ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
Seria: AUTOMATYKA z.94 Nr kol.970

Jan Węglarz
Politechnika Poznańska

WIELOKRYTERIALNE PROBLEMY ROZDZIAŁU ZASOBÓW CIĄGŁYCH W KOMPLEKSIE OPERACJI NIEZALEŻNYCH

Streszczenie. W pracy rozpatruje się problemy rozdziału zasobów ciągłych, podwójnie ograniczonych między operacje niezależne, opisane nieliniowymi równaniami wiążącymi prędkość ich wykonywania z chwilowymi przydziałami zasobów. Sformułowano problemy optymalizacji wektorowej, w których oprócz kryteriów T (czas wykonywania zbioru operacji) i Lmax (maksymalne opóźnienie wykonania operacji), uwzględnia się poziomy chwilowej dostępności i sumarycznego zużycia zasobów.

1. Wstęp

Problematyka sterowania rozdziałem zasobów ciągłych pomiędzy operacje o modelach w postaci równań różniczkowych: prędkość wykonywania - ilości zasobów przydzielonych w danej chwili, uprawiana jest już od ponad dwudziestu lat (por. [4]). Zainteresowanie tą problematyką wynika z dwóch faktów. Po pierwsze, w wielu sytuacjach praktycznych mamy do czynienia z zasobami podzielnymi w sposób ciągły (np. moc, intensywność inwestowania, dzienna liczba roboczogodzin) lub takimi, które z natury są podzielne w sposób dyskretny, ale z uwagi na dużą liczbę możliwych przydziałów mogą być w przybliżeniu traktowane jako ciągłe (np. strony wspólnej pamięci operacyjnej w wieloprocesorowych systemach komputerowych). Po drugie, wspomniane modele operacji pozwalają na zbadanie podstawowych własności sterowań optymalnych w zależności od kryterium optymalności, prawych stron modeli operacji, ograniczeń zasobowych i kolejnościowych, co jest następnie wykorzystywane do jak najefektywniejszego wyznaczania tych sterowań, w szczególności w sposób analityczny. Ważna jest również praktyczna łatwość budowy rozważanych modeli, np. wtedy, gdy prędkość wykonywania operacji zależy od natężenia prądu elektrycznego (wszelkie maszyny z silnikami elektrycznymi, wanny elektrolityczne) lub w systemach komputerowych, gdy zależy ona od przyznanej liczby stron pamięci operacyjnej.

Jeśli chodzi o sformułowanie deterministyczne i zasoby głównie ciągłe, to podstawowe wyniki zostały podsumowane w [11]. Niektóre uogólnienia zawierają prace [6], [7], [8]. Problemy, w których operacje o powyższych modelach oprócz zasobów ciągłych żądają do swego wykonania także zasobów dyskretnych, rozpatrywano szerzej w rozdziale 7 pracy [1], podsumowując tam szereg wcześniejszych wyników. Zdecydowana większość wymienionych wyników dotyczyła minimalizacji czasu wykonania kompleksu operacji; jedynie w [7,8] rozpatrywano także kryterium całkowe. W [13] sformułowano i rozwiązano problem szeregowania operacji przed liniami krytycznymi, mający szczególne znaczenie w wypadku operacji produkcyjnych.

Wspomnijmy także liczne prace poświęcone sformułowaniu probabilistycznemu, np. [2,3].

Wszystkie powyższe prace były poświęcone problemom jednokryterialnym. W ogólności jednak chodzi o optymalny, w określonym sensie, kompromis między wieloma kryteriami, co prowadzi do wielokryterialnego podejmowania decyzji. Dla dyskretnych żądań zasobowych problemy wielokryterialne były rozważane w [9,10], natomiast dla żądań ciągłych i zasobów odnawialnych (tj. podlegających tylko ograniczeniu chwilowej dostępności) w [14]. W tej pracy sformułujemy problemy optymalizacji wektorowej dla zasobów ciągłych, podwójnie ograniczonych, to znaczy takich, dla których ograniczone są zarówno chwilowa dostępność, jak i sumaryczne zużycie. Jest to kategoria zasobów najogólniejsza z punktu widzenia ograniczeń zasobowych, a rozpatrywanie obu ograniczeń (chwilowej dostępności i sumarycznego zużycia) jest szczególnie istotne w problemach syntezy, gdy chodzi o wyznaczenie ilości zasobów zapewniających wykonanie danego kompleksu operacji przy zadanej jakości. W szczególności wymienione na początku przykłady zasobów ciągłych są typowymi zasobami podwójnie ograniczonymi, dla których w ogólności są ograniczone odpowiednio: energia, łączne nakłady, łączna liczba roboczogodzin.

