ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988
Seria:AUTOMATYKA z.94 Nr kol.970

Krzysztof Pieńkosz
Eugeniusz Toczyłowski

Instytut Automatyki Politechniki Warszawskiej

WARUNKI REGULARNEJ AGREGACJI PRODUKTÓW W WIELOSTOPNIOWYCH SYSTEMACH PRODUKCYJNYCH[1]

Streszczenie. W pracy rozważany jest model harmonogramowania produkcji w wielostopniowym systemie produkcyjnym uwzględniający ograniczenia zasobowe oraz ograniczenia na dolne pozlomy zapasów. Przedstawiono metodę regularnej agregacji produktów umożliwiającą uzyskanie modelu o zredukowanym wymiarze i strukturze takiej samej jak model pierwotny. Podano warunki wystarczające do przeprowadzenia regularnej agregacji. Wyznaczono klasę zadań, dla których optymalne rozwiązanie problemu pierwotnego może być zawsze wyliczone z optymalnego rozwiązania problemu zagregowanego.

1. Zadanie harmonogramowania

Struktura produkcji w systemie wielostopniowym jest określona przez skierowany graf acykliczny $G(N,E)$, gdzie wierzchołki N reprezentują różne typy części występujące w procesie produkcyjnym, natomiast łuki E oznaczają relacje technologiczne pomiędzy poszczególnymi częściami. Łuk (i,j) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy część i jest bezpośrednio wykorzystywana do produkcji części j. Każdemu łukowi $(i,j) \in E$ przypisana jest waga r_{ij} określająca ilość części typu i potrzebnych do produkcji wyrobu j (przyjmuje się $r_{ij} = 0$, jeśli łuk (i,j) nie istnieje).

W dalszej części pracy będziemy zakładać, że zbiór wszystkich produktów $N = \{1,...,n\}$ można podzielić na K grup produktów podobnych $N_k, k = 1,...,K$, obejmujących wyroby o zbliżonych parametrach produkcyjnych. W obrębie danej grupy produktów podobnych pomijać będziemy koszty wznowień produkcji, natomiast uwzględniać będziemy jedynie koszty przezbrojeń między produktami różnych grup.

Problem pierwotny harmonogramowania produkcji w systemie wielostopniowym polega na wyznaczeniu wielkości produkcji w poszczególnych okresach, tak aby przy ograniczonych środkach wytwórczych zaspokoić zapotrzebowania zewnętrzne na wyroby oraz minimalizować koszty.

Problem P1 (problem pierwotny)

$$\min \sum_{t=1}^{T} \left[\sum_{k=1}^{K} s_{kt} v_k(t) + \sum_{i=1}^{n} (c_{it} z_i(t) + h_{it} I_i(t)) \right] \tag{1.1}$$

[1] praca częściowo finansowana w ramach problemu R.P.I.02 w temacie 5.3

przy ograniczeniach

$$I_i(t-1) + x_i(t) - I_i(t) = d_{it} + \sum_{j \in S_i} r_{ij} x_j(t) \quad , \; i \in N; t = 1, \ldots, T \tag{1.2}$$

$$0 \leq x_i(t) \leq M v_k(t), \quad v_k(t) \in \{0,1\} \quad , \; i \in N_k; t = 1, \ldots, T; \forall k \tag{1.3}$$

$$\sum_{k=1}^{K} e_{krt} v_{kt}(t) + \sum_{i=1}^{n} p_{irt} x_i(t) \leq Q_{rt} \quad , \; r = 1, \ldots, R; t = 1, \ldots, T \tag{1.4}$$

$$I_i(t) \geq \underline{I}_{it} \quad , \; i \in N; t = 1, \ldots, T \tag{1.5}$$

gdzie oznaczenia:

T - horyzont harmonogramowania,

N - zbiór wszystkich produktów $N = \{1, \ldots, n\}$,

N_k - grupa (podzbiór) produktów podobnych $k = 1, \ldots, K$,

S_i - zbiór bezpośrednich nastepników produktu i,tzn. $S_i = \{j : (i,j) \in E\}$,

zmienne decyzyjne:

$x_i(t)$ - wielkość produkcji wyrobu i w okresie t,

$v_k(t)$ - zmienna binarna określająca wznowienie produkcji k-tej grupy produktów podobnych,

$I_i(t)$ - stan zapasu produktu i pod koniec okresu t,

parametry (wszystkie nieujemne):

s_{kt} - koszt wznowienia produkcji k-tej grupy wyrobów w okresie t,

c_{it} - jednostkowy koszt produkcji wyrobu i w okresie t,

h_{it} - jednostkowy koszt magazynowania produktu i w okresie t,

d_{it} - zapotrzebowanie na produkt i w okresie t,

r_{ij} - ilość części typu i potrzebnych do produkcji wyrobu j,

e_{krt} - ilość jednostek zasobu r zużywanych w wyniku wznowienia produkcji k-tej grupy w okresie t,

p_{irt} - ilość jednostek zasobu r zużywanych w wyniku produkcji jednej jednostki wyrobu i w okresie t,

Q_{rt} - wielkość zasobu r dostępna w okresie t,

$I_i(0)$ - początkowy stan zapasu produktu i,

$\underline{I}_{it}$ - minimalny dopuszczalny stan zapasu produktu i w okresie t,

M - duża liczba (większa niż maksymalna wielkość produkcji).

Problem P1 należy do trudnych zadań programowania mieszanego. W sposób stosunkowo efektywny udaje się rozwiązywać jedynie pewne szczególne podklasy powyższego problemu przy niewielkiej ilości zmiennych (patrz [1,2,3]). W praktycznych przypadkach pozostaje więc konieczność stosowania algorytmów przybliżonych. Niezależnie od rodzaju wykorzystywanych metod celowe jest maksymalne uproszczenie problemu przed zastosowaniem algorytmów rozwiązujących.

Jednym ze sposobów uproszczenia jest grupowanie produktów według ich podobieństwa technologicznego i zastępowanie produktami zagregowanymi. Interesować nas będą jednak tylko takie przekształcenia, w wyniku których uzyskuje się model o identycznej strukturze ograniczeń jak model pierwotny. Tego rodzaju uproszczenia będziemy nazywać agregacją regularną.

W dalszej części pracy zostaną przedstawione warunki grupowania produktów, sposób agregacji oraz metoda przejścia z rozwiązania problemu zagregowanego do rozwiązania problemu pierwotnego. Rozdział drugi pracy dotyczy szczególnego przypadku, mianowicie systemu jednostopniowego, gdzie nie występują zależności technologiczne pomiędzy produktami, tzn. dla każdego $i,j \in N$ zachodzi $r_{ij} = 0$. Bazując na rezultatach tego rozdziału, w następnym punkcie zostaną sprecyzowane warunki regularnej agregacji dla ogólnego przypadku.

2. Agregacja w systemach jednostopniowych

Szczególnym przypadkiem probemu P1 jest zadanie harmonogramowania w systemie jednostopniowym opisane modelem.

Problem P2 (system jednostopniowy)

$$\min \sum_{t=1}^{T}\left[\sum_{k=1}^{K} s_{kt}v_k(t) + \sum_{i=1}^{n}(c_{it}x_i(t) + h_{it}I_i(t))\right] \tag{2.1}$$

przy ograniczeniach

$$I_i(t-1) + x_i(t) - I_i(t) = d_{it} \quad , \; i \in N; t = 1,\dots,T \tag{2.2}$$

$$0 \le x_i(t) \le Mv_k(t), \quad v_k(t) \in \{0,1\} \quad , \; i \in N_k; t = 1,\dots,T; k = 1,\dots,K \tag{2.3}$$

$$\sum_{k=1}^{K} e_{krt}v_k(t) + \sum_{i=1}^{n} p_{irt}x_i(t) \le Q_{rt} \quad , \; r = 1,\dots,R; t = 1,\dots,T \tag{2.4}$$

