 \end{bmatrix}$$

6. Za Saatym na podstawie macierzy $\not{B}$ możemy wyliczyć wagi cech. Można tego dokonać np. stosując metodę średniej geometrycznej

$$w_j = \sqrt[4]{\prod_{k=1}^{4} b_{kj}}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$w_1 = 1 \qquad w_3 = \sqrt[4]{\frac{15}{7}}$$

$$w_2 = 1 \qquad w_4 = \sqrt[4]{\frac{7}{15}}$$

zykład 2

Do postawienia diagnozy zawału serca lekarz może skorzystać:

1 z wywiadu A_1 (rozmowa z pacjentem)

2 z analizy EKG A_2

3 z badań laboratoryjnych A_3

4 z badania fizykalnego A_4 (osłuchanie pacjenta)

I. Metoda Saaty'ego

1. Lekarz wypełnia ankietę:

	Równie ważne	Niewiele ważniejsze	Ważniejsze	Dużo ważniejsze	Bezwzględnie ważniejsze
wywiad → EKG			X		
wywiad → badania lab.				X	
wywiad → badania fiz.					X
EKG → badania lab.			X		
EKG → badania fiz.				X	
badania lab. → badania fiz.			X		

2. Wypełniamy macierz $\not{C}_2$.

$\not{C}_2$ =

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	5	7	9
A_2	0.2	1	5	7
A_3	.1428	0.2	1	5
A_4	.11	.1428	0.2	1

3. Otrzymujemy wagi bezwzględne

$w_1 = 0.69948$ $w_3 = 0.08247$

$w_2 = .16608$ $w_4 = .05197$

II. Zmodyfikowana metoda Saaty'ego

1. Lekarz porządkuje cechy:

$$\underline{w}_1 = \left[A_1^1, A_2^2, A_3^3, A_4^4\right] \triangleq \left[\text{wywiad, EKG, bad. lab., bad. fiz.}\right]$$

Wektorowi $\underline{w}_1$ odpowiada wektor $\underline{c}_1 = \left[1\ 5\ 7\ 9\right]$

$$\underline{w}_2 = \left[0, A_2^2 A_3^3 A_4^4\right] \triangleq \left[\text{EKG, bad. lab., bad. fiz.}\right]$$

$$\underline{c}_2 = \left[0\ 1\ 5\ 7\right]$$

$$\underline{w}_3 = \left[0,0,A_3^3,A_4^4\right] \mathrel{\hat{=}} \left[\text{bad. lab., bad. fiz.}\right]$$

$$\underline{c}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{w}_4 = \left[0,0,0,A_4^4\right] \mathrel{\hat{=}} \left[\text{bad. fiz.}\right]$$

$$\underline{c}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Tworzymy macierz $\not{C}$.

$$\not{C} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mamy warunki do utworzenia macierzy $\not{C}_2$, która spełnia warunki macierzy Saaty'ego

$$\not{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3.57 & 3.89 \\ 1 & 0.28 & 1 & 3.57 \\ 1 & 0.257 & 0.28 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Otrzymujemy wagi:

$w_1 = 0.27681$ $\quad$ $w_3 = 0.17184$

$w_2 = .44819$ $\quad$ $w_4 = .10316$

4. Podsumowanie na tle pokazanych przykładów

Porównując wyniki uzyskane metodą Saaty'ego z wynikami uzyskanymi po zastosowaniu modyfikacji, widać różnicę w uzyskanych kolejnościach cech w wyniku wyliczonych wag.

W pierwszym przypadku kolejność cech jest następująca: wywiad, EKG, badania laboratoryjne, badanie fizykalne.

Natomiast w drugim przypadku otrzymano: EKG, wywiad, badania laboratoryjne, badanie fizykalne.

Taka kolejność cech w drugim przypadku jest bezpośrednio spowodowana silniejszym zaznaczeniem relacji ważności cechy A_2 względem cech A_3 i A_4, niż mogły to wykazać relacje ważności z cechą A_1 względem cech A_2, A_3, A_4. Dla obu tych przypadków odpowiedni zapis wektorów cech był następujący:

$$\underline{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$
$$\underline{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Tak różniące się wyniki możemy skomentować następująco:

Lekarz stykający się z danym pacjentem po raz pierwszy musi zdawać sobie sprawę, że badanie EKG w podstawowej konfiguracji elektrod może nie wykazać zmian w wyniku przebytego zawału serca. Dzieje się tak z dwóch powodów:

1) zawał został przebyty tak niedawno, że charakterystyczne zmiany w obrazie EKG jeszcze nie występują (zwykle występują po kilku godzinach od zawału),
2) umiejscowienie zmian zawałowych w sercu jest takie, że zmiany w obrazie EKG nie występują albo są niecharakterystyczne.