W rozdziale 2 podamy matematyczne sformułowanie problemu. Rozdziały 3 i 4 zawierają sformułowanie problemów optymalizacji wektorowej, odpowiednio dla czasu wykonania kompleksu operacji i maksymalnego opóźnienia operacji, jako składowych wektora kryteriów obok poziomów chwilowej dostępności i sumarycznego zużycia zasobów. Uwagi końcowe stanowią treść rozdziału 5.

2. Sformułowanie problemu

Rozpatrzmy n niezależnych operacji o modelach

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \varphi_i\left[u_{i1}(t), u_{i2}(t), \ldots, u_{is}(t)\right], \quad x_i(0)=0, \quad x_i(C_i)=w_i \qquad (1)$$

gdzie: $x_i(t)$ jest stanem operacji i w chwili t,

$u_{ik}(t)$ jest ilością zasobu k przydzielonego do operacji i w chwili t, k=1,2,...,s; s jest liczbą zasobów,

φ_i jest funkcją ciągłą, niemalejącą, $\varphi_i(0)=0$,

C_i jest (nie znanym z góry) momentem zakończenia wykonywania operacji i,

w_i jest stanem końcowym operacji i.

Wartość $x_i(t)$ jest obiektywną miarą pracy związanej z realizacją operacji i do chwili t lub, w wypadku operacji produkcyjnych, ilością produktu powstającą w wyniku realizacji tej operacji do chwili t. Odpowiednio w_i jest obiektywną miarą pracy związanej z realizacją operacji i lub żądaną ilością produktu powstającą w wyniku realizacji tej operacji.

Zasoby są podwójnie ograniczone, to znaczy podlegają ograniczeniom chwilowym (dla każdego t)

$$\sum_{i=1}^{n} u_{ik}(t) \leq N_k, \; k=1,2,\ldots,s \tag{2}$$

oraz całkowym

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{C_i} u_{ik}(t)\,dt \leq M_k, \; k=1,2,\ldots,s \tag{3}$$

gdzie N_k, M_k oznaczają odpowiednio poziom chwilowej dostępności i całkowitego zużycia zasobu k.

Jeśli poziomy N_k, M_k, $k=1,2,\ldots,s$, są znane, to problem polega na wyznaczaniu odcinkami ciągłych funkcji wektorowych $\underline{u}_i(t) = [u_{i1}(t), u_{i2}(t),\ldots,u_{is}(t)]$, $u_{ik}(t) \geq 0$, $i=1,2,\ldots,n$; $k=1,2,\ldots,s$, spełniających (1), (2) i (3) oraz ewentualnie dodatkowe warunki, np. $C_i \leq d_i$, $i=1,2,\ldots,n$, gdzie d_i są zadane, jeśli takie funkcje istnieją. Zbiór tych funkcji dla wszystkich i nazywać będziemy sterowaniem dopuszczalnym. Można również poszukiwać sterowania optymalnego, to znaczy takiego sterowania dopuszczalnego, które ekstremalizuje przyjęte kryterium oceny wykonania kompleksu operacji Q. Ogólniejszy problem otrzymujemy jednak, jeśli przyjmiemy, że poziomy N_k, M_k nie są znane, ale są traktowane (łącznie z kryterium Q) jako kryteria w problemie optymalizacji wielokryterialnej. W dwóch kolejnych rozdziałach chcemy sformułować problemy optymalizacji wektorowej z kryteriami N_k, M_k, $k=1,2,\ldots,s$ oraz $Q = T = \max_i\{C_i\}$ lub $Q = L_{max} = \max_i\{C_i - d_i\}$.