$$I_i(t) \ge L_{it} \quad , \; i \in N; t = 1,\dots,T \tag{2.5}$$

Jeżeli istnieją grupy produktów podobnych posiadających własności

$$c_{it} = C_{kt}, \quad h_{it} = H_{kt}, \quad p_{irt} = P_{krt} \quad \text{dla każdego } i \in N_k, k = 1,\dots,K \tag{2.6}$$

to sumując ograniczenia (2.2,2.3) oraz (2.5) dla poszczególnych grup $N_k, k = 1,\dots,K$, otrzymujemy model zagregowany ze zmiennymi

$$X_k(t) = \sum_{i \in N_k} x_i(t) \qquad F_k(t) = \sum_{i \in N_k} I_i(t) \tag{2.7}$$

Okazuje się, że tak uzyskany model zagregowany jest w ogólnym przypadku jedynie relaksacją problemu P2 (patrz [4]). Można jednak wykazać, że zastąpienie ograniczeń (2.5) przez silniejsze ograniczenia postaci

$$I_i(t) \ge \hat{L}_{it}, \tag{2.8}$$

gdzie $\hat{I}_{it}$ jest określone rekurencyjnym wzorem

$$\hat{I}_{it} = \begin{cases} I_i(0) & t = 0 \\ \max\left(I_{it}, \hat{I}_{i,t-1} - d_{it}\right) & t = 1, \ldots, T \end{cases} \tag{2.9}$$

prowadzi do utworzenia modelu zagregowanego A2, który jest w pełni równoważny problemowi P2.

Problem A2

$$\min \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{K} \left(s_{kt} v_k(t) + C_{kt} X_k(t) + H_{kt} F_k(t)\right) \tag{2.10}$$

przy ograniczeniach

$$F_k(t-1) + X_k(t) - F_k(t) = D_{kt} \quad , \quad k = 1, \ldots, K; t = 1, \ldots, T \tag{2.11}$$

$$0 \le X_k(t) \le M v_k(t), \qquad v_k(t) \in \{0,1\} \quad , \quad k = 1, \ldots, K; t = 1, \ldots, T \tag{2.12}$$

$$\sum_{k=1}^{K} (e_{krt} v_k(t) + P_{krt} X_k(t) \le Q_{rt} \quad , \quad r = 1, \ldots, R; t = 1, \ldots, T \tag{2.13}$$

$$F_k(t) \ge F_{kt} \quad , \quad k = 1, \ldots, K; t = 1, \ldots, T \tag{2.14}$$

gdzie

$$D_{kt} = \sum_{i \in N_k} d_{it} \qquad F_{kt} = \sum_{i \in N_k} \hat{I}_{it} \qquad k = 1, \ldots, K; t = 1, \ldots, T \tag{2.15}$$

Zauważmy, że ograniczenia (2.8) są redundancyjne w modelu P2, jednakże w wyniku ich sumowania otrzymujemy ograniczenia (2.14), które nie są redundancyjne w problemie zagregowanym. Zachodzi następujące twierdzenie [4].

Twierdzenie 1.*Problem A2 posiada rozwiązanie dopuszczalne wtedy i tylko wtedy, gdy problem P2 posiada rozwiązanie dopuszczalne. Optymalne rozwiązanie problemu P2 można zawsze otrzymać z optymalnego rozwiązania problemu A2 poprzez wyznaczenie przepływów dopuszczalnych w K sieciach odpowiadających ograniczeniom (2.2,2.3,2.7,2.8).*

3. Agregacja w systemach wielostopniowych

W ogólnym przypadku własności (2.6) nie wystarczają do przeprowadzenia regularnej agregacji i muszą być uzupełnione o dodatkowe warunki. Załóżmy, że w problemie P1 zbiór N można podzielić na grupy produktów podobnych $N_k, k = 1, \ldots, K$ spełniających własności

W1) $c_{it} = C_{kt}, h_{it} = H_{kt}, p_{irt} = P_{krt}$ dla każdego $i \in N_k, k = 1, \ldots, K$

W2) Produkty tej samej grupy nie są połączone między sobą bezpośrednimi łukami, tzn. jeżeli $i, j \in N_k$ to $(i, j) \notin E$.

