ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988
Seria: AUTOMATYKA z.94 Nr kol.970

Jerzy Klamka
Politechnika Śląska

STEROWALNOŚĆ DYSKRETNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH PRZY OGRANICZENIACH NA STEROWANIE - - PRZEGLĄD PROBLEMÓW

Streszczenie. Artykuł stanowi przegląd problemów sterowalności dyskretnych układów dynamicznych przy ograniczeniach na sterowanie opracowany na podstawie publikacji z ostatnich lat. Przedstawiono warunki sterowalności przy ograniczeniach na sterowanie dla liniowych, dyskretnych układów niestacjonarnych i stacjonarnych oraz dla stacjonarnych dyskretnych układów nieliniowych. Rozpatrywane są również stacjonarne układy dyskretne typu 2-D .

1. Wprowadzenie

Sterowalność układów dynamicznych jest jednym z podstawowych pojęć teorii sterowania. W niniejszym artykule przedstawiono problematykę sterowalności dyskretnych, skończenie-wymiarowych układów dynamicznych przy dodatkowych ograniczeniach nałożonych na sterowanie. Ograniczenia te powodują, że sterowania dopuszczalne przyjmują wartości w pewnym ustalonym wypukłym i zwartym zbiorze. Rozpatruje się dyskretne układy liniowe zarówno niestacjonarne, jak i stacjonarne, a także stacjonarne, nieliniowe układy dyskretne. Omawiane są również nieliniowe, stacjonarne układy dyskretne typu 2-D. Podane zostaną podstawowe definicje i pojęcia związane ze sterowalnością układów dyskretnych. Wszystkie zamieszczone w artykule twierdzenia i wnioski podane są bez dowodów, jedynie z odnośnikami do tych pozycji literaturowych, w których zamieszczone są pełne dowody. Artykuł zawiera ponadto szereg komentarzy oraz uwag dotyczących zagadnień bezpośrednio związanych ze sterowalnością układów dyskretnych. Rozpatruje się między innymi zagadnienie wyznaczania sterowania dopuszczalnego, przeprowadzającego dyskretny układ dynamiczny z zadanego stanu początkowego do żądanego stanu końcowego w ustalonej liczbie kroków.

Artykuł opracowano zarówno na podstawie prac szczegółowych [1 - 4], [9 - 13], jak i publikacji o charakterze przeglądowym [5 - 8]. Stosowana terminologia pokrywa się z oznaczeniami zamieszczonymi w pracach [5 - 8]. Wszystkie podstawowe definicje i pojęcia zostały przytoczone w oparciu o publikacje źródłowe [1 - 4], [9 - 13].

Praca wykonana w ramach programu resortowego RP.I.02., "Teoria sterowania i optymalizacja ciągłych układów dynamicznych i procesów dyskretnych".

2. Opis układu dynamicznego i podstawowe definicje.

Niech będzie dany dyskretny,liniowy,niestacjonarny,skończenie-wymiarowy układ dynamiczny opisany następującym równaniem różnicowym :

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \qquad k \geqslant k_0 \qquad /2.1/$$

gdzie : $k \in Z$ - zbiór liczb całkowitych,
$x(k) \in R^n$ jest wektorem stanu układu,
$u(k) \in U \subset R^m$ jest sterowaniem dopuszczalnym,
$A(k)$ jest $n\times n$-wymiarową macierzą,
$B(k)$ jest $n\times m$-wymiarową macierzą.

Niech $U \subset R^m$ będzie dowolnym zbiorem. Sekwencją sterowań dopuszczalnych nazywa się dowolną sekwencję $u = \{u(k_0), u(k_0+1), u(k_0+2), \ldots\}$ taką, że $u(k) \in U \subset R^m$ dla wszystkich $k \geqslant k_0$. Zbiór wszystkich sekwencji sterowań dopuszczalnych oznacza się symbolem $M_U[k_0,\infty)$, a w przypadku, gdy sekwencje są określone jedynie dla $k \in [k_0,k_1]$, symbolem $M_U[k_0,k_1]$.

Dla ustalonego stanu początkowego $x(k_0) \in R^n$ oraz zadanej sekwencji sterowań dopuszczalnych $u \in M_U[k_0,\infty)$ istnieje jednoznaczne rozwiązanie $x(k,x(k_0),u)$ równania różnicowego /2.1/ określone dla wszystkich $k \geqslant k_0$ następującym wzorem [5]:

$$x(k,x(k_0),u) = F(k,k_0)x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{j=k-1} F(k,j+1)B(j)u(j) \qquad /2.2/$$

gdzie $F(k,j)$ jest $n\times n$-wymiarową macierzą tranzycji układu dynamicznego /2.1/, zdefiniowaną w sposób następujący [5]:

$$F(k,j) = \begin{cases} I & \text{dla } k = j \\ A(k-1)A(k-2)\ldots A(j+1)A(j) & \text{dla } k > j \\ \text{nieokreślona dla } k < j \end{cases}$$

W przypadku nieosobliwych macierzy $A(k)$, $k \in Z$, macierz tranzycji $F(k,j)$ jest określona również dla $k < j$ następującą równością [5]:

$$F(k,j) = A^{-1}(k)A^{-1}(k+1)A^{-1}(k+2)\ldots A^{-1}(j-2)A^{-1}(j-1)$$

Oprócz niestacjonarnego układu dynamicznego /2.1/ będzie również rozpatrywany dyskretny stacjonarny układ dynamiczny opisany następującym równaniem różnicowym :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad k \geqslant 0 \qquad /2.3/$$