Tak ogólny problem jest trudny do rozwiązania, gdyż bez dodatkowych założeń nie można udowodnić praktycznie żadnych własności sterowań optymalnych dla ustalonych poziomów N_k, M_k, $k=1,2,\ldots,s$. Dlatego w dalszym ciągu przyjmiemy, że zasoby uczestniczą w wykonywaniu poszczególnych operacji w znanych proporcjach, to znaczy

$$u_{ik}(t) = c_{ik}u_i(t), \; i=1,2,\ldots,n; \; k=1,2,\ldots,s \tag{4}$$

gdzie $u_i(t) \in [0,1]$, $c_{ik} \geq 0$ są dane, $i=1,2,\ldots,n$; $k=1,2,\ldots,s$.

Założenie to jest często dobrze uzasadnione w praktyce, gdy proporcje między zasobami wynikają ze względów technologicznych lub np. ze związków między siłą roboczą a nakładami finansowymi (płace, koszt stanowisk pracy itd.). Nawet jednak wtedy, gdy tak nie jest, można rozwiązać odpowiedni problem dla różnych wartości c_{ik} i wybrać najbardziej satysfakcjonujące rozwiązanie.
Biorąc pod uwagę (4), możemy zapisać (1) w postaci

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i\left[u_i(t)\right],\ x_i(0) = 0,\ x_i(C_i) = w_i \tag{5}$$

gdzie $f_i\left[u_i(t)\right] = \varphi_i\left[c_{i1}u_i(t), c_{i2}u_i(t), \ldots, c_{is}u_i(t)\right]$, $i=1,2,\ldots,n$, natomiast (2) i (3) w postaci

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ik}u_i(t) \le N_k \text{ dla każdego } t,\ k=1,2,\ldots,s \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ik} \int_{0}^{C_i} u_i(t)dt \le M_k,\ k=1,2,\ldots,s \tag{7}$$

Wystarczy zatem poszukiwać funkcji skalarnych $u_i(t)$ zamiast funkcji wektorowych $\underline{u}_i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$.

3. Problemy optymalizacji wektorowej z kryterium T

Zacznijmy od przypomnienia wyniku uzyskanego dla ustalonych poziomów N_k, M_k, $k=1,2,\ldots,s$ (por. [11]). W tym celu oznaczmy przez R_k zbiór wszystkich punktów $\underline{u} = (u_1,u_2,\ldots,u_n)$, $u_i \in [0,1]$, $i=1,2,\ldots,n$, w n-wymiarowej rzeczywistej przestrzeni Euklidesowej, spełniających nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ik}u_i \le N_k \tag{8}$$

oraz przez V_k zbiór wszystkich punktów $\underline{v} = (v_1,v_2,\ldots,v_n)$ zdefiniowanych następująco

$$\underline{v} \in V_k \Longleftrightarrow \underline{r} \in R_k,\ \text{gdzie } v_i = f_i(r_i),\ i=1,2,\ldots,n \tag{9}$$

przy czym f_i są funkcjami z (5), co oznacza, że (9) jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym.
Łatwo zauważyć, że R_k i V_k są zbiorami dopuszczalnych, unormowanych przydziałów zasobu k z pominięciem (7), odpowiednio w układzie współ-

rzędnych $\underline{r}$ i $\underline{v}$. Biorąc pod uwagę cały zbiór ograniczeń (6), otrzymujemy odpowiednie zbiory $R = \bigcap_{k=1}^{s} R_k$ oraz $V = \bigcap_{k=1}^{s} V_k$.

Wynik, który chcemy przypomnieć, jest następujący.

Twierdzenie 1

Dla ustalonych N_k, M_k, $k=1,2,\ldots,s$ oraz dla spełnionych ograniczeń (7), minimalny czas wykonania kompleksu operacji niezależnych, jako funkcja stanów końcowych operacji $\underline{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, może być zawsze wyrażony wzorem

$$T_{min}(\underline{w}) = T^*(\underline{w}) = \min\left\{T > 0 \; : \; \underline{w}/T \in \text{conv } V\right\}$$

gdzie conv V jest powłoką wypukłą zbioru V.

Korzystając z tego wyniku, można wykazać poniższe twierdzenia, uogólniając odpowiednie twierdzenia podane w [11] dla jednego rodzaju zasobu.

