

Andrzej Dubina

Instytut Organizacji Przemysłu Maszynowego, Warszawa

## ALGORYTM BUDOWY SIECI FRONTÓW CZYNNOŚCI

**Streszczenie.** Praca omawia zasady budowy sieci frontów czynności - grafu alternatywno-decyzyjnego upraszczającego m.in. rozdział zasobów w słabo spójnej sieci czynności opisującej kompleks operacji. Opisano również procedurę obliczeń wykonywanych przy wykorzystaniu sieci frontów czynności podczas rozwiązywania zadania rozdziału zasobów.

### 1. Wstęp

Praca dotyczy optymalizacji rozdziału zasobów w kompleksach operacji, których modelem jest słabo spójna, kanoniczna, obciążona sieć czynności. Wykazano, że dla sieci czynności można skonstruować graf o postaci sieci alternatywno-decyzyjnej, taki, w którym każda ścieżka pełna odpowiada silnie spójnej sieci kanonicznej powstającej w wyniku ustalenia uporządkowania zdarzeń w analizowanej sieci słabo spójnej za pomocą czynności fikcyjnych [ 1]. 1/ Graf ten został nazwany siecią frontów czynności. Wszystkie znane dotychczas metody wyznaczania rozdziału zasobów w sieci słabo spójnej (dokładna oraz większość znanych metod przybliżonych) wymagają, po wprowadzeniu dodatkowych czynności fikcyjnych, przeglądu wszystkich dopuszczalnych uporządkowań zdarzeń analizowanej sieci opisującej kompleks operacji [ 4, 7]. Zastosowanie sieci frontów czynności /sieci frontów/ umożliwiło przedstawienie zadania rozdziału zasobów w sieci słabo spójnej jako pojedynczego zadania programowania liniowego.

W pracy została przedstawiona propozycja algorytmu budowy sieci frontów oraz zarys procedury przeprowadzania obliczeń na jej obciążeniach. Dla większości zastosowań można ograniczyć się do sieci frontów, w której występują wyłącznie fronty maksymalne, tj. fronty określone na danej sieci, takie, które nie zawierają się w żadnych innych. 2/

1/ Przypomnijmy, że w sieci silnie spójnej istnieje ścieżka między każdą parą zdarzeń.

2/ Do praktyki programowania sieciowego pojęcie frontu maksymalnego, tworząc nową metodę rozdziału zasobów, wprowadził Z. Rzemkowski [ 5].

## 2. Sformułowanie problemu

Dana jest kanoniczna sieć czynności:  $S / X, U /$ , określająca zależności pomiędzy czynnościami projektu, w której:  $X = \{x_k\}$  - zbiór wierzchołków,  $U = \{u_i\}$  - zbiór czynności,  $F = f_i$  - zbiór frontów, gdzie:  $i = 1, 2, \dots, I$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ ,  $l = 1, 2, \dots, L$  oraz  $Z_i = Z / u_i /$  - zapotrzebowanie czynności "i" na zasób,  $d_i = d / u_i /$  - czas wykonania czynności "i".  
W celu precyzyjnego opisu zagadnienia zostaną podane dalsze niezbędne definicje.

- Definicja 1. Front czynności /front/ jest to zbiór czynności, które mogą być wykonywane jednocześnie.
- Definicja 2. Fronty  $f_e$  i  $f_g$  są sprzeczne, jeśli istnieją:  $u_m, u_n, u_p, u_r$ , dla których zachodzi:  $(u_m, u_p) \in f_e$  oraz  $(u_n, u_r) \in f_g$  takie, że:  $u_n > u_m$  oraz  $u_p > u_r$ .
- Definicja 3. Realizacja przedsięwzięcia /realizacja/ jest to ciąg liczb rzeczywistych /nie wszystkich równych zero/ przyporządkowanych jednoznacznie frontom określonym na sieci opisującej przedsięwzięcie.
- Definicja 4. Realizacja jest realizacją dopuszczalną, jeśli front  $f$  może być realizowany dopiero wtedy, gdy zostaną zrealizowane wszystkie czynności poprzedzające czynności wchodzące w skład frontu  $f$ .  
Definicje 1 - 4 podano zgodnie z [2, 4].
- Definicja 5. Realizacja dopuszczalna jest realizacją optymalną, jeśli ciąg liczb przyporządkowanych frontom  $/t_1 \leftrightarrow l/$  spełnia warunek:

$$\sum_{l=1}^L t_l + \sum_{(f_e, f_g) \in F_S} t_e \cdot t_g = \min$$

Indeks frontu:  $j = 1, 2, \dots, J$ ,  $f_e, f_g$  - para frontów sprzecznych,  $F_S \in 2^F / F_S$  jest to zbiór frontów sprzecznych. 3/