W tym przypadku macierz tranzycji $F(k,j) = A^{k-j}$ dla $k \geqslant j$, a gdy macierz A jest nieosobliwa, równość ta jest prawdziwa również dla $k < j$.
Dla ustalonego stanu początkowego $x(0) \in R^n$ oraz zadanej sekwencji sterowań dopuszczalnych $u \in M_U[0,\infty)$ jednoznaczne rozwiązanie równania /2.3/ jest dane następującym wzorem [5]:

$$x(k,x(0),u) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{j=k-1} A^{k-j-1} Bu(j) \qquad /2.4/$$

Podobnie jak w przypadku ciągłych układów dynamicznych [5], [6], [8], dla układów dyskretnych postaci /2.1/ lub /2.3/ można sformułować szereg definicji różnych rodzajów sterowalności .

Definicja 2.1. Układ dynamiczny /2.1/ nazywa się U-sterowalnym w przedziale $[k_0,k_1]$, jeżeli dla każdego stanu początkowego $x(k_0)\in R^n$ oraz każdego stanu końcowego $x_1\in R^n$ istnieje sekwencja sterowań dopuszczalnych $u(k_0)$, $u(k_0+1),\ldots,u(k_1-2),u(k_1-1)$ taka, że odpowiadająca tej sekwencji trajektoria układu dynamicznego /2.1/ spełnia warunek :

$$x(k_1,x(k_0),u) = x_1$$

Definicja 2.2. Układ dynamiczny /2.1/ nazywa się U-sterowalnym w chwili k_0 , jeżeli dla każdego stanu początkowego $x(k_0)\in R^n$ oraz każdego stanu końcowego $x_1\in R^n$ istnieje chwila $k_1(x(k_0),x_1)$ oraz sekwencja sterowań dopuszczalnych $u(k_0),u(k_0+1),\ldots,u(k_1(x(k_0),x_1)-1)$ taka, że odpowiadająca tej sekwencji trajektoria układu dynamicznego /2.1/ spełnia warunek :

$$x(k_1(x(k_0),x_1),x(k_0),u) = x_1$$

Definicja 2.3. Układ dynamiczny /2.1/ nazywa się U-sterowalnym ze zbioru $D_0\subset R^n$ do zbioru $D_1\subset R^n$ w przedziale $[k_0,k_1]$, jeżeli dla każdego stanu początkowego $x(k_0)\in D_0$ oraz każdego stanu końcowego $x_1\in D_1$ istnieje sekwencja sterowań dopuszczalnych $u\in M_U[k_0,k_1]$ taka, że odpowiadająca tej sekwencji trajektoria układu dynamicznego /2.1/ spełnia warunek :

$$x(k_1,x(k_0),u) = x_1$$

Definicja 2.4. Układ dynamiczny /2.1/ nazywa się U-sterowalnym ze zbioru $D_0\subset R^n$ do zbioru $D_1\subset R^n$ w skończonym czasie, jeżeli dla każdego stanu początkowego $x(k_0)\in D_0$ oraz każdego stanu końcowego $x_1\in D_1$ istnieje chwila $k_1<\infty$ oraz sekwencja sterowań dopuszczalnych $u\in M_U[k_0,k_1]$ takie, że odpowiadająca tej sekwencji trajektoria układu dynamicznego /2.1/ spełnia warunek:

$$x(k_1,x(k_0),u) = x_1$$

Jeżeli $D_0 = D_1 = D$, to zamiast U-sterowalności z D_0 do D_1 mówimy w skrócie o U-sterowalności w D. Jeżeli natomiast $D_0 = R^n$ oraz $D_1 = \{0\}$, / $D_0 = \{0\}$ oraz $D_1 = R^n$ /, to mówimy odpowiednio o globalnej U-sterowalności do zera / globalnej U-sterowalności z zera/, a gdy $D_0 = D_1 = R^n$ o globalnej U-sterowalności. W przypadku, gdy $0\in \operatorname{int} D_0$ oraz $D_1 = \{0\}$ / $D_0 = \{0\}$ oraz $0\in\operatorname{int} D_1$ /, posługujemy się odpowiednio terminologią : lokalna U-sterowalność do zera / lokalna U-sterowalność z zera /, a gdy $0\in\operatorname{int}(D_0\cap D_1)$, terminem : lokalna U-sterowalność.

Bardzo często zbiór docelowy D_1 jest rozmaitością liniową, tzn. $D_1 = \{x\in R^n : Lx = c\}$,gdzie L jest p×n-wymiarową macierzą oraz $c\in R^p$, lub podprzestrzenią liniową / c = 0 / .

W dalszej części pracy zakłada się, że zbiór U jest wypukły i zwarty.

3. Kryteria sterowalności układów niestacjonarnych.

Zasadniczą rolę przy formułowaniu kryteriów U-sterowalności niestacjonarnych układów dynamicznych /2.1/ odgrywa funkcja skalarna $J : R^n \times Z \times R^n \times R^n \longrightarrow R$ o postaci następującej [10], [11] :

$$J\big(x(k_0),k,x,v\big) = v^T F(k,k_0)x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{j=k-1} \max_{u(j)\in U} v^T F(k,j+1)B(j)u(j) - \inf_{x\in D_1} v^T \qquad /3.1/$$

W oparciu o funkcję J można uzyskać wiele kryteriów U-sterowalności układu dynamicznego /2.1/ przy różnych postaciach zbiorów D_0 oraz D_1 [10], [11].