W3) Wszystkie wyroby tej samej grupy wymagają do produkcji tych samych podzespołów i w takich samych ilościach, tzn. jeżeli $(i, j) \in E$ i $j \in N_k$, to $r_{ij} = r_{ik}$ dla każdego $j \in N_k$.

Wówczas przyjmując (2.7) można zagregować problem P1 do następującej postaci
Problem A1 (problem zagregowany)

$$\min \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{K} (s_{kt} v_k(t) + C_{kt} X_k(t) + H_{kt} F_k(t)) \tag{3.1}$$

przy ograniczeniach

$$F_k(t-1) + X_k(t) - F_k(t) = D_{kt} + \sum_{l \in S_k^t} R_{kl} X_l(t) \quad k = 1, \ldots, K; t = 1, \ldots, T \tag{3.2}$$

$$0 \leq X_k(t) \leq M v_k(t), \quad v_k(t) \in \{0, 1\} \quad k = 1, \ldots, K; t = 1, \ldots, T \tag{3.3}$$

$$\sum_{k=1}^{K} (e_{krt} v_k(t) + P_{krt} X(t)) \leq Q_{rt} \quad r = 1, \ldots, R; t = 1, \ldots, T \tag{3.4}$$

$$F_k(t) \geq F_{kt} \quad k = 1, \ldots, K; t = 1, \ldots, T \tag{3.5}$$

gdzie D_{kt} — zdefiniowane tak jak w (2.15),
$S_k^t = \{l : i \in N_k, j \in N_l, (i, j) \in E\}$;
$R_{kl} = \Sigma_{i \in N_k} r_{il}$,
$F_{kt} = \Sigma_{i \in N_k \setminus V_0} I_{it} + \Sigma_{i \in N_k \cap V_0} \hat{I}_{it}$,
V_0 — zbiór produktów końcowych, $V_0 = \{i : i \in N, S_i = \emptyset\}$.

W modelu A1 w wyniku agregacji mogą pojawić się nowe produkty spełniające warunki W1, W2, W3, mimo iż początkowo nie zachodził dla nich warunek W3. Tak więc możliwa jest wieloetapowa agregacja i w ogólnym przypadku nie można z góry jednoznacznie przewidzieć, które produkty ulegną w rezultacie agregacji. W dalszej części rozdziału ograniczymy się do omawiania własności tylko jednego kroku agregacji. Wszystkie rozważania można jednak przenieść indukcyjnie na przypadek agregacji wieloetapowej.

Twierdzenie 2. *Problem A1 jest relaksacją problemu P1.*

Dowód. Funkcja celu (3.1) jest równoważna (1.1) przy uwzględnieniu warunku W1 i podstawienia (2.7). Analogicznie ograniczenia (3.4) są równoważne ograniczeniom (1.4). Nierówności (3.3) wynikają z dodania stronami nierówności (1.3) dla $i \in N_k$ przy odpowiednio dużym M. Ograniczenia (3.5) otrzymujemy sumując stronami ograniczenia (1.5) dla $i \in N_k \setminus V_0$ oraz ograniczenia (2.5) dla $i \in N_k \cap V_0$. Można sprawdzić, że podobnie jak w przypadku systemów jednostopniowych, zastąpienie nierówności (1.5) przez (2.8) dla produktów końcowych nie prowadzi do żadnych zmian zbioru rozwiązań dopuszczalnych problemu P1. Równania (3.2) są rezultatem sumowania równań (1.2) dla poszczególnych grup produktów podobnych i uwzględnienia warunków W2 i W3. Z powyższego wynika, że każde rozwiązanie problemu P1 stanowi rozwiązanie dopuszczalne problemu A2 i daje taką samą wartość funkcji celu. □

