

Stanisław BIELAK

Anna WITKOWSKA-KUSZKE

## ROZWIĄZANIE STANU BŁONOWEGO CIENKIEJ POWŁOKI SFERYCZNEJ OBCIĄŻONEJ OSIOWO-SYMETRYCZNIE

**Streszczenie.** Przedstawione w artykule rozwiązania stanu błonowego oparte zostały na liniowej teorii izotropowych jednorodnych powłok sprężystych. W stosunku do dotychczasowych opracowań, sposób rozwiązania powłoki pełnej oraz ze świetlikiem został znacznie uproszczony z powodu odpowiedniego sparametryzowania powłoki oraz zastosowania rachunku tensorowego. Na uwagę zasługuje fakt, że siły przekrojowe wynikające z pracy błonowej są wielkościami minimalnymi. Każda interwencja wytrącająca powłokę z pracy błonowej powoduje powstanie dodatkowych sił związanych z pracą zgięciową.

### 1. Wstęp

Powłokę sferyczną wykorzystuje się w wielu zastosowaniach inżynierskich, przede wszystkim w konstrukcjach zbiorników, naczyń ciśnieniowych, korpusów reaktorów jądrowych i ich zabezpieczeń oraz kopuł.

Spośród innych powłok wyróżnia się ona równomierną pracą w złożonych warunkach klimatycznych, pod działaniem zarówno obciążeń statycznych jak i udarowych oraz dużą stabilnością sejsmiczną. Nie można pominąć również waloru architektonicznego szeroko stosowanych fragmentów powłok sferycznych.

Uwzględniając duże znaczenie praktyczne rozważanego problemu, dążono do uzyskania jak najprostszycch rozwiązań. Temu celowi służyło sparametryzowanie powłoki sferycznej we współrzędnych krzywoliniowych geograficznych, co dało maksymalne uproszczenia współczynników pierwszej i drugiej formy różniczkowej i ułatwiło formułowanie warunków brzegowych oraz zastosowanie rachunku tensorowego formalizującego zapis.

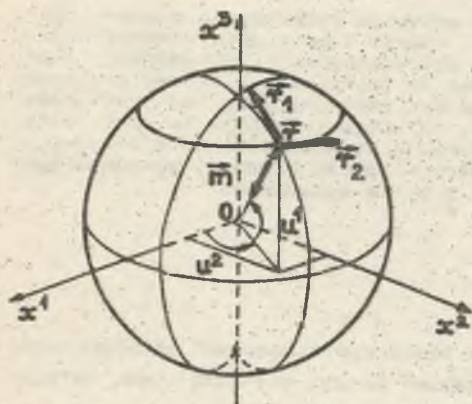
Przedstawione rozwiązania stanu błonowego dotyczą cienkiej powłoki sferycznej o stałej grubości i oparte zostały na liniowej teorii izotropowych jednorodnych powłok sprężystych. Wyprowadzone na podstawie prac [1], [3] ogólne wzory zastosowano do konkretnych przypadków obciążenia powłoki.

Wydaje się, że przedstawiony sposób zapisu rozwiązania układu równań różniczkowych może być szczególnie przydatny w praktyce obliczeniowej prowadzonej przy użyciu maszyn cyfrowych. Dotyczy to w szczególności przypadków, gdy sposób podparcia powłoki będzie gwarantował pracę błonową. Wówczas otrzymane rozwiązanie stanu błonowego powłoki będzie jej pełnym rozwiązaniem.

## 2. Opis geometryczny powierzchni środkowej powłoki

Równanie wektorowe powierzchni środkowej powłoki sferycznej

$$\vec{r} = a \left[ (\vec{i}_1 \cos \frac{u^2}{a} + \vec{i}_2 \sin \frac{u^2}{a}) \cos \frac{u^1}{a} + \vec{i}_3 \sin \frac{u^1}{a} \right], \quad (2.1)$$



Kys. 1. Powierzchnia środkowa powłoki sferycznej

gdzie:

- $a$  - promień powłoki,
- $u^1, u^2$  - współrzędne krzywoliniowe na powierzchni,
- $u^1$  - określa położenie punktu na wybranym południku,
- $u^2$  - wskazuje południk, na którym leży punkt.