Twierdzenie 2

Dla ustalonych poziomów N_k, M_k, $k=1,2,\ldots,s$, i dla wklęsłych f_i, $i=1,2,\ldots,n$, sterowanie optymalne istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{T_k \to \infty} T_k \sum_{i=1}^{n} c_{ik} f_i^{-1}(w_i/T_k) \leq M_k, \quad k=1,2,\ldots,s \tag{10}$$

gdzie f_i^{-1} jest funkcją odwrotną do f_i, przy czym nierówność jest ostra dla ściśle wklęsłych f_i, $i=1,2,\ldots,n$.

Twierdzenie 3

Jeśli poziomy N_k, M_k, $k=1,2,\ldots,s$, są ustalone, f_i są wklęsłe, $i=1,2,\ldots,n$, oraz nierówność (10) jest spełniona (z "<" dla f_i ściśle wklęsłych), to zawsze istnieje sterowanie optymalne, w którym wszystkie operacje są wykonywane w pełni równolegle, wykorzystując stałe ilości zasobów

$$u_{ik}^* = c_{ik} f_i^{-1}(w_i/T^*), \quad i=1,2,\ldots,n; \; k=1,2,\ldots,s \tag{11}$$

$$T^* = \max_k \left\{T_k^*\right\}$$

gdzie T_k^* jest jedynym dodatnim pierwiastkiem równania

$$T_k \sum_{i=1}^{n} c_{ik} f_i^{-1}(w_i/T_k) = M_k, \text{ jeśli } \sum_{i=1}^{n} c_{ik} f_i^{-1}(w_i/T_k^*) \leq N_k \tag{12}$$

lub równania

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ik} f_i^{-1}(w_i/T_k) = N_k, \text{ w przeciwnym razie.} \tag{13}$$

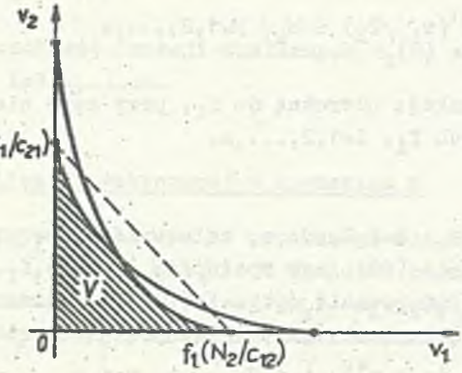
Zauważmy, że wyznaczenie sterowania optymalnego wymaga w tym wypadku rozwiązania co najwyżej 2s równań typu (12) lub (13), i że równania te mogą być niekiedy rozwiązane w sposób analityczny, w szczególności dla

$$f_i = a_i\, u_i^{1/b_i}, \quad b_i \in \{1,2,1,4\}, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Dowody twierdzeń 2 i 3 opierają się na fakcie, że dla wklęsłych f_i, $i=1,2,\ldots,n$, zbiór V jest wypukły, czyli $V = \mathrm{conv}\, V$, a stąd punkt przecięcia prostej $\underline{v} = \underline{w} / T$ z brzegiem tego zbioru jest zawsze dopuszczalnym, unormowanym przydziałem zasobów (w układzie współrzędnych $\underline{v}$). W ogólności niestety tak nie jest, a tym samym nie możemy wykazać tak ogólnych i atrakcyjnych obliczeniowo wyników. Istnieje jednak kilka ważnych podprzypadków, w których można wykorzystać znajomość a priori postaci zbioru conv V. Bodaj najważniejszy z nich jest przypadek funkcji f_i, $i=1,2,\ldots,n$, wypukłych i takich, że $V \subset S$, gdzie S jest sympleksem rozpiętym na punktach $(0, 0,\ldots,0, f_i(u_i^*), 0,0,\ldots,0)$, przy czym

$$u_i^* = \min\{N_k / c_{ik}\} \tag{14}$$

znajduje się na i-tej pozycji (por. rys.1 dla n=s=2).



Rys.1. Przykładowe zbiory V i convV = S dla n=s=2
Fig.1. Examples of sets V and convV = S for n=s=2

W tej sytuacji mamy oczywiście convV = S i korzystając z tego można wykazać kolejne dwa twierdzenia.