Twierdzenie 3.1. [10]Warunkiem koniecznym i wystarczającym U-sterowalności układu dynamicznego /2.1/ ze stanu $x(k_0)$ do wypukłego i domkniętego zbioru docelowego D_1 w przedziale $[k_0,k_1]$ jest, aby zachodziła następująca nierówność :

$$\inf_{x\in D_1} \min_{\|v\|=1} J\big(x(k_0),k_1,x,v\big) \geqslant 0 \qquad /3.2/$$

W przypadku, gdy zbiór docelowy D_1 nie jest wypukły lub nie jest domknięty ,wówczas zamiast twierdzenia 3.1 wykorzystuje się do badania U-sterowalności następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.2. [10]Warunkiem koniecznym U-sterowalności układu dynamicznego /2.1/ ze stanu $x(k_0)$ do zbioru D_1 w przedziale $[k_0,k_1]$ jest, aby

$$\max_{x\in D_1} \min_{\|v\|=1} J\big(x(k_0),k_1,x,v\big) \geqslant 0 \qquad /3.3/$$

Wniosek 3.1. [10].Jeżeli zbiór docelowy D_1 jest otwarty ,wówczas warunkiem wystarczającym U-sterowalności układu dynamicznego /2.1/ ze stanu $x(k_0)$ do zbioru D_1 w przedziale $[k_0,k_1]$ jest, aby

$$\sup_{x\in D_1} \min_{\|v\|=1} J\big(x(k_0),k_1,x,v\big) > 0 \qquad /3.4/$$

Wniosek 3.2. [10].Jeżeli zbiór docelowy D_1 jest domknięty, wówczas warunkiem wystarczającym U-sterowalności układu dynamicznego /2.1/ ze stanu $x(k_0)$ do zbioru D_1 w przedziale $[k_0,k_1]$ jest, aby

$$\max_{x\in D_1} \min_{\|v\|=1} J\big(x(k_0),k_1,x,v\big) \geqslant 0 \qquad /3.5/$$

Jeżeli zbiór docelowy D_1 jest domknięty, wypukły oraz niepusty, wówczas warunek /3.2/ jest równoważny warunkom /3.3/ oraz /3.5/. Ogólnie warunek /3.2/ jest łatwiejszy do sprawdzenia niż warunki /3.3/ oraz /3.5/ ,a zatem jeżeli zbiór docelowy D_1 jest domknięty i wypukły ,wówczas do badania U-sterowalności układu dynamicznego /2.1/ wykorzystujemy twierdzenie 3.1.

Dowody twierdzeń 3.1 i 3.2 oraz wniosków 3.1 i 3.2 oparte są na znanych twierdzeniach o oddzielaniu zbiorów wypukłych [10] oraz własnościach funkcjonałów liniowych.

W dalszej części niniejszego podrozdziału zakłada się, że macierze $A(k)$ są nieosobliwe dla $k \in Z$, a więc istnieje macierz odwrotna $F^{-1}(k,j)$ dla wszystkich $k,j \in Z$. Należy podkreślić, że założenie to jest bardzo naturalne i zawsze spełnione w sytuacji, gdy układ dyskretny otrzymany jest przez dyskretyzację układu ciągłego. W tym przypadku bowiem macierze $A(k)$, $k \in Z$ są wyznaczane na podstawie zależności [12]:

$$A(k) = F_c((k+1)T, kT) \qquad /3.6/$$

gdzie $F_c(t,s)$ jest macierzą tranzycji ciągłego układu dynamicznego, nieosobliwą dla wszystkich $t,s \in R$, [6], natomiast $T > 0$ jest okresem dyskretyzacji. Zatem wszystkie macierze $A(k)$ otrzymane przez dyskretyzację ciągłego układu dynamicznego są macierzami nieosobliwymi.

Twierdzenie 3.3. [10] Jeżeli zbiór docelowy D_1 jest domknięty i wypukły, to warunkiem koniecznym globalnej U-sterowalności do zbioru D_1 układu dynamicznego /2.1/ jest, aby

$$\min_{\|v\|=1} \sup_{k \in Z} \left\{ \sum_{j=k_0}^{j=k} \max_{u(j) \in U} \left[v^T F^{-1}(k,k-j) B(j) u(j)\right] - \inf_{x \in D_1} v^T F^{-1}(k,k_0) x \right\} = +\infty \qquad /3.7/$$

natomiast warunkiem wystarczającym jest, aby

$$\sup_{k \in Z} \min_{\|v\|=1} \left\{ \sum_{j=k_0}^{j=k} \max_{u(j) \in U} \left[v^T F^{-1}(k,k-j) B(j) u(j)\right] - \inf_{x \in D_1} v^T F^{-1}(k,k_0) x \right\} = +\infty \qquad /3.8/$$

W przypadku, gdy zbiór docelowy nie jest domknięty lub nie jest wypukły, stosowanie tw. 3.3 jest niemożliwe. Wówczas przy badaniu globalnej U-sterowalności układu dynamicznego /2.1/ do zbioru docelowego D_1 posługujemy się poniższym twierdzeniem 3.4.