Wprowadzone dla uproszczenia rachunku bezwymiarowe zmienne  $\frac{u^1}{a}, \frac{u^2}{a}$  zawarte są w przedziałach:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{u^1}{a} \leq \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leq \frac{u^2}{a} \leq 2\pi$$

Warto zauważyć, że parametryzacja ta posiada punkty osobliwe w biegunach, dla których  $\frac{u^1}{a} = \pm \frac{\pi}{2}$ .

Współczynniki pierwszej i drugiej formy różniczkowej oraz ich wyróżniki wynoszą:

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1, & b_{11} &= \frac{1}{a}, \\ g_{22} &= a, & b_{22} &= \frac{1}{a} a, \\ g_{12} &= g_{21} = 0, & b_{12} &= b_{21} = 0, \\ g &= \cos^2 \frac{u^1}{a} & b &= \frac{1}{a} a. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Krzywizny - gausowska i średnie

$$K = \frac{1}{a^2}, \quad (2.3)$$

$$H = \frac{1}{a}.$$

Symbole Christoffela drugiego rodzaju

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0,$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2g} g_{,1},$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} g_{,1},$$

$$\Gamma_{22}^2 = 0.$$

Przecinek użyty w (2.4) oznacza odpowiednią pochodną wziętą względem zmiennej  $u^1$  lub  $u^2$ .

### 3. Związki geometryczne powłoki

Związki składowych przemieszczenia z tensorem odkształcenia błonowego wyrażają się wzorami

$$\bar{w}^1_{,1} - \frac{1}{a} \bar{w}^3 = \bar{\gamma}_{11}^1,$$

$$\bar{w}^1_{,2} + g \bar{w}^2_{,1} = 2 \bar{\gamma}_{12}^1, \quad (3.1)$$

$$g(\bar{w}^2_{,2} + \frac{1}{2g} g_{,1} \bar{w}^1) - \frac{1}{a} g \bar{w}^3 = \bar{\gamma}_{22}^2.$$

Użyte w (3.1) kreski  $\bar{w}^1$ ,  $\bar{\gamma}_{1j}^1$  deklarują przynależność do stanu błonowego.



## 4. Związki fizyczne

Związki wiążące naprężenia z odkształceniami dla wersji uproszczonej przyjęto z pracy [1]

$$\begin{aligned} N^{1j} &= \bar{N}^{1j} + 6 H M^{1j}, \\ M^{1j} &= \hat{M}^{1j} + \xi h^2 H \bar{N}^{1j}, \\ Q^j &= -\frac{2 E h^3}{3(1-\nu^2)} g^{1j} \cdot 2B|_1 + \xi h^2 (H \bar{N}^{1j})|_1. \end{aligned} \quad (4.1)$$

przy czym siły błonowe  $\bar{N}^{1j}$  i momenty  $\hat{M}^{1j}$  są związane z odkształceniami wzorami

$$\begin{aligned} \bar{N}^{1j} &= \frac{2 E h}{1-\nu^2} \left[ (1-\nu) \varphi^{1j} + \nu g^{1j} A \right], \\ \hat{M}^{1j} &= -\frac{4 E h^3}{3(1-\nu^2)} \left[ (1-\nu) \varphi^{1j} + \nu g^{1j} B \right]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

gdzie:

- $\xi$  - parametr stały,
- $E$  - moduł Younga,
- $\nu$  - współczynnik Poissona,
- $2h$  - grubość powłoki,
- $A, B$  - niezmienniki będące sumami

$$\begin{aligned} A &= g^{1j} \varphi_{1j}, \\ B &= g^{1j} \varphi_{1j}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Związki (4.2) dla stanu błonowego dostosowane do bezpośredniego wykorzystania przyjmują postać