<u>Twierdzenie 4</u>

Dla ustalonych poziomów N_k, M_k, $k=1,2,\ldots,s$, i dla wypukłych f_i, $i=1,2,\ldots,n$, takich, że convV = S, sterowanie optymalne istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy

$$u_{ik}^* \sum_{i=1}^{n} w_i/f_i(u_i^*) \le M_k, \quad k=1,2,\ldots,s \tag{15}$$

gdzie $u_{ik}^* = c_{ik}\, u_i^*$, u_i^* są zdefiniowane wzorem (14).

Twierdzenie 5

Jeśli poziomy N_k, M_k, $k=1,2,\ldots,s$, są ustalone, f_i są wypukłe, $i=1,2,\ldots,n$, i takie, że conv$V$ = S, a ponadto zachodzi (15), to optymalne jest szeregowe wykonywanie operacji ilościami zasobów u_{ik}^* zdefiniowanymi w twierdzeniu 4.

Na podstawie powyższych twierdzeń możemy sformułować odpowiednie problemy optymalizacji wektorowej w sytuacji, gdy poziomy N_k, M_k, $k=1,2,\ldots,s$, nie są ustalone.

Problem 1

Dla f_i, $i=1,2,\ldots,n$, wklęsłych i spełniających (10) dla każdego $M_k>0$, $k=1,2,\ldots,s$, problem optymalizacji wektorowej dla Q = T ma postać

$$\min\,[N_1,N_2,\ldots,N_s;\ M_1,M_2,\ldots,M_s;\ T]$$

przy ograniczeniach

$$T = \max\{T_k^*\}$$

gdzie T_k^*, $k=1,2,\ldots,s$, jest jedynym dodatnim pierwiastkiem równania (12) lub (13) (por. tw.3)

$$N_k, M_k \geqslant 0,\ k=1,2,\ldots,s.$$

Problem 2

Dla f_i, $i=1,2,\ldots,n$, wypukłych i takich, że conv$V$ = S, problem optymalizacji wektorowej dla Q = T ma postać

$$\min\,[N_1,N_2,\ldots,N_s;\ M_1,M_2,\ldots,M_s;\ T]$$

przy ograniczeniach

$$T = \sum_{i=1}^{n} w_i/f_i\,(u_i^*)$$

$$u_{ik}^*\,T \leq M_k,\ k=1,2,\ldots,s$$

gdzie u_i^* jest dane wzorem (14), $u_{ik}^* = c_{ik}\,u_i^*$

$$N_k, M_k \geqslant 0,\ k=1,2,\ldots,s.$$

4. Problemy optymalizacji wektorowej z kryterium L_{max}

Załóżmy obecnie, że dla operacji i zdefiniowany jest pożądany termin zakończenia wykonywania d_i, $i=1,2,\ldots,n$. Uporządkujmy terminy d_i tak, że $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_{n-1} \le d_n$ i oznaczmy przez $x_{ij} \geq 0$ część operacji i (czyli część w_i), wykonywaną w przedziale $[d_{j-1}, d_j)$, $j=1,2,\ldots,n$; $d_0 = 0$. Przez dopuszczalny podział operacji na części realizowane w powyższych przedziałach rozumiemy ciąg nieujemnych liczb rzeczywistych

$$\left\{x_{ij}\right\}_{i=j,\ j=1}^{n\quad n}, \text{ takich, że } \sum_{j=1}^{i} x_{ij} = w_i,\ i=1,2,\ldots,n,$$

dla których spełnione są ograniczenia zasobowe. Można wykazać następujące twierdzenie [13], będące uogólnieniem twierdzenia 1 z [12].

Twierdzenie 6

Dla ustalonych poziomów N_k, M_k, $k=1,2,\ldots,n$, sterowanie, w którym dla operacji i, $C_i \le d_i$, $i=1,2,\ldots,n$, istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dopuszczalny podział operacji na części wykonywane w przedziałach $[d_{j-1}, d_j)$, $j=1,2,\ldots,n$; $d_0 = 0$, dla którego

$$T_j^{*}\left(\left\{x_{ij}\right\}_{i=j}^{n}, \left\{N_k\right\}_{k=1}^{s}, \left\{M_{jk}\right\}_{k=1}^{s}\right) \le d_j - d_{j-1},\ j=1,2,\ldots,n;\ d_0=0$$

gdzie T_j^{*} jest minimalnym czasem wykonywania części operacji $\left\{x_{ij}\right\}_{i=j}^{n}$, M_{jk} jest zużyciem zasobu k w przedziale $[d_{j-1}, d_j)$.