W realizacji dopuszczalnej nie występują fronty o zapotrzebowaniu na zasób przekraczającym limit:  $Z_j > Z_{\max} / \rightarrow t_j = 0 /$ .  
Zapotrzebowanie frontu na zasób jest sumą zapotrzebowań wchodzących w jego skład czynności.

3/ Wszystkie pary frontów sprzecznych można określić ex definitione. Definicja 5 obowiązuje dla sieci słabo i silnie spójnych.

Definicja 6. Siecią frontów czynności /SPC/ będziemy nazywać graf alternatywno-decyzyjny  $F \langle X, A, K \rangle$  określony na sieci czynności  $S$ , w którym:

$$\begin{aligned} X &= \{x_k\} - \text{zbiór wierzchołków kanonicznych,} \\ A &= \{a_l\} - \text{zbiór wierzchołków alternatywnych,} \\ K &= \{k_m\} - \text{zbiór krawędzi,} \end{aligned}$$

gdzie:  $k = 1, \dots, K$ ,  $l = 1, \dots, L$ ,  $m = 1, \dots, M$ ,  
przy czym: wierzchołkom kanonicznym przypisujemy zbiory zdarzeń w  $S$ , a krawędziom /ciągom krawędzi/ łączącym wierzchołki - sekwencje frontów zapewniających realizację kolejnych zdarzeń.

Ponadto wszystkie zdarzenia i czynności  $F$  numerujemy zgodnie z typowymi regułami porządkowania elementów sieci ([2] s. 123).

$F$  - charakteryzuje się następującymi własnościami:

1. Posiada jeden wierzchołek początkowy i jeden wierzchołek końcowy.
2. Jest bezkonturowy.
3. Zawiera wierzchołki decyzyjne wyłącznie typu LUB/LUB. 4/

Przykładową, najprostszą sieć czynności wraz z określonymi na niej siecią frontów i siecią frontów maksymalnych przedstawiają rys. 1-3.

Definicja 7. Siecią frontów maksymalnych /SFM/ będziemy nazywać sieć frontów czynności, w której występują wyłącznie krawędzie odpowiadające frontom maksymalnym, tj. frontom głównym w sieciach silnie spójnych określonych przez ścieżki pełne w tej sieci.

Przykład takiej sieci sformułowano po raz pierwszy w ([1] s. 60).

Określenie frontów maksymalnych podaje [5].

Rozważamy zadanie wyznaczenia harmonogramu realizacji przedsięwzięcia opisanego siecią  $S$ , tj. ciągu par  $(1, t_k)$ .

Jest to zadanie programowania nieliniowego z warunkiem wg definicji [5] jako funkcją celu. Postać ograniczeń jest typowa dla zadań programowania sieciowego /por. [2] model MS II/. Aby sprowadzić ten problem do zadania programowania liniowego, należy wyznaczyć SPX, a następnie dokonać przekształcenia sieci frontów czynności /SPC/.

Dążymy do tego, aby sformułować zadanie programowania liniowego odpowiadające takiemu uporządkowaniu zdarzeń w sieci słabo spójnej, które nie eliminuje rozwiązania optymalnego.

4/ Dla realizacji dowolnego następnika wystarcza realizacja tylko jednego poprzednika wierzchołka decyzyjnego (por. [1] s. 61).

### 3. Algorytm budowy SFC na przykładzie sieci frontów maksymalnych

W pracy zostanie przedstawiona jedynie teoretyczna propozycja algorytmu budowy sieci frontów maksymalnych i dlatego poszczególne kroki zostaną opisane słownie. Opis ten będzie uzupełniony krótkim komentarzem.