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{11} &= \frac{1}{2 E h} \left[ \bar{N} - (1+\nu) g \bar{N}^{22} \right], \\ \bar{\varphi}_{12} = \bar{\varphi}_{21} &= \frac{1}{2 E h} (1+\nu) g \bar{N}^{12}, \\ \bar{\varphi}_{22} &= \frac{1}{2 E h} g \left[ \bar{N} - (1+\nu) \bar{N}^{11} \right], \end{aligned} \quad (4.4)$$

gdzie:

$$\bar{N} = g_{ij} \cdot \bar{N}^{ij}. \quad (4.5)$$

### 5. Równania równowagi

Ogólny układ równań równowagi dla powłok wyraża się wzorami [1]

$$\begin{aligned} N^{ij}|_i - Q^i b_i^j + p^j &= 0, \\ N^{ij} \cdot b_{ij} + Q^j|_j + P^3 &= 0, \\ N^{ij}|_j - Q^j &= 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Kontrawariantne tensory  $N^{ij}$ ,  $Q^i$  oraz  $M^{ij}$  są siłami i momentami przekrojowymi, a  $p^j$ ,  $p^3$  oznaczają kontrawariantne tensory sił obciążających.

Obciążenie zewnętrzne rozłożone w bazie kowariantnej wyraża się wzorem

$$\bar{P} = p^i \bar{r}_i + p^3 \cdot \bar{m}, \quad (5.2)$$

gdzie:

$\bar{r}_i$ ,  $\bar{m}$  są wektorami bazy kowariantnej,

$$\bar{r}_i = \bar{r}_{,i} \quad i = 1, 2,$$

$$\bar{m} = \frac{\bar{r}_1 \times \bar{r}_2}{\sqrt{g}}. \quad (5.3)$$

Pierwsze trzy równania (5.1) opisują stan błonowy, przy założeniu  $Q^i = 0$ . Dla powłoki sferycznej, dla której wielkości geometryczne opisują wzory (2.2)-(2.4), równania te przyjmują postać

$$\begin{aligned} (\sqrt{g} \bar{N}^{11})_{,1} + (\sqrt{g} \bar{N}^{12})_{,2} - \frac{1}{2} g_{,1} \sqrt{g} \bar{N}^{22} + \sqrt{g} P^1 &= 0, \\ (g \sqrt{g} \bar{N}^{12})_{,1} + (g \sqrt{g} \bar{N}^{22})_{,2} + g \sqrt{g} P^2 &= 0, \\ H \sqrt{g} \bar{N} + \sqrt{g} P^3 &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

W wyrażeniach (5.4), w ramach liniowej teorii, przyjęto symetrię tensora kontrawariantnego sił  $\bar{N}^{ij} = \bar{N}^{ji}$ .

Związki (5.4) dostosowane do bezpośredniego wykorzystania przyjmują postać

$$-(g^2 \bar{N}^{22})_{,1} + (g \bar{N}^{12})_{,2} = -gP^1 + \frac{\sqrt{g}}{H} (\sqrt{g} P^3)_{,1}$$

$$(g \sqrt{g} \bar{N}^{12})_{,1} + (g \sqrt{g} \bar{N}^{22})_{,2} = -g \sqrt{g} P^2, \quad (5.5)$$

$$H(\bar{N}^{11} + g \bar{N}^{22}) = -P^3.$$

W przypadku osiowo-symetrycznego obciążenia powłoki równania (5.5) upraszczają się, gdyż pochodne cząstkowe podług  $u^2$  równają się zeru. W przypadku obciążenia bez symetrii osiowej, związki (5.5) sprowadza się do równań różniczkowych cząstkowych niejednorodnych drugiego rzędu.