Posługując się powyższym twierdzeniem możemy wykorzystać wyniki przedstawione w twierdzeniach 2-5 dla sformułowania następujących problemów optymalizacji wektorowej, gdy poziomy N_k, M_k, $k=1,2,\ldots,s$, nie są ustalone.

Problem 3

Dla f_i, $i=1,2,\ldots,n$, wklęsłych i spełniających (10) dla każdego $M_k>0$, $k=1,2,\ldots,s$, problem optymalizacji wektorowej dla $Q = L_{max}$ ma postać

$$\min\left[N_1,N_2,\ldots,N_s;\ M_1,M_2,\ldots,M_k;\ L_{max}\right]$$

przy ograniczeniach

$$T_1^{*}\left(\left\{x_{i1}\right\}_{i=1}^{n}, \left\{N_k\right\}_{k=1}^{s}, \left\{M_{1k}\right\}_{k=1}^{s}\right) \le d_1 + L_{max}$$

$$T_j^{*}\left(\left\{x_{ij}\right\}_{i=j}^{n}, \left\{N_k\right\}_{k=1}^{s}, \left\{M_{jk}\right\}_{k=1}^{s}\right) \le d_j - d_{j-1},\ j=2,3,\ldots,n$$

$$\sum_{j=1}^{i} x_{ij} = w_i,\ i=1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} M_{jk} \le M_k, \; k=1,2,\ldots,s$$

$$N_k,\; M_k,\; M_{jk} \geq 0, \; k=1,2,\ldots,s;\; j=1,2,\ldots,n$$

gdzie

$T_j^* = \max_k \left\{ T_{jk}^* \right\}$, T_{jk}^* jest jedynym dodatnim pierwiastkiem

równania

$$T_{jk} \sum_{i=j}^{n} c_{ik}\, f^{-1}\, (x_{ij}/T_{jk}) = M_k, \text{ jeśli } \sum_{i=j}^{n} c_{ik}\, f_i^{-1}\, (x_{ij}/T_{jk}^*) \le N_k$$

lub równania

$$\sum_{i=j}^{n} c_{ik}\, f_i^{-1}\, (x_{ij}/T_{jk}) = N_k, \text{ w przeciwnym razie.}$$

Problem 4

Dla f_i, $i=1,2,\ldots,n$, wypukłych i takich, że $\operatorname{conv} V = S$, problem optymalizacji wektorowej dla $Q = L_{max}$ ma postać

$$\min \left[N_1, N_2, \ldots, N_s;\; M_1, M_2, \ldots, M_k;\; L_{max} \right]$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{j \le i} w_j \,/\, f_j\,(u_j^*) \le d_i + L_{max}, \; i=1,2,\ldots,n$$

$$u_{ik}^* \quad \sum_{i=1}^{n} w_i \,/\, f_i\,(u_i^*) \le M_k, \; k=1,2,\ldots,s$$

gdzie u_i^* jest dane wzorem (14), $u_{ik}^* = c_{ik}\, u_i^*$

$$N_k,\; M_k \geq 0, \; k=1,2,\ldots,s.$$

5. Uwagi końcowe

Przedstawiliśmy sformułowania problemów optymalizacji wektorowej dla najogólniejszej kategorii zasobów podwójnie ograniczonych, gdy poziomy ich chwilowej dostępności i sumarycznego zużycia nie są ustalone, a kryterium sterowania stanowi czas wykonania kompleksu operacji lub maksymalne opóźnienie wykonania operacji. Do rozwiązania sformułowanych problemów można zastosować różne podejścia, m.in. opisane w [5]. Możliwe są bardziej lub mniej bezpośrednie uogólnienia przedstawionego podejścia. Do tych pierwszych należą np. problemy operacji zależnych dla Q=T, gdy można wykorzystać znane podejście z porządkowaniem wierzchołków sieci operacji (por.np. [11]), czy problemy operacji niezależnych dla $Q = L_{max}$, gdy momenty gotowości operacji do wykonywania są różne (por. [12,13]). Do drugich można zaliczyć m.in. problemy operacji zależnych dla $Q = L_{max}$, wymagające kombinacji wspomnianych podejść. Podkreślmy jeszcze, że stosowanie modeli ciągłych jest obliczeniowo uzasadnione wtedy, gdy można wykazać i wykorzystać pewne własności sterowań, jak to pokazaliśmy w tej pracy. Gdy tak nie jest, prostsze obliczeniowo problemy otrzymujemy dyskretyzując przedstawiony model.