0. Dana jest sieć czynności  $S \langle X, U \rangle$ . 5/

1. Wyznaczamy zbiór frontów maksymalnych w  $S$ .

Algorytm wyznaczania zbioru frontów maksymalnych podaje [6].

2. Na zbiorze frontów maksymalnych określamy relację bezpośredniego poprzedzania.

Przyjmujemy, że fronty poprzedzają się bezpośrednio, jeśli zawierają odpowiednią parę poprzedzających się czynności i nie są sprzeczne.

3. W warstwie  $1^0$   $F$  umieszczamy front, który nie posiada poprzednika. W warstwie  $2^0$  następniki tego frontu aż do warstwy ostatniej, w której występuje front maksymalny nie posiadający następników. Ilość warstw w SPK wynosi  $n - 1$ . Łatwo spostrzec, że dla każdego uporządkowania zdarzeń w pierwszej i ostatniej warstwie występują te same fronty główne, a w poszczególnych warstwach fronty sprzeczne, przy czym w warunkach sprzeczności zamiast relacji poprzedzania występuje relacja bezpośredniego poprzedzania czynności.

4. Przyjmujemy uporządkowane w warstwy fronty maksymalne jako częściowo uporządkowane krawędzie. Zdarzenie początkowe oznaczamy jako kanoniczne. Podobnie zdarzenie końcowe, jeśli mają tylko jeden następnik, również oznaczamy jako zdarzenia kanoniczne. Zdarzenia końcowe mające dwa lub więcej następników oznaczamy jako zdarzenia decyzyjne.

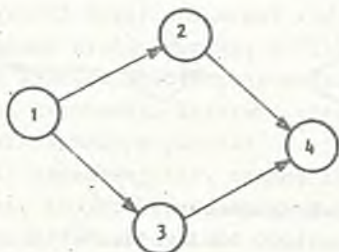
5. Tworzymy ścieżki w  $F$  łącząc następniki z poprzednikami zgodnie z relacją bezpośredniego poprzedzania określoną na zbiorze frontów maksymalnych.

Zdarzenie w sieci frontów oznaczamy i numerujemy zgodnie z zasadą przedstawianą na rys. 3.

Oszacowanie złożoności obliczeniowej podanej propozycji algorytmu pozwala stwierdzić, że jest to algorytm ograniczony wielomianowo liczbą frontów, czyli algorytm o złożoności pseudowielomianowej dla przyjętej jako parametr liczby czynności. /Czas realizacji frontów są ograniczone od góry/.

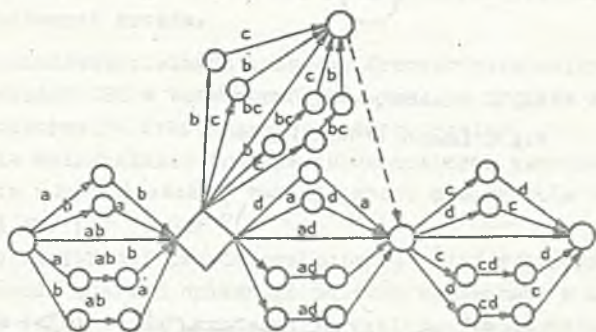
Rys.3 i rys.4 ilustrują zastosowanie algorytmu.

5/ Sieć, agregując czynności, należy doprowadzić do postaci, w której nie występują czynności fikcyjne.



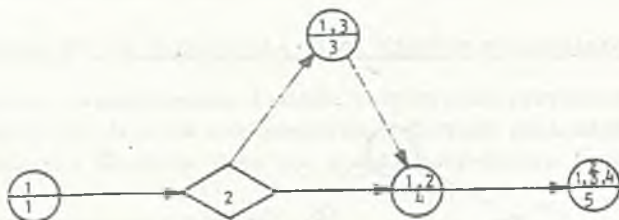
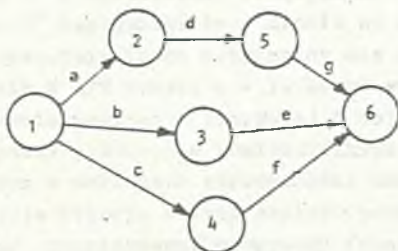
Rys.1. Prosta sieć czynności

Fig.1. A simple Activity Net.