## 6. Wielkości fizyczne

Przejęcie wielkości tensorowych na współrzędne fizyczne umożliwiają wzory [1]

- dla sił

$$N_{ij}^{\bar{}} = \sqrt{\frac{g_{11}}{g^{11}}} N^{ij}, \quad (6.1)$$

$$Q_1^{\bar{}} = \sqrt{\frac{1}{g^{11}}} Q^1, \quad (6.2)$$

- dla momentów

$$M_{11}^{\bar{}} = -\sqrt{\frac{g_{11} + g^{11}}{g^{11}}} M^{12}, \quad (6.3)$$

$$M_{12}^{\bar{}} = \sqrt{\frac{g_{11} + g^{22}}{g^{11}}} M^{11},$$

- dla przemieszczeń

$$w_1^{\bar{}} = \sqrt{g_{11}} w^1 \quad 1 = 1, 2, \quad (6.4)$$

$$w_3^{\bar{}} = w^3.$$

Uwaga: po 1, j nie sumować.



### 7. Przykład obliczeniowy

Dana jest zamknięta kupa sferyczna o promieniu  $a$  (rys. 2) podparta w sposób ciągły na obwodzie, poddana działaniu ciężaru własnego

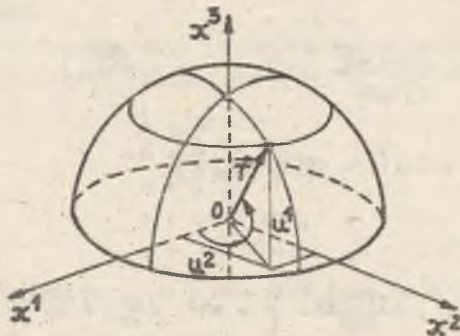
$$q = \gamma \cdot 2h, \quad (7.1)$$

gdzie:

$q$  - pionowe obciążenie na jednostkę powierzchni,

$\gamma$  - ciężar właściwy materiału powłoki,

$2h$  - grubość powłoki.



Rys. 2. Zamknięta kupa sferyczna

#### 7.1. Funkcje obciążeń

Funkcje obciążeń przyjęto następująco

$$P^1 = -q \cdot \sqrt{g},$$

$$P^2 = 0,$$

$$P^3 = -qa\sqrt{g}_{,1}.$$

(7.2)

Symbol  $\sqrt{g}_{,1}$  oznacza pochodną  $\sqrt{g}$  względem zmiennej  $u^1$ :

$$\sqrt{g}_{,1} = \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u^1} = -\frac{1}{a} \sin \frac{u^1}{a}.$$

#### 7.2. Równania równowagi

Wywołany ciężarem własnym symetryczny stan naprężenia powoduje zniknięcie pochodnych cząstkowych względem  $u^2$  we wzorach (3.3), (5.5).

### 7.3. Siły przekrojowe stanu błonowego

Wyrażenia (5.5) po podstawieniu (7.2) i uwzględnieniu warunków pracy powłoki dają

$$\begin{aligned} \bar{N}^{11} &= -\frac{qa}{g} (1 + a\sqrt{g}_{,1}), \\ \bar{N}^{12} &= \bar{N}^{21} = 0, \\ \bar{N}^{22} &= \frac{qa}{g^2} [1 + a\sqrt{g}_{,1}(1 + g)]. \end{aligned} \quad (7.3)$$

### 7.4. Przemieszczenia stanu błonowego

Po uwzględnieniu wartości (7.3) i warunków podparcia, z równań (3.1) otrzymuje się

$$\begin{aligned} \bar{w}^1 &= \frac{(1+\nu)qa^2}{\sqrt{g} 2Eh} \left[ a\sqrt{g}_{,1} \cdot (1 + a\sqrt{g}_{,1}) - g_{,1} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \ln \left| \sqrt{g} \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2\alpha} \right) \right| \right], \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\bar{w}^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \bar{w}^3 &= -\frac{(1+\nu)qa^2}{2Eh} \left[ 1 + a\sqrt{g}_{,1} \left( \frac{2+\nu}{1+\nu} \right) + \ln \left| \sqrt{g} \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2\alpha} \right) \right| \right]. \end{aligned}$$

### 7.5. Wielkości fizyczne

Wzory transformacyjne (6.1), (6.4) dają następujące wielkości fizyczne:  
- dla sił

$$\begin{aligned} N_{11}^I &= \bar{N}^{11}, \\ N_{12}^I &= \sqrt{g} \bar{N}^{12} \\ N_{22}^I &= g \bar{N}^{22}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