Twierdzenie 3. *Jeżeli struktura produkcji problemu P1 ma charakter acykliczny, to struktura produkcji problemu zagregowanego zgodnie z wymogami W1, W2, W3 też ma charakter acykliczny.*

Dowód. Załóżmy, że graf struktury produkcji problemu A1 zawiera cykl. Wówczas istnieje ciąg produktów-agregatów $k_1, k_2, \ldots, k_m$, taki że $k_2 \in S^*_{k_1}, k_3 \in S^*_{k_2}, \ldots, k_1 \in S^*_{k_m}$. Skoro $k_2 \in S^*_{k_1}$, to istnieją takie produkty $i_1 \in N_{k_1}, j \in N_{k_2}$, że $j \in S_{i_1}$. Ale wówczas z warunku W3 wynika, że każdy produkt $j \in N_{k_2}$ spełnia $j \in S_{i_1}$. Analogiczne własności zachodzą dla pozostałych par agregatów $(k_2, k_3), (k_3, k_4), \ldots, (k_m, k_1)$. W rezultacie istnieje taki ciąg produktów $i_1, i_2, \ldots, i_m$, że $i_2 \in S_{i_1}, i_3 \in S_{i_2}, \ldots, i_1 \in S_{i_m}$, co przeczy założeniu o acykliczności struktury produkcji problemu P1. □

Zadanie harmonogramowania produkcji w systemie jednostopniowym posiadało tę korzystną własność, że rozwiązanie problemu zagregowanego dawało się zawsze zdezagregować w sposób dokładny (Twierdzenie 1). Okazuje się, że w ogólnym przypadku możliwości dokładnej dezagregacji są bardziej ograniczone. Istnieją bowiem przykłady zadań, gdzie z rozwiązania problemu zagregowanego nie można uzyskać dopuszczalnego rozwiązania problemu pierwotnego.

Własność 1. *Rozwiązanie problemu A1 nie zawsze można zdezagregować tak, by były spełnione warunki dopuszczalności zadania P1.*

Dowód. Podamy przykład zadania, w którym wartość funkcji celu dla optymalnego rozwiązania problemu zagregowanego jest mniejsza od wartości funkcji celu optymalnego rozwiązania problemu pierwotnego. Rozważmy problem harmonogramowania o następujących parametrach: $n = 3, r_{21} = 1, r_{31} = 1, V_0 = \{1\}, K = 2, N_1 = \{1\}, N_2 = \{2,3\}, T = 2, c_{12} = 2, d_{12} = 1, c_{21} = 1, I_2(0) = 2, e_{31} = 1$ i pozostałych parametrach równych zeru. Można sprawdzić, że optymalne rozwiązanie problemu zagregowanego daje koszt równy zeru, np. przy $X_1(1) = 1, X_1(2) = 0, X_2(1) = 0, X_2(2) = 0$, gdzie $X_1(t) = x_1(t), X_2(t) = x_2(t) + x_3(t), t = 1, 2$. Z drugiej strony wartość funkcji celu dla optymalnego rozwiązania problemu pierwotnego musi być większa od zera, gdyż nie może jednocześnie zachodzić $x_1(2) = 0$ i $x_3(1) = 0$. □

Przykład zamieszczony w powyższym dowodzie pokazuje, że w ogólnym przypadku oszacowanie optymalnej wartości funkcji celu problemu P1, uzyskane na drodze rozwiąnia problemu zagregowanego, może być dowolnie złe, tzn. błąd oszacowania może wynosić nawet 100%. Na szczęście istnieją dość szerokie klasy zadań, gdzie optymalne rozwiązanie problemu zagregowanego można zawsze zdezagregować w optymalne rozwiązanie problemu pierwotnego.

