ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988
Seria: AUTOMATYKA z.95 Nr kol.971

Jakub Gutenbaum, Wiktor Olinger
Instytut Badań Systemowych PAN, Warszawa

RÓWNOLEGŁE WYKONYWANIE ZADAŃ PRODUKCYJNYCH PRZEZ URZĄDZENIA O ZADANYM PRIORYTECIE

Streszczenie. W artykule rozpatrzono zadanie wyznaczenia harmonogramu dla maszyn pracujących równolegle na wspólny magazyn przy zadanych priorytetach włączania maszyn. Zaproponowano heurystyczny algorytm rozwiązania tego zadania. Takie zadanie może również powstać w wyniku pewnej dekompozycji ogólniejszego zadania wyznaczania harmonogramu dla maszyn bez zadanego priorytetu włączania.

1. Wstęp

W zautomatyzowanych systemach produkcyjnych dąży się do minimalizacji "produkcji w toku", której wartość w dużym stopniu określona jest przez niezbędne do normalnego toku produkcji zapasy w magazynach międzyoperacyjnych.

W artykule rozpatruje się zadanie, w którym K urządzeń produkuje określony wyrób do wspólnego magazynu. Wypływ z magazynu jest zadany przez plan produkcyjny. Poszczególne urządzenia charakteryzują się zróżnicowaną wydajnością czy też różnymi kosztami jednostkowymi. W wyniku takiego zróżnicowania określona jest kolejność (priorytet) włączania urządzeń.

Rozpatrywane zadanie polega na wyznaczaniu harmonogramu działania poszczególnych urządzeń, tak aby zminimalizować funkcję celu równą sumie kwadratów różnic między sumarycznym dopływem a wypływem produktu z magazynu, z uwzględnieniem ograniczeń na minimalną i maksymalną pojemność magazynu. Zadanie sprowadzono do liniowego zadania programowania binarnego. W takiej postaci może być ono rozwiązane za pomocą standardowego pakietu komputerowego. Wobec tego, że takie pakiety są mało efektywne przy większej liczbie zmiennych (powyżej kilkuset), opracowano wyspecjalizowany algorytm heurystyczny. W tym celu zadanie sprowadzono do wyznaczenia quasioptymalnej ścieżki w grafie ukierunkowanym, z dwustronnymi ograniczeniami na parametry węzłów.

Rozpatrywany problem można rozszerzyć na przypadek produkowania przez te same urządzenia kilku produktów z uwzględnieniem czasów przezbrojeń. Wymaga to jednak założenia o kolejności produkowania poszczególnych wyrobów.

Dla przypadku, gdy a priori znane są jedynie statystyczne reprezentacje wypływów z magazynu, przedstawiono sposób operacyjnego zarządzania urządzeniami produkcyjnymi. Polega on na bieżącym nadążaniu stanu magazynu za stanem optymalnym (lub quasi-optymalnym) wyznaczonym na podstawie reprezentacji statystycznej. Przy takim nadążaniu użytkuje się jedynie informację o wypływie w bieżącym przedziale czasu.

2. Sformułowanie zadania

Rozpatrujemy zadanie układania harmonogramu pracy K równolegle pracujących urządzeń dostarczających produkt do wspólnego magazynu. Harmonogram układany jest na horyzont czasowy składający się z N przedziałów czasu (okresów).

Przyjmujemy, że zadane są priorytety działania poszczególnych urządzeń, co oznacza, że urządzenia o niższym priorytecie (np. o wyższych kosztach jednostkowych lub o gorszych parametrach technologicznych) działają, w miarę potrzeb, jedynie wówczas, gdy działają urządzenia o priorytecie wyższym. Poszczególne urządzenia numerujemy w ten sposób, że im wyższy jest priorytet danego urządzenia, tym wyższy nadany mu numer.

Równanie bilansowe magazynu ma postać:

$$s_i = s_{i-1} + \sum_{j=1}^{K} q_i^j - a_i \quad ; \; s(0) = s_0 \quad ; \; i=1,\ldots,N \tag{1}$$

przy czym: $s_i = s(i)$ - stan magazynu na końcu i-tego okresu,

$a_i = a(i)$ - wypływ z magazynu w ciągu i-tego okresu,

$q_i^j = q^j(i)$ - dopływ z j-