- dla przemieszczeń

$$\begin{aligned} w_i^I &= \bar{w}^i \quad i = 1, 2, \\ w_3^I &= \bar{w}^3. \end{aligned} \quad (7.6)$$



Za wzorów (7.5) wynika dla

$$\begin{aligned}
 u^1 = 0 & \quad N_{11}^1 = -qa, \quad N_{22}^1 = qa, \\
 u^1 \rightarrow \frac{\pi}{2} \cdot a & \quad N_{11}^1 \rightarrow -\frac{1}{2}qa, \quad N_{22}^1 \rightarrow -\frac{1}{2}qa, \quad (7.7) \\
 u^1 = \pm 0.43 \frac{\pi}{2} \cdot a & \quad N_{11}^1 = -0.62qa, \quad N_{22}^1 = 0.
 \end{aligned}$$

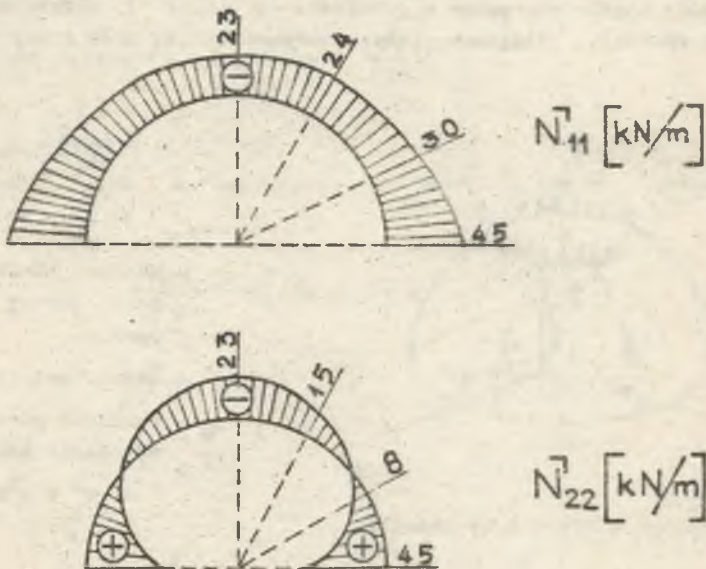
Wykazany w ostatnim warunku (7.7) brak siły równoleżnikowej dla  $\frac{u^1}{a} = \pm 38^\circ 20'$  jest praktycznie wykorzystywany w zagadnieniach optymalnego projektowania powłok sferycznych [5] oraz wyjaśnia przyczynę charakterystycznego "podcięcia" bizantyjskich kopuł.

7.6. Przykład liczbowy

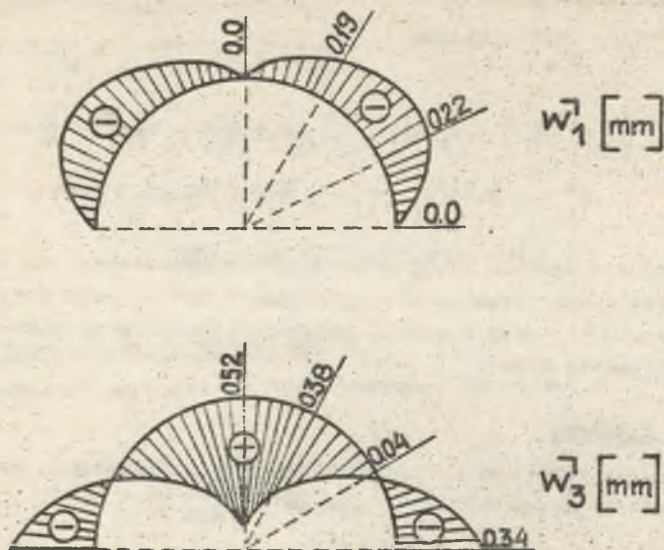
Obliczono siły przekrojowe oraz przemieszczenia zelbstowej kopuły sferycznej dla następujących danych liczbowych

- a = 15,0 m,
- 2h = 0,12 m,
- \(\nu = 0,2\),
- E = 20,0 GPa,
- q = 3,0 kPa.