Twierdzenie 4. *Niech spełnione będą warunki W1, W2, W3. Jeżeli wszystkie produkty podlegające agregacji, tzn. produkty $\{i : i \in N_k, |N_k| > 1, k = 1, \ldots, K\}$, spełniają jeden z warunków:*

$$\begin{aligned} i &\in V_0 \\ I_{it} &\geq I_{i,t-1} - d_{it} \qquad t = 1, \ldots, T \end{aligned} \tag{3.6}$$

to problem A1 posiada rozwiązanie dopuszczalne wtedy i tylko wtedy, gdy problem P1 posiada rozwiązanie dopuszczalne.

Dowód. Zgodnie z twierdzeniem 2 problem A1 jest relaksacją problemu P1, zatem jeżeli istnieje rozwiązanie dopuszczalne w P1, to istnieje rozwiązanie dopuszczalne w A1. Niech $X_k(t), F_k(t), k = 1, \ldots, K, t = 1, \ldots, T$, będzie rozwiązaniem problemu A1. Pokażemy, że z tego rozwiązania może być wyliczone rozwiązanie dopuszczalne problemu P1, czyli że istnieje rozwiązanie dopuszczalne w problemie dezagregacji

$$I_i(t-1) + x_i(t) - I_i(t) = d_{it} + \sum_{j \in S_i} r_{ij} x_j(t) \qquad i \in N_k, t = 1, \ldots, T \tag{3.7}$$

$$\sum_{i \in N_k} x_i(t) = X_{kt} \tag{3.8}$$

$$I_i(t) \geq \underline{I}_{it} \quad x_i(t) \geq 0 \tag{3.9}$$

gdzie $\underline{I}_{it} = \begin{cases} \hat{I}_{it} & i \in N_k \cap V_0 \\ I_{it} & i \in N_k \setminus V_0. \end{cases}$

Z warunku W3 wynika, że

$$\sum_{j \in S_i} r_{ij} x_i(t) = \sum_{l \in \bar{S}_i} R_{il} X_l(t) \tag{3.10}$$

gdzie $\bar{S}_i = \{l :$ istnieje $j \in N_l$ oraz $(i,j) \in E\}$. Prawa strona równań (3.7) jest więc równa $\bar{d}_{it} = d_{it} + \sum_{l \in \bar{S}_i} R_{il} X_l(t)$. Niech

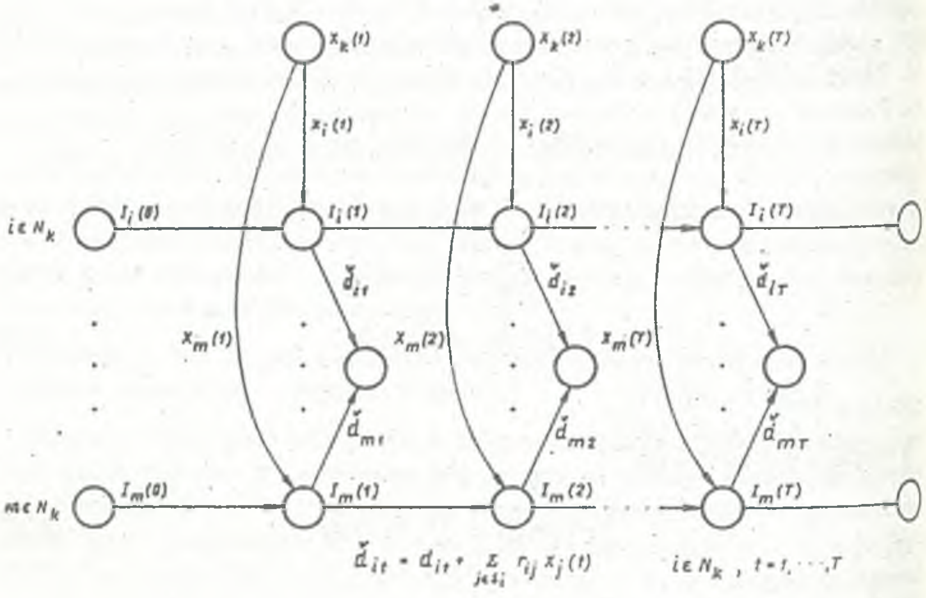
$$\bar{I}_{it} = \begin{cases} I_i(0) & t = 0 \\ \max(\underline{I}_{it}, \bar{I}_{i,t-1} - \bar{d}_{it}) & t = 1, \ldots, T. \end{cases}$$