LITERATURA

[1] Błażewicz J., Cellary W., Słowiński R., Węglarz J.: Scheduling Under Resource Constraints - Deterministic Models, J.C.Baltzer, Basel, 1986.

[2] Bubnicki Z.: Multilevel optimization of the complex of operations, Proc. IFAC/ IFORS Workshop on Systems Analysis, Pergamon Press, Oxford, 1977.

[3] Bubnicki Z.: Two-level optimization and control of the complex of operations, Proc. VI IFAC Congress, Pergamon Press, Oxford, 1978.

[4] Burkow W.N.: Raspriedielenije resursow kak zadacza optimalnogo bystrodiejstwija, Awtomat. i Telemeh. 27, No.7, 1966.

[5] Hwang C.L.; Masud A.S.M.: Multiple Objective Decision Making - Methods and Applications. A State of the Art Survey, Lecture Notes in Economics and Mathematical Sciences, Springer Verlag, Berlin, 1979.

[6] Janiak A., Stankiewicz A.: The equivalence of local and global time-optimal control of a complex of operations, Int. J. Control 38, No.6, 1981.

[7] Nowicki E., Zdrzałka S.: Optimal control of a complex of independent operations, Int. J. Systems Sci. 12, No.1, 1981.

[8] Nowicki E., Zdrzałka S.: Optimal control policies for resource allocation in an activity network, Europ. J. Opl. Res. 16, No.2, 1984.

[9] Słowiński R.: Multiobjective network scheduling with efficient use of renewable and nonrenewable resources, Europ. J. Opl. Res. 7, No.3, 1981.

[10] Słowiński R., Węglarz J.: An interactive algorithm for multiobjective precedence and resource constrained scheduling problems, Proc. 8 World Congress on Project Management INTERNET'85, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[11] Węglarz J.: Modelling and control of dynamic resource allocation project scheduling systems, chapter 3 w: S.G.Tzafestas (ed.): Optimization and Control of Dynamic Operational Research Models, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[12] Węglarz J.: Sterowanie rozdziałem zasobów ciągłych w celu wykonania operacji przed liniami krytycznymi, Zeszyty Naukowe Polit. Śląskiej, s.Automatyka, z.74, 1984.

[13] Węglarz J.: Allocating continuous, doubly constrained resources among parallel production activities to meet deadlines, R.A.I.R.O. APII 19, 1985.

[14] Węglarz J.: Multicriteria scheduling problems under continuous activity models; prosessing speed vs. resource amounts, Proc. 2nd Internat. Conference on Production Systems, INRIA, Paris, 1986.

Recenzent:Doc.dr hab.inż.J.Klamka

Wpłynęło do Redakcji do 1988-04-30.

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ РЕСУРСОВ В КОМПЛЕКСЕ НЕЗАВИСИМЫХ ОПЕРАЦИЙ

Р е з ю м е

В работе рассмотрены проблемы распределения непрерывных дважды ограниченных ресурсов между независимыми операциями, описанными нелинейными уравнениями, связывающими скорость выполнения этих операций с распределением ресурсов в определённом моменте. Сформулированы проблемы векторной оптимизации, в которых кроме критериев T (время выполнения совокупности операций) и L_{max} (максимальная задержка выполнения операций), учитывается уровни доступности ресурсов в данный момент и суммарное израсходование ресурсов.

MULTICRITERIA RESOURCE ALLOCATION PROBLEMS IN A COMPLEX OF INDEPENDENT OPERATIONS

S u m m a r y

In this paper we consider problems of allocating continuous, doubly constrained resources among independent operations /i.e. activities/ described by nonlinear equations: processing speeds vs. resource amounts allotted at a given moment. Vector-optimization problems are formulated in which apart from schedule length T or maximum lateness L_{max}, levels of resource availabilyty and consumption are taken into account.