Wyniki obliczeń przedstawiono graficznie (rys. 3 i 4).



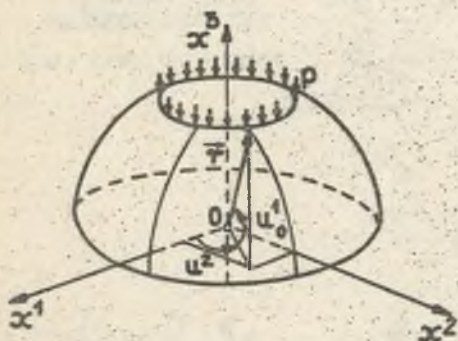
Rys. 3. Wykresy sił wewnętrznych  $N_{11}^1, N_{22}^1$



Rys. 4. Wykresy przemieszczeń  $w_1$ ,  $w_3$

### 8. Przykład obliczeniowy

Dana jest kupa sferyczna o promieniu  $a$  (rys. 5) podparta w sposób ciągły na obwodzie, obciążona ciężarem własnym (7.1) oraz ciężarem świetlika



Rys. 5. Kupa sferyczna ze świetlikiem

$$p = \frac{Q}{2\pi a \sqrt{g_0}} \quad (8.1)$$

gdzie:

$p$  - pionowe liniowe obciążenie górnej krawędzi powłoki,

$Q$  - ciężar świetlika,

$g_0$  - wyróżnik pierwszej formy różniczkowej (2.2)

dla  $u^1 = u^1_0$ .

### 8.1. Funkcje obciążeń

Przyjęto funkcje obciążeń (7.2). Działanie obciążenia (8.1) uwzględniono w dalszym etapie (formułowanie warunków brzegowych).

### 8.2. Równania równowagi

Wywołany obciążeniami (7.1) i (8.1) symetryczny stan naprężenia powoduje uproszczenie obliczeń analogiczne do 7.2.

### 8.3. Siły stanu błonowego

Wartości sił otrzymuje się ze wzorów (5.5) superponując dwa przypadki pracy powłoki:

- 1) kopuła z otworem na świetlik obciążona tylko ciężarem własnym,
- 2) "nieważka" kopuła obciążona na górnej krawędzi ciężarem świetlnika.

Wypadkowe wartości sił wynoszą

$$\begin{aligned} \bar{N}^{11} &= -\frac{1}{g} [q a^2 (\sqrt{g_{,1}} - \sqrt{g_{,10}}) + p \sqrt{g_c}], \\ \bar{N}^{12} &= \bar{N}^{21} = 0, \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$\bar{N}^{22} = \frac{1}{g^2} [q a^2 (\sqrt{g_{,1}}) (1 + g) - \sqrt{g_{,10}}] + p \sqrt{g_c}.$$

gdzie:

$\sqrt{g_{,10}}$  - wartość wyrażenia  $\sqrt{g_{,1}}$  dla  $u^1 = u^1_0$ .

### 8.4. Przemieszczenie stanu błonowego

Po uwzględnieniu (8.2) i warunków podparcia powłoki, wypadkowe wartości przemieszczeń wynoszą

$$\begin{aligned} \bar{w}^1 &= \frac{(1 + \nu) q a^2}{\sqrt{g} 2 E h} \left[ a \sqrt{g_{,1}} (1 + a \sqrt{g_{,1}}) \left( \frac{p \sqrt{g_c}}{c a} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a \sqrt{g_{,10}} \right) - g (\ln |\sqrt{g}| + \ln |\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{u^1}{2a})|) \left( \frac{p \sqrt{g_c}}{q a} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a \sqrt{g_{,10}} \right) \right], \\ \bar{w}_2^2 &= 0, \end{aligned} \quad (8.3)$$