Twierdzenie 3.4. [10] Warunkiem koniecznym globalnej U-sterowalności układu dynamicznego /2.1/ do zbioru docelowego D_1 niekoniecznie wypukłego i domkniętego jest, aby

$$\min_{\|v\|=1} \sup_{x \in D_1} \sup_{k \in Z} \left\{ \sum_{j=k_0}^{j=k} \max_{u(j) \in U} \left[v^T F^{-1}(k,k-j) B(j) u(j)\right] - v^T F^{-1}(k,k_0) x \right\} = +\infty \qquad /3.9/$$

natomiast warunkiem wystarczającym jest, aby

$$\sup_{x \in D_1} \sup_{k \in Z} \min_{\|v\|=1} \left\{ \sum_{j=k_0}^{j=k} \max_{u(j) \in U} \left[v^T F^{-1}(k,k-j) B(j) u(j)\right] - v^T F^{-1}(k,k_0) x \right\} = +\infty \qquad /3.10/$$

Warunki globalnej U-sterowalności do zbioru docelowego D_1 sformułowane w twierdzeniach 3.3 oraz 3.4 są trudno sprawdzalne ze względu na występowanie w nich symbolu $+\infty$. Należy również nadmienić, że podobne warunki globalnej U-sterowalności do zbioru docelowego D_1 dla ciągłych układów dynamicznych przytoczone są między innymi w pracy [8], gdzie podano także inne kryteria badania U-sterowalności ciągłych układów dynamicznych.

Rozpatrzmy obecnie zagadnienie tzw. "bang-bang" sterowalności układu dynamicznego /2.1/. Załóżmy, że sterowania $u(k) \in U(k)$ dla $k \in Z$, a zbiory $U(k)$ są zwarte i wypukłe dla wszystkich $k \in Z$. Zagadnienie "bang-bang" sterowalności dla układów dynamicznych /2.1/ rozwiązuje w pełni następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.5. [1] Załóżmy, że stan $x_1 \in R^n$ jest osiągany ze stanu początkowego $x(k_0) \in R^n$ przy zastosowaniu pewnej sekwencji sterowań dopuszczalnych $u = \{u(k_0), u(k_0+1), \ldots, u(k_1)\}$, $u(k) \in U(k)$ dla $k \in [k_0, k_1]$. Wówczas stan x_1 jest również osiągany ze stanu początkowego $x(k_0)$ przy zastosowaniu sekwencji sterowań $u^* = \{u^*(k_0), u^*(k_0+1), \ldots, u^*(k_1)\}$, gdzie każde sterowanie $u^*(k)$ $k \in [k_0, k_1]$ jest punktem ekstremalnym zbioru $U(k)$, $k \in [k_0, k_1]$ z wyjątkiem co najwyżej n indeksów k.

Należy podkreślić, że można skonstruować przykłady układów dynamicznych o postaci /2.1/ pokazujące, że oszacowanie n w twierdzenieniu 3.5 nie może być poprawione /zmniejszone/.

Twierdzenie 3.5 jest dyskretną wersją znanej z literatury [1] ciągłej zasady "bang-bang". Przy pewnych dodatkowych założeniach może być ona uogólniona na przypadek nieskończenie-wymiarowych, dyskretnych układów dynamicznych [1].

Z zagadnieniami U-sterowalności oraz "bang-bang" sterowalności układu dynamicznego /2.1/ ściśle wiąże się problem wyznaczania sterowania dopuszczalnego przeprowadzającego układ dynamiczny ze stanu początkowego $x(k_0)$ do zbioru docelowego D_1. U-sterowalność układu dynamicznego /2.1/ ze stanu początkowego $x(k_0)$ do zbioru docelowego D_1 gwarantuje istnienie co najmniej jednego takiego sterowania dopuszczalnego. Oczywiście w ogólnym przypadku istnieje na ogół wiele sterowań dopuszczalnych przeprowadzających U-sterowalny układ dynamiczny /2.1/ ze stanu początkowego do zbioru docelowego D_1. Poniższe twierdzenie podaje ogólną postać zbioru wszystkich sterowań dopuszczalnych realizujących wyżej wymienione przejście.

Twierdzenie 3.6. [10] Załóżmy, że układ dynamiczny /2.1/ jest U-sterowalny ze stanu początkowego $x(k_0)$ do zbioru docelowego D_1 w przedziale $[k_0, k_1]$. Wówczas każda sekwencja sterowań dopuszczalnych, która przeprowadza układ dynamiczny /2.1/ ze stanu początkowego $x(k_0)$ do zbioru docelowego D_1 jest elementem zbioru $N_U[k_0, k_1] \subset M_U[k_0, k_1]$ zdefiniowanego następująco:

$$N_U[k_0,k_1] = \Big\{ u \in M_U[k_0,k_1] \;:\; v^T F(k_1,k_0)x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{j=k_1-1} v^T F(k_1,j+1)B(j)u(j) - \inf_{x \in D_1} (v^T x) \geqslant 0 \Big\} \qquad /3.11/$$

Należy podkreślić, że twierdzenie 3.6 nie stwierdza, że każda sekwencja sterowań dopuszczalnych należąca do zbioru $N_U[k_0, k_1]$ przeprowadza układ dynamiczny /2.1/ ze stanu początkowego $x(k_0)$ do zbioru docelowego D_1, natomiast podaje ono, że każda sekwencja sterowań dopuszczalnych realizująca to przejście należy do zbioru $N_U[k_0,k_1]$.