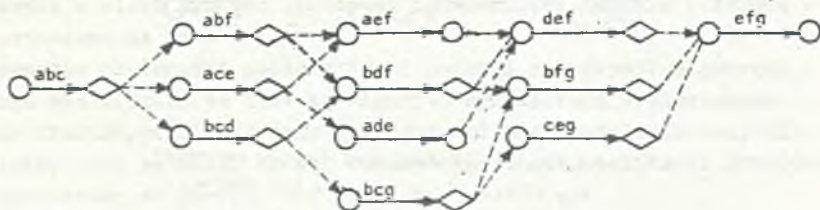
Rys.2. Przykładowa sieć frontów czynności

Fig.2. Example of Directly Cut Sets Net.

Rys.3. Przykładowa sieć frontów maksymalnych /N<sup>o</sup>1/Fig.3. Example of Maximaly Directly Cut Sets Net./N<sup>o</sup>1/

Rys.4. Przykładowa sieć czynności

Fig.4. Example of Activity Net.

Rys.5. Przykładowa sieć frontów maksymalnych /N<sup>o</sup> 2/Fig.5. Example of Maximaly Directly Cut Sets Net./N<sup>o</sup>2/

4. Zasady obliczeń na obciążeniach sieci frontów czynności

Obliczenia na obciążeniach sieci frontów czynności /SPC/ i jej wersji uproszczonej sieci frontów maksymalnych /SPM/ winny umożliwić wyznaczenie w rozpatrywanej sieci czynności /S/ takiego uporządkowania zdarzeń, w którym nie ulega wyeliminowaniu realizacja optymalna. Ze względu m.in. na sprzeczność frontów każdorazowo należy rozpatrywać określone warunki dopuszczalności zasobowej. Wykazano, por. [1], że fronty sprzeczne występują alternatywnie, a ponadto, że zmiana warunków dopuszczalności zasobowej, tj. zmiana zbioru frontów niedopuszczalnych zasobowo, zmienia długości ścieżki krytycznej w S.

Za pomocą znanych metod można obliczyć dla S w warunkach nie istnienia ograniczeń zasobowych najkrótszy czas realizacji przedsięwzięcia opisanego siecią S, a także najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy realizacji zdarzeń [2,3].

Dla ograniczenia dostępności zasobu /ów/ postępujemy następująco. Modyfikujemy zadanie dualne programowania liniowego umożliwiające wyznaczenie czynności krytycznych /zmiennie odpowiadają czynnościom, por. [3] s.300/; poprzez wprowadzenie czynności fikcyjnych zakazujących realizacji określonych frontów.

Dla tak postawionego zadania obliczamy czas "nowej" ścieżki krytycznej. /Wyznaczenie ścieżki wymaga rozwiązania zadania programowania biliniowego/. Po ustaleniu nowej ścieżki krytycznej dalsze obliczenia wymagają realizacji poniższych kroków.

1. Ustalenie niedopuszczalnych zasobowo frontów maksymalnych.
2. Zmiana obciążeń SPM w taki sposób, że zamiast frontów maksymalnych wystąpią maksymalne fronty zasobowo dopuszczalne.  
/Określenie maksymalnych frontów dopuszczalnych zasobowo - [5] s.417/.
3. Znaleźnienie wśród ścieżek P takiej, która nie wydłuża ścieżki krytycznej S / [1] s.61/ 6/
4. Obliczenie realizacji przedsięwzięcia, tj. jej wyznaczenia dla uporządkowania zdarzeń opisanego ścieżką wyznaczoną w kroku 3<sup>o</sup>.  
Zadanie to rozwiązujemy wyznaczając realizację optymalną w sieci silnie spójnej.

---

6/ Obliczenia przeprowadzone w kroku 3<sup>o</sup> wymagają analizy tzw. frontów krytycznych, tj. frontów, których niezrealizowanie w ściśle określonych terminach wydłuża realizację optymalną,  
/wg "Procedury i algorytmy planowania sieciowego w sterowaniu pracami naukowo-badawczymi" IOFM, 1988/.