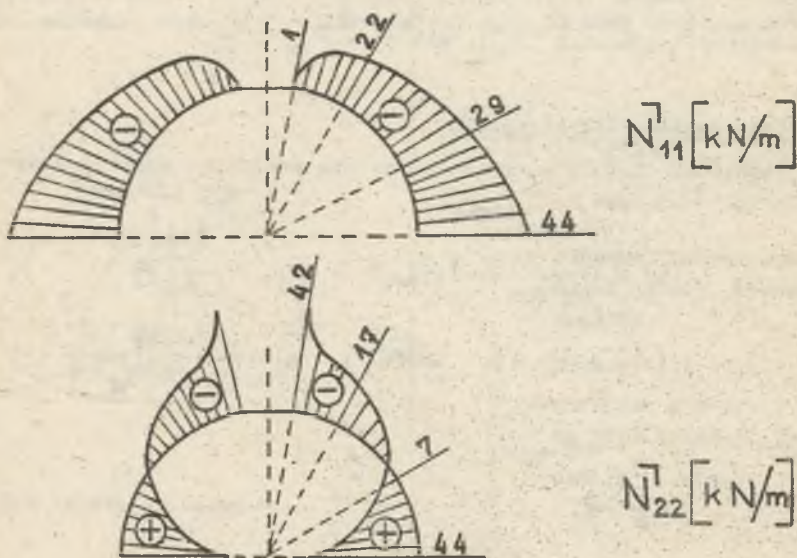
$$\begin{aligned} \bar{w}^3 = & - \frac{(1+\nu)q_0^2}{2Eh} \left/ \left( \frac{p\sqrt{g_0}}{q_0} - a\sqrt{g_{,10}} \right) (1 + a\sqrt{g_{,1}}) + \right. \\ & + a\sqrt{g_{,1}} \left( \frac{1}{1+\nu} + \ln|\sqrt{g}| + \ln|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{u^1}{2a} \right) \left( \frac{p\sqrt{g_0}}{q_0} - a\sqrt{g_{,10}} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{g} \left( \frac{p\sqrt{g_0}}{q_0} - a\sqrt{g_{,10}} - 1 \right) \right/ . \end{aligned}$$

### 8.5. Przykład liczbowy

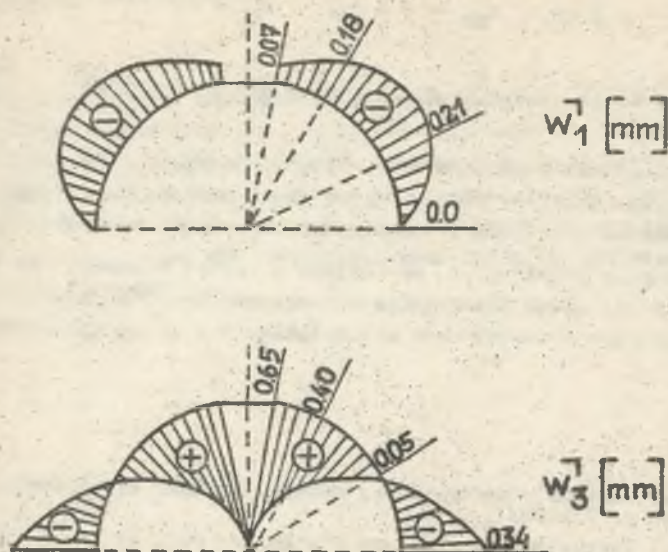
Obliczono siły przekrojowe oraz przemieszczenia żelbetowej kopuły sferycznej ze świetlnikiem dla następujących danych liczbowych

$$\begin{aligned} a &= 15,0 \text{ m,} \\ 2h &= 0,12 \text{ m,} \\ u_0^1 &= \frac{4}{9} \pi a, \\ E &= 20,0 \text{ GPa,} \\ q &= 3,0 \text{ kPa,} \\ p &= 250,0 \text{ N/m} \end{aligned}$$

Wyniki obliczeń przedstawiono graficznie (rys. 6, 7).