Ponieważ na mocy założenia (3.6) zachodzi $\underline{I}_{it} \geq \underline{I}_{i,t-1} - \bar{d}_{it}$ dla każdego $i \in N, t = 1, \ldots, T$, więc $\bar{I}_{it} = \underline{I}_{it}$ dla dowolnego rozwiązania dopuszczalnego $X_l(t)$. Z twierdzenia 1 wynika zatem, że problem dezagregacji określony ograniczeniami (3.7,3.8,3.9) posiada rozwiązanie dopuszczalne. □

W literaturze najczęściej jest rozpatrywany w przypadek zadań harmonogramowania produkcji z zerowymi stanami początkowymi zapasów i zerowymi dolnymi dopuszczalnymi poziomami zapasów . Jak wynika z twierdzenia 4, problemy takie można zawsze dezagregować w sposób dokładny.

4. Dezagregacja

Ograniczenia (3.7,3.8,3.9) łącznie z zależnością (3.10) stanowią podstawowy model dezagregacji problemu A1. Rozwiązanie problemu P1 może więc być wyliczone poprzez znalezienie przepływów dopuszczalnych w K sieciach o strukturze przedstawionej na rys. 1.



Rys. 1. Sieć dezagregacji dla k-tej grupy wyrobów.
Fig. 1. The disaggregation network for the $k-th$ group of products.

Przy dokonywaniu tylko jednego etapu dezagregacji zachodzi własność (3.10), zatem poszukiwanie przepływów dopuszczalnych w sieciach z rys. 1. może odbywać się w sposób niezależny, tzn. jednocześnie np. na K równoległych procesorach.

Jak już wspomniano, proces agregacji może być przeprowadzany w większej ilości etapów niż jeden. Naturalnym sposobem przekształcenia rozwiązania wynikowego problemu zagregowanego w rozwiązanie problemu pierwotnego, jest dezagregacja poszczególnych etapów przeprowadzana w kolejności odwrotnej niż agregacja. W rezultacie wyliczane są wówczas wartości rozwiązań wszystkich pośrednich modeli zagregowanych.

Okazuje się, że proces dezagregacji można też przeprowadzić bezpośrednio w jednym kroku. Model dezagregacji stanowią wtedy również ograniczenia (3.7,3.8,3.9), przy czym zbiór N_k jest rozumiany jako zbiór wszystkich produktów tworzących ostateczny wynikowy agregat, a nie jako zbiór produktów agregowanych w jednym etapie. Poszukiwanie przepływów dopuszczalnych w sieciach odpowiadających ograniczeniom (3.7,3.8,3.9) nie może się jednak odbywać w tym przypadku w sposób niezależny, ponieważ własność (3.10) może nie zachodzić. Z twierdzenia 3 wynika, że graf struktury produkcji problemu zagregowanego jest acykliczny, zatem można tak zorganizować proces dezagregacji, że wartości $x_j(t)$ dla $j \in S_i$ będą wyliczane wcześniej niż wartości $x_i(t)$. Najpierw muszą być dezagregowane agregaty końcowe, potem ich poprzednicy, itd..