Wniosek 3.3. [10] Jeżeli

$$\inf_{x\in D_1}\min_{\|v\|=1} J\big(x(k_0),k_1,x,v\big)\geqslant 0 \qquad /3.12/$$

oraz

$$\inf_{x\in D_1}\min_{\|v\|=1} J\big(x(k_0),k,x,v\big)<0 \quad \text{dla } k=k_0,k_0+1,\dots,k_1-1 \qquad /3.13/$$

to żadna sekwencja sterowań dopuszczalnych $u\in N_U[k_0,k_1-1]$ nie przeprowadza układu dynamicznego /2.1/ ze stanu początkowego $x(k_0)$ do zbioru docelowego D_1. Zatem każda sekwencja sterowań dopuszczalnych $u\in N_U[k_0,k_1]$ realizująca to przejście jest sekwencją sterowań czaso-optymalną.

Szczegółowa procedura wyznaczania sekwencji sterowań dopuszczalnych przeprowadzających układ dynamiczny /2.1/ ze stanu początkowego $x(k_0)$ do zbioru docelowego D_1 przedstawiona jest w pracy [10]. Podano tam również pewne przypadki szczególne, z których jeden dotyczący stacjonarnych układów dynamicznych zostanie zaprezentowany w następnym podrozdziale. Procedura wyznaczania sekwencji sterowań dopuszczalnych podana w artykule [10] umożliwia rekurencyjne obliczanie poszczególnych sterowań.

Interesującym zagadnieniem jest zbadanie wzajemnych relacji pomiędzy U-sterowalnością układów ciągłych oraz U-sterowalnością układów dyskretnych. Wiadomo [12], że R^n-sterowalność układu ciągłego nie zawsze implikuje R^n-sterowalność układu dyskretnego otrzymanego poprzez dyskretyzację układu ciągłego. Zależy to w stotny sposób od długości okresu dyskretyzacji $T>0$. Podobna sytuacja ma miejsce również w przypadku U-sterowalności. U-sterowalność układu ciągłego nie zawsze implikuje U-sterowalność odpowiadającego mu układu dyskretnego, otrzymanego poprzez dyskretyzację z okresem T.

Innym istotnym zagadnieniem jest zbadanie wzajemnych zależności pomiędzy sterowaniem ciągłym a odpowiadającym mu sterowaniem dyskretnym otrzymanym poprzez dyskretyzację z okresem T. Można wykazać [10], że nie istnieją wzajemne związki pomiędzy sterowaniem ciągłym a sterowaniem dyskretnym, tzn. efekt zastosowania sterowania dyskretnego do układu dyskretnego otrzymanego poprzez dyskretyzację z układu ciągłego jest inny niż użycia sterowania ciągłego do układu ciągłego.

Należy również podkreślić, że w odróżnieniu od ciągłych układów dynamicznych, w układach dyskretnych założenie o wypukłości zbioru $U\subset R^m$ jest bardzo istotne. Natura układów dyskretnych sprawia, że zbiór osiągalny dla sterowań przyjmujących wartości ze zbioru U jest na ogół istotnie mniejszy niż zbiór osiągalny dla sterowań przyjmujących wartości w otoczce wypukłej zbioru U. Dla ciągłych układów dynamicznych zbiory osiągalne w obu tych przypadkach są identyczne.

4. Kryteria sterowalności układów stacjonarnych.

W przypadku liniowych, dyskretnych, stacjonarnych układów dynamicznych /2.3/ do badania ich U-sterowalności można oczywiście wykorzystać wszystkie rezultaty przedstawione w podrozdziale 3. Tym niemniej wykorzystując specyficzne cechy układów stacjonarnych można sformułować dla nich oddzielne kryteria badania U-sterowalności. Kryteria te, w przeciwieństwie do kryteriów dotyczących układów niestacjonarnych, są stosunkowo łatwe do sprawdzenia i zastosowania w praktyce.

W celu skrócenia i uproszczenia zapisu wprowadza się następujące oznaczenia [3]:
Im B - obraz odwzorowania liniowego reprezentowanego macierzą B,
aff(U) - otoczka afiniczna zbioru U,
ri(U) - względne wnętrze zbioru U,
$\langle A|U\rangle = U + AU + A^2U + \ldots + A^{n-1}U$.

Ponadto zakłada się, że zbiór $U \subset R^m$ jest wypukły i ograniczony.

Poniższe twierdzenie 4.1 podaje warunek konieczny i wystarczający globalnej U-sterowalności / $D_0 = D_1 = R^n$ / układu dynamicznego /2.3/ dla dowolnego ograniczonego i wypukłego zbioru $U \subset R^m$.

Twierdzenie 4.1. [3] Układ dynamiczny /2.3/ jest globalnie U-sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy jednocześnie spełnione są następujące warunki:
/i/ wszystkie wartości własne macierzy A, $s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_n$ spełniają warunek: $|s_i| = 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$,
/ii/ $\langle A|\mathrm{aff}(\tilde{U} + (-\tilde{U}))\rangle = R^n$, gdzie $\tilde{U} = \mathrm{Im}\, BU$,
/iii/ jeżeli $v \in \ker(A^T - I)$, to nierówność $v^T w \leq 0$ dla wszystkich $w \in \tilde{U}$ implikuje, że $v = 0$.

W przypadku, gdy $0 \in \mathrm{ri}(U)$, można nieco osłabić warunki globalnej U-sterowalności podane w twierdzeniu 4.1.

Twierdzenie 4.2. [3] Jeżeli $0 \in \mathrm{ri}(U)$, to warunkiem koniecznym i wystarczającym globalnej U-sterowalności układu dynamicznego /2.3/ jest, aby jednocześnie spełnione były następujące warunki:
/i/ $|s_i| = 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$,
/ii/ $\langle A|\mathrm{aff}(BU)\rangle = R^n$.

W przypadku, gdy zero jest punktem wewnętrznym zbioru U, tzn. $0 \in \mathrm{int}(U)$ wówczas warunek /ii/ w twierdzeniu 4.2 można zastąpić warunkiem:
/ii'/ $\langle A|\mathrm{Im}\, B\rangle = R^n$.

Przykładami najczęściej spotykanych w praktyce zbiorów U spełniających założenie $0 \in \mathrm{int}(U)$ są następujące zbiory:

$$U = \{u \in R^m : \|u\| \leq 1\}$$

$$U = \{u \in R^m : |u_i| \leq 1, \ i = 1, 2, \ldots, m, \quad u = [u_1, u_2, \ldots, u_i, \ldots, u_m]^T\}$$

Wykorzystując definicje U-sterowalności podane w podrozdziale 2 można sformułować szereg wniosków dotyczących wzajemnych relacji pomiędzy różnymi rodzajami U-sterowalności.

Wniosek 4.1. [3] Układ dynamiczny /2.3/ jest globalnie U-sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest on równocześnie globalnie U-sterowalny z zera oraz globalnie U-sterowalny do zera.

Wniosek 4.2. [3] Jeżeli macierz A jest nieosobliwa, to układ dynamiczny /2.3/ jest globalnie U-sterowalny z zera wtedy i tylko wtedy, gdy jest on globalnie U-sterowalny do zera.

Interesującym zagadnieniem jest wyznaczenie sekwencji sterowań dopuszczalnych przeprowadzających układ dynamiczny /2.3/ ze stanu początkowego $x(k_0)$ do zadanego stanu końcowego x_1 w chwili k_1. Rozpatrzymy to zagadnienie dla szczególnego przypadku układu dynamicznego /2.3/, a mianowicie dla przypadku układu jednowejściowego / $B = b \in R^n$ /, tzn. dla $m = 1$, o postaci :

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k) \qquad k \geqslant 0 \qquad /4.1/$$

Niech M_{k_1} oznacza $n \times k_1$-wymiarową macierz o postaci następującej :

$$M_{k_1} = \left[A^{k_1-1}b\ ,\ A^{k_1-2}b\ ,\dots,\ Ab\ ,\ b\right] \qquad /4.2/$$

Twierdzenie 4.3. [3] Jeżeli układ dynamiczny /4.1/ jest globalnie R^n-sterowalny w przedziale $[0,k_1]$ oraz U-sterowalny z punktu $x(0) \in R^n$ do punktu $x_1 \in R^n$ w przedziale $[0,k_1]$, $k_1 \leqslant n$, wówczas sterowanie dopuszczalne u^* przeprowadzające układ dynamiczny /4.1/ ze stanu początkowego $x(0)$ do punktu x_1 jest postaci następującej :

$$u^* = \left[u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(k_1-1)\right]^T = M_{k_1}^{-1}\left(x_1 - A^{k_1}x(0)\right) \qquad \text{dla } k_1 = n$$

oraz

$$u^* = \left[u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(k_1-1)\right]^T = \left[M_{k_1}^T M_{k_1}\right]^{-1} M_{k_1}^T\left(x_1 - A^{k_1}x(0)\right) \qquad \text{dla } k_1 < n$$

W przypadku, gdy $k_1 = n$, założenie o globalnej R^n-sterowalności układu dynamicznego /4.1/ jest równoważne nieosobliwości $n \times n$-wymiarowej macierzy $M_n = M_{k_1}$. Należy jednak podkreślić, że globalna R^n-sterowalność układu dynamicznego /4.1/ nie gwarantuje istnienia odpowiedniego sterowania dopuszczalnego. Wynika to z nałożonych na sterowanie ograniczeń reprezentowanych zbiorem U. Tak więc założenia o U-sterowalności z punktu $x(0)$ do punktu x_1 jest konieczne do istnienia odpowiedniego sterowania dopuszczalnego.

W przypadku braku ograniczeń na sterowanie, zagadnienie wyznaczenia odpowiedniego sterowania przeprowadzającego układ dynamiczny /4.1/ ze stanu początkowego $x(0)$ do stanu końcowego x_1 w chwili k_1 było rozpatrywane w pracy [6]. Przypadek, gdy $k_1 > n$ można rozwiązać posługując się również twierdzeniem 4.3 i dzieląc odcinek $[0,k_1]$ na krótsze podprzedziały. Dowód twierdzenia 4.3 bazuje na prostych przekształceniach wzoru reprezentującego rozwiązanie równania różnicowego /4.1/ .

Istotnym zagadnieniem ściśle związanym z U-sterowalnością układu dy- micznego /2.3/ jest problem wyznaczania sekwencji sterowań dopuszczalnych gwarantujących pozostawanie trajektorii układu w zadanym zbiorze $D\subset R^n$. Tak sformułowane zagadnienie prowadzi bezpośrednio do definicji tzw. U-st- bilności w zbiorze D układu dynamicznego /2.3/, [11].

<u>Definicja 4.1.</u> Układ dynamiczny /2.3/ nazywa się U-stabilnym w zbio- rze D, jeżeli dla każdego stanu początkowego $x(0)\in D$ istnieje sekwencja ster- wań dopuszczalnych $u\in M_U[0,\infty)$ taka, że odpowiadająca tej sekwencji trajekt- ria układu dynamicznego /2.3/ spełnia warunek :

$$x(k,x(0),u)\in D \qquad \text{dla wszystkich} \quad k\geqslant 0 \qquad /4.3/$$

Sekwencja sterowań dopuszczalnych $u\in M_U[0,\infty)$, utrzymująca trajektor- układu dynamicznego /2.3./ w zadanym zbiorze D, zależy w istotny sposób od stanu początkowego $x(0)$ i dla różnych stanów początkowych jest na ogół także różna. W dalszej części niniejszego podrozdziału dodatkowo zakłada się, że zbiór $D\subset R^n$ jest wypukły i zwarty. Poniższe twierdzenie podaje warunek konieczny i wystarczający U-stabilności w zbiorze D układu dynamicznego /2.3/.

<u>Twierdzenie 4.4.</u> [11] Warunkiem koniecznym i wystarczającym U-stabil- ności w zbiorze D układu dynamicznego /2.3/ jest, aby

$$\min_{\|v\|=1}\left\{\min_{x\in D}\left(v^TAx\right)+\max_{u\in U}\left(v^TBu\right)-\min_{x\in D}\left(v^Tx\right)\right\}\geqslant 0 \qquad /4.4/$$

Dowód twierdzenia 4.4 zamieszczony w pracy [11] bazuje na znanym [1], [10], [11] twierdzeniu o oddzielaniu zbiorów wypukłych w przestrzeniach skoń- czenie-wymiarowych. Można również pokazać, że warunek /4.4/ jest równoważny warunkowi następującemu :

$$\min_{\|v\|=1}\left\{\min_{x\in D}\left(v^TAx\right)+\max_{u\in U}\left(v^TBu\right)-\min_{x\in D}\left(v^Tx\right)\right\}=0 \qquad /4.5/$$

Jeżeli układ dynamiczny /2.3/ jest U-stabilny w zbiorze D, wówczas dla każdego stanu początkowego $x(0)\in D\subset R^n$ istnieje sekwencja sterowań dopusz- czalnych $u\in M_U[0,k]$ utrzymująca trajektorię układu dynamicznego /2.3/ w zbiorze D dla każdej ustalonej liczby kroków $k\in Z$. Sekwencja ta nosi nazwę dopuszczalnej sekwencji podtrzymującej [11]. Poniższe twierdzenie umożliwia numeryczne wyznaczenie dopuszczalnej sekwencji podtrzymującej dla U-stabil- nego w zbiorze D układu dynamicznego /2.3/.

<u>Twierdzenie 4.5.</u> [11] Załóżmy, że układ dynamiczny /2.3/ jest U-stabil- ny w zbiorze D. Wówczas dla każdego stanu początkowego $x(0)\in D$ oraz dowol- nego $k\geqslant 0$ istnieje dopuszczalna sekwencja sterowań podtrzymujących $u\in M_U[0,$ spełniająca warunek :

$$\min_{\|v\|=1}\left\{v^TAx(k)+v^TBu(k)-\min_{x\in D}\left(v^Tx\right)\right\}\geqslant 0 \qquad \text{dla } k=0,1,\dots,k-1 \qquad /4.6/$$

gdzie

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k) \qquad \text{dla } k=0,1,\dots,k-1$$

5. Dyskretne układy nieliniowe i wielowymiarowe.

Sterowalność nieliniowych układów dyskretnych oraz nieliniowych układów dyskretnych typu 2-D przy ograniczeniach na sterowanie była rozpatrywana w pracach [4] oraz [9]. W pracy [9] w oparciu o twierdzenie Schaudera o punkcie stałym wyznaczono obszar $D \subset R^n$ sterowalności dla następującego nieliniowego, stacjonarnego układu dyskretnego :

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) \qquad k \geq 0 \qquad /5.1/$$

Jako przypadek szczególny rozpatrzono sterowalność dyskretnego układu dynamicznego liniowego względem stanu oraz nieliniowego względem sterowania, opisanego następującym równaniem różnicowym :

$$x(k+1) = Ax(k) + g(u(k)) \qquad k \geq 0 \qquad /5.2/$$

gdzie A jest stałą nxn-wymiarową macierzą.

W obu powyższych przypadkach zakłada się, że zbiór wartości sterowań U jest wypukły i zwarty. Założenie to ma istotne znaczenie dla metody przeprowadzania dowodów opartej na twierdzeniu Schaudera o punkcie stałym.

W pracy [4] sformułowano warunki wystaczające U-sterowalności w otoczeniu zera dla nieliniowego, stacjonarnego układu dynamicznego typu-2-D, opisanego następującym układem równań różnicowych :

$$\begin{aligned} x_1(i+1,j) &= f_1(x_1(i,j),\ x_2(i,j),\ u(i,j)) \\ x_2(i,j+1) &= f_2(x_1(i,j),\ x_2(i,j),\ u(i,j)) \end{aligned} \qquad /5.3/$$

gdzie $i,j \in Z^+$ są dodatnimi liczbami całkowitymi.

Przy odpowiednich założeniach dotyczących wypukłości funkcji f_1 oraz f_2, wykorzystując pewne twierdzenia z tzw. analizy wypukłej, w pracy [4] podano warunki wystarczające U-sterowalności układu dynamicznego /5.3/. Warunki te są uogólnieniem na przypadek nieliniowych układów typu 2-D znanych z literatury [7] kryteriów sterowalności dla liniowych, stacjonarnych układów typu 2-D. Warunki U-sterowalności sformułowane w pracy [4] dla układów dynamicznych typu 2-D mogą być stosunkowo łatwo uogólnione na przypadek układów dynamicznych typu M-D [7], tzn. układów dyskretnych o M zmiennych niezależnych.

W przeglądowej publikacji [7] przytoczono także inne kryteria badania lokalnej R^n-sterowalności w otoczeniu zera dla nieliniowego układu dyskretnego /5.1/. Kryteria te są oparte na badaniu liniowego przybliżenia układu dynamicznego /5.1/, a otrzymane rezultaty mają charakter warunków wystarczających. Ponadto w pracy [7] zamieszczono również pewne rezultaty dotyczące sterowalności biliniowych układów dyskretnych zarówno jednorodnych, jak i niejednorodnych. W tym przypadku nie zakłada się istnienia ograniczeń na sterowanie, a otrzymane rezultaty bazują na pewnych twierdzeniach z tzw. algebry decyzyjnej.

LITERATURA

[1] Artstein Z.: Discrete and continuous bang-bang and facial spaces or look for the extreme points, SIAM Journal Review, vol.22, no.2, str.172-185, 1980.

[2] Evans M.E., Murthy D.N. :Controllability of discrete-time systems with positive controls, IEEE Transactions on Automatic Control, vol.22, no.6 str.942-945, 1977.

[3] Evans M.E. :Bounded control and discrete-time controllability, International Journal of Systems Science, vol.17, no.6, str.943-951, 198

[4] Faradżew R.G., Wu Ngok Fat,: Controllability of nonlinear two-dimensional discrete-time systems with constrained controls, Optimization, vol, no.6, str.869-876, 1985.

[5] Klamka J.: Sterowalność układów dynamicznych - przegląd problemów, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, tom XXVI, z.2, str.279-309, 1981.

[6] Klamka J.: Sterowalność układów dynamicznych z opóźnieniami, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej w Gliwicach, zeszyt Automatyka, nr.58, str.1-170, 1981.

[7] Klamka J.: Sterowalność dyskretnych układów dynamicznych - przegląd problemów, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej w Gliwicach, zeszyt Automatyka, nr.84, str.103-118, 1986.

[8] Klamka J.: Sterowalność układów dynamicznych przy ograniczeniach na sterowanie,- przegląd problemów, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, tom XXXII, z.1-2, str.21-34, 1987.

[9] Staroswieoki M.: Domaines de commandabilite des processus echantillonnes non lineaires, Podstawy Sterowania, tom 4, z.2, str.101-114, 1974.

[10] Van Til R.P., Schmitendorf W.E.; Constrained controllability of discret time systems, International Journal of Control, vol.43, no.3, str.941-956 1986.

[11] Van Til R.P., Schmitendorf W.E.: Global constrained holdability of discrete-time systems, IEEE Transactions on Automatic Control, vol.AC-31, no.8, str.761-763, 1986.

[12] Yunlong Y., Laixinang S., Huisheng Z.: Controllability and observability of discrete systems, Chinese Annales of Mathematics, vol.3, no.3, str.273-278, 1982.

[13] Elliot D.L., Tarn T.J., Goka T.: Controllability of discrete bilinear systems with bounded controls, IEEE Transactions on Automatic Control, vol.AC-18, no.2, str.298-301, 1973.

Recenzent: Prof.dr hab.inż.S.Walczak

Wpłynęło do Redakcji do 1988-04-30.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ НА УПРАВЛЕНИЕ7. ОБЗОР ПРОБЛЕМ

Р е з ю м е

Статья является обзором проблем управления при наличии ограничений на управление для дискретных динамических систем, разработанных на основе опубликованных за последние годы работ. Представлены условия управляемости при наличии ограничений на управление для линейных нестационарных и стационарных дискретных систем и для стационарных нелинейных дискретных систем. Рассмотрены также стационарные дискретные системы типа 2 – Д.

CONTROLLABILITY OF DISCRETE DYNAMICAL SYSTEMS WITH CONSTRAINED CONTROLS – A SURVEY

S u m m a r y

The paper presents a survey of problems associated with the discrete-time dynamical systems with constrained controls. It has been prepared on the basis of recent publications. The controllability conditions with constrained controls for linear time-varying and time-invariant discrete-time systems and for time-invariant nonlinear discrete-time systems are presented. Stationary 2-D discrete systems are also considered.