Rys. 6. Wykresy sił wewnętrznych  $N_{11}^1, N_{22}^1$

Rys. 7. Wykresy przemieszczeń  $w_1$ ,  $w_3$ 

## 9. Wnioski

1. Pojęcie stanu błonowego, używane w technice, jest pojęciem umownym, albowiem zawsze pracy powłoki towarzyszy zmiana krzywizny, a to powoduje powstanie małych momentów i sił tnących.

Opierając się na związkach fizycznych (4.1) możemy stosunkowo łatwo, bo za pomocą sił przekrojowych  $\bar{N}^{1j}$ , obliczyć te wielkości ze wzorów

$$\bar{N}^{1j} = 2H \frac{h^2}{3} \bar{N}^{1j}, \quad (9.1)$$

$$\bar{Q}^j = -2H \frac{h^2}{3} P^j.$$

Należy jednak podkreślić, że powyższe uogólnione siły przekrojowe są nierozzerwalnie związane z umową "pracę błonową" i dotyczą tylko stanu błonowego.

2. W punkcie osobliwym dla tej parametryzacji, tzn. dla  $u^1 = \frac{2}{3}a$ , siły przekrojowe (7.3) i przemieszczenia (7.4) obliczone z rozwiązań granicznych dążą do następujących wartości

$$N_{11}^1 = -\frac{1}{2} qa, \quad N_{22}^1 = -\frac{1}{2} qa, \quad N_{12}^1 = 0,$$

$$w_1^1 = 0, \quad w_2^1 = 0, \quad w_3^1 = \frac{qa^2}{2EH} [1 + (1+\nu)\ln 2]. \quad (9.2)$$

3. Sposób podparcia powłoki sferycznej umożliwiający "pracę błonową" musi być konstrukcyjnie tak rozwiązany na styku podłoża z podbudową, aby umożliwił swobodne osiągnięcie przemieszczeń  $w_3^1$  (warstwa poślizgowa).

4. Uzyskane siły przekrojowe, wynikające z "pracy błonowej" są wielkościami minimalnymi. Każda interwencja wytrącająca powłokę z pracy błonowej powoduje powstanie dodatkowych sił związanych z pracą zgięciową.

#### LITERATURA

- [1] Biela St.: Powłoki prostokątne. Zeszyty Naukowe WSI w Opolu, Seria Budownictwo z. 3/1976.
- [2] Biela St.: Teoria powłok. Skrypty uczelniane Pol. Śl., Nr 1111/1983.
- [3] Flüggé W.: Powłoki. Obliczenia statyczne. Arkady, Warszawa 1972.
- [4] Goetz A.: Geometria różniczkowa. PWN, Warszawa 1965.
- [5] Sobesov W.G.: Optimalnoje projektinowarije bezmomentnych oboloczok wrascenijsja po metodu pradelnogo rownowesija. Izv.Vyvez. Uczeb. Zaved. Stroit. i Archit. 1978; nr 6, s. 29-37.

Recenzent: Prof. Otton Dąbrowski

#### РЕШЕНИЕ БЕЗМОМЕНТНОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧЕСКОЙ НАГРУЗКОЙ

#### Резюме

В работе дано решение безмоментного состояния основанное на линейной теории изотропных однородных упругих оболочек. По отношению к до сих пор имевшимся работам, способ решения полной оболочки также оболочки с просветом, был значительно упрощён путём соответствующей параметризации оболочки и применения тензорного исчисления. Обращает внимание то обстоятельство, что силы в сечении, являющиеся результатом безмоментного состояния, минимальны. Каждое возмущение сводящее на нет безмоментное состояние ведёт к появлению добавочных сил, связанных с моментной работой.



**SOLUTIONS OF MOMENTLESS STATE - A THIN SPHERICAL SHELL  
LOADED AXIALLY-SYMETRICALLY****S u m m a r y**

Basing on a linear theory of homogenous elastic shells momentless state solutions are presented. A way of the solution of a shell as well as a shell with a skylight is very simple due to the shell parametrization and tensor calculus application. It is interesting to find that section forces resulting of the momentless state are minimal. Every intervention unbalancing a shell from the momentless work leads to additional forces connected with a moment work.