W celu uzasadnienia obranego sposobu postępowania stwierdzamy, że w każdym przypadku sprowadzenie zagadnienia rozdziału zasobów w sieci słabo/spójnej do postaci zadania programowania liniowego wymaga wcześniejszego rozpatrzenia alternatyw, które można przedstawić za pomocą nieliniowej funkcji celu.

Należy wybrać najbardziej efektywny obliczeniowo sposób sformułowania zagadnienia. Można sądzić, że jest to sposób scharakteryzowany powyżej, ponieważ rozwiązujemy zadanie, w którym zmienne odpowiadają czynnościom a nie frontom. O wyborze scharakteryzowanej procedury decyduje to, że przyjmując czynności a nie fronty jako zmienne zadania rozpatrujemy zakazy realizacji frontów sprowadzone do dodatkowych relacji porządkowania pomiędzy parami czynności.

Liczba takich zakazów jest ograniczona wielomianowo.

### 5. Zakończenie - wnioski

Przedstawione rozważania umożliwiają sformułowanie następujących wniosków:

1. Dla wyznaczenia optymalnej realizacji kompleksu operacji opisanego siecią silnie spójną przy obecnym stanie badań najefektywniejsza obliczeniowo jest metoda frontów maksymalnych /MPM/ [5].
2. Dla wyznaczenia optymalnej realizacji w sieci słabo spójnej dla niewielkich sieci zawierających 40 - 50 czynności można poszukiwać się siecią frontów czynności /SPC/, która może być budowana bez użycia technik komputerowych.
3. Dla dużych sieci słabo spójnych efektywnie obliczeniowo rozwiązanie zadania rozdziału zasobów zapewni modyfikacje metody ARSME [7].
4. Sieć frontów czynności przy obecnym stanie badań może być budowana za pomocą algorytmu nieograniczonego wielomianowo, a sieć frontów maksymalnych za pomocą algorytmu pseudowielomianowego.
5. Można sądzić, że w pełni zasadne jest wykorzystanie sieci frontów czynności do badania własności sieci probabilistycznych. Możliwość rozpatrywania więcej niż jednego uporządkowania zdarzeń w sieci frontów pozwala na sformułowanie takiego przypuszczenia.



## LITERATURA

- [1] Dubina A.: Realizacja kompleksu operacji opisanego siecią siatek spójną, Zesz.Nauk.Pol.Sląskiej. Automatyka 2076. Zyd.Pol.Sl., Gliwice 1984.
- [2] Ignesiak E.: Zagadnienia optymalizacyjne w sieciach czynnności /w Mikroekonomiczne problemy badań operacyjnych, PWE, Warszawa 1977/.
- [3] Ignesiak E.: Programowanie sieciowe, PWE, Warszawa 1972.
- [4] Rzymkowski Z.: Algorytm tworzenia i porządkowania frontów czynnności. Przegląd Statystyczny. R.XXVII - zeszyt 1/2 - 1980.
- [5] Rzymkowski Z.: O metodzie maksymalnych frontów czynnności, Przegląd Statystyczny R.XXXIII - zeszyt 4 - 1986.
- [6] Sigal C.E.: The stochastic shortest route problem, Purdue University, 1977 /cyt.wg [5]/.
- [7] Węglarz J.: Sterowanie w systemach typu kompleks operacji, PWN, Warszawa - Poznań 1981.

Recenzent: Doc.dr h.inż.R.Słowiński

Wpłynęło do Redakcji do 1988-04-30.

## АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ СЕТИ ФРОНТОВ ДЕЙСТВИЙ

## Резюме

В работе рассматриваются принципы построения сети фронтов действий в виде вариантного графа принятия решений, который упрощает распределение ресурсов в сетевой модели с неполностью упорядоченными событиями. Описываются также процедуры расчётов, проводимых в случае использования сети фронтов действий во время решения задач по распределению ресурсов.

## ALGORITHM OF CONSTRUCTING DIRECTLY CUT SETS NET

## Summary

The work provides a methodology for constructing the directly cut sets of an alternative graph that simplifies e.g. resource allocation in weakly connected network. A numerical algorithm for constructing directly cut sets net is described.