Wywiad, czyli informacja uzyskana od pacjenta, pozwala na wysunięcie hipotezy, że pacjent przebył zawał, gdy wywiad jest charakterystyczny. Należy jednak pamiętać, że informacja uzyskana od pacjenta jest subiektywna.

Może też wystąpić sytuacja, gdy wywiad jest niecharakterystyczny, natomiast badanie EKG wykazuje przebyty zawał. Niemniej lekarz już na podstawie charakterystycznego wywiadu powinien rozpocząć postępowanie lecznicze. To postępowanie nie jest zagrożeniem dla życia pacjenta, nawet gdyby zaistniała sytuacja, że zawał jednak nie nastąpił.

Należy zaznaczyć, że diagnoza zawału jest pewna tylko wtedy, gdy badanie EKG wykaże zmiany świadczące o przebytym zawale. W tym kierunku też idzie postępowanie diagnostyczne w szpitalu. W zasadzie diagnozę uznaje się za pewną, gdy w różnych konfiguracjach elektrod badanie EKG ujawni zmiany świadczące o przebytym zawale.

LITERATURA

[1] F.A. Lootsma: Performance Evaluation of Non-linear Optimization Methods via Multi-criteria Decision Analysis and via Linear Model Analysis. Reports of the Department of Mathematics and Informatics No 81-15, Delft.

[2] M. Kok and F.A. Lootsma: Pairwise-comparison Methods in Multi-objective Programming, with Applications in a Long-term Energy-planning Model. Reports of the Department of Mathematics and Informatics No 84-19 Delft.

[3] K. Légrády, F.A. Lootsma, J. Meisner, F. Schellemans: Multi-criteria Decision analysis to Aid Budget Allocation. Reports of the Department of Mathematics and Informatics No 83-25, Delft.

[4] F.A. Lootsma, J. Meisner, F. Schellemans: Multi-criteria Decision Analysis as an Aid to Strategic Planning of Energy Research and Development. Reports of the Department of Mathematics and Informatics No 84-02, Delft.

Recenzent: Prof. dr hab. Edmund Lipiński

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА СААТИ

Р е з ю м е

В работе обсуждается метод Саати а также новый метод, основанный на принципе Саати, являющийся его расширением. Метод Саати служит упорядочению свойств и исчислению их весов. Подсчитанные весы свидетельствуют о том, какие свойства эксперт признаёт самыми основными среди других свойств. Введённый новый метод учитывает ситуацию отсутствия некоторого количества свойств во время оценки всего ансамбля свойств, характеризующих явление. В случае систематизированного устранения свойств, раскоываются зависимости между свойствами. Эти зависимости имеют влияние на окончательное иеррархическое упорядочение свойств. Эксперт оценивает очерёдно группы свойств. В первой группе находятся все свойства. Во второй группе отсутствует свойство, признанное самым важным в первой группе. Так поступают до тех пор, пока в последней группе останется только одно свойство. Общий анализ оценок для всех групп даёт результат в виде весов, подобно тому, как это имеет место в методе Саати. Полученные весь указывают на правильность оценки данного свойства во всех, указанных эксперту к оценке, группах свойств.

SAATY METHOD MODYFICATION

S u m m a r y

The paper deals with a method introduced by Saaty and a its extension. The original method is utilized in order to arrange a set of features (objects) with respect to their importance. An essence of the new method is to discuss a case in which a subset of features in a process of pairwise comparison is neglected. In situation of systematic deletion of the features it is possible to det4ct relationnips between the features. An idea of this deletion is to neglect the most significant feature (with the highest degree of importance) and performing pairwise comparison for the remaining set of features. The process is completed when only one feature is left. Afterwards an analysis performed for all the subsets formed provides an order of the features in the same form as obtained for the original Saaty s method.