Pokażemy na zakończenie, w jaki sposób można dokonywać agregacji i dezagregacji, gdy warunek W1 nie jest dokładnie spełniony. Załóżmy najpierw, że wartości parametrów $c_{it}, h_{it}, t = 1, \ldots, T$ dla produktów tych samych grup są zbliżone, lecz niekoniecznie równe. Problem P1 można wtedy zagregować do postaci A1 przyjmując za C_{kt}, H_{kt} pewne koszty zagregowane, np. bedące kombinacją wypukłą parametrów $c_{it}, h_{it}, i \in N_k$. Dezagregując rozwiązanie powyższego problemu poprzez minimalizację funkcji

$$z = \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in N_k} (c_{it} x_i(t) + h_{it} I_i(t))$$

przy ograniczeniach (3.7,3.8,3.9), otrzymujemy suboptymalne rozwiązanie problemu P1 (rozwiązanie to zawsze istnieje, jeżeli spełnione są pozostałe warunki sformułowane w twierdzeniu 4). Od sposobu wynaczania kosztów zagregowanych zależy oczywiście jakość uzyskiwanego rozwiązania.

Gdy parametry p_{irt} dla $i \in N_k, k = 1, \ldots, K$ nie są zgodne, to przy niedużych rozbieżnościach możemy przyjąć w modelu A1 wartość $P_{krt} = \max(p_{irt} : i \in N_k)$. W ten sposób ograniczamy zbiór rozwiazań dopuszczalnych problemu zagregowanego, ale jeżeli zbiór ten nie jest pusty, to dla zadań spełniających założenia twierdzenia 4 uzyskamy rozwiązanie dopuszczalne problemu pierwotnego.

5. Zakończenie

Na podstawie rozważań przeprowadzonych w pracy można zaproponować następujący ogólny schemat rozwiązywania problemu P1:

1. Agregacja zadania.
2. Rozwiązywanie problemu zagregowanego.
3. Dezagregacja rozwiązania zagregowanego.

W wyniku takiego postępowania dla klasy zadań harmonogramowania produkcji spełniającej sformułowane w rozdziale 3 warunki regularności uzyskujemy optymalne rozwiązanie problemu pierwotnego. Dla innych zadań rozwiązanie odpowiednio sformułowanego problemu zagregowanego stanowić może jedynie dolne oszacowanie, które może być wykorzystywane np. w metodzie podziału i ograniczeń.

Literatura

[1] Afentakis P., Gavish B., Karmarkar U.: Computationally Efficient Optimal Solutions to the Lot-Sizing Problem in Multi-Stage Assembly Systems, *Management Science*, 30, 222-239, 1984.

[2] Afentakis P., Gavish B.: Optimal Lot-Sizing Algorithms for Complex Product Structures, *Operations Research*, 34, 237-249, 1986.

[3] Love S.F.: Facilities in Series Inventory Model with Nested Schedules, *Management Science*, 18, 327-338, 1972.

[4] Toczylowski E.: On Aggregation of Items in the Single-Stage Lot Size Scheduling Problem, *Large Scale Systems* 10, 157-164, 1986.

[5] Zipkin P.H.:Bounds for Aggregating Nodes in Network Problems, *Mathematical Programming*, 19, 155-177, 1980.

Recenzent:Doc.dr hab.inż.M.Zaborowski

Wpłynęło do Redakcji do 1988-04-30.

УСЛОВИЯ РЕГУЛЯРНОЙ АГГРЕГАЦИИ ПРОДУКТОВ В МНОГОУРОВНЕВЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМАХ

Р е з ю м е

В работе рассматривается модель календарного планирования в многоуровневой производственной системе, учитывающей ресурсные ограничения и ограничения для нижнего уровня запасов. Дан метод регулярной аггрегации для модели с редуцированным размером. Даны достаточные условия для проведения регулярной аггрегации. Определён класс задач для решения первичной проблемы.

CONDITIONS OF THE REGULAR AGGREGATION OF PRODUCTS IN MULTISTAGE PRODUCTION SYSTEMS

Summary

Production scheduling model in multistage production system with resource constraints and general initial and safety stock levels is considered. We present a method of regular aggregation of items which allows the aggregated model having the same structure as the original model to be obtained. The conditions for regular aggregation are given and a class of problems allowing the optimal solution of the original problem to be found from the solution of the aggregated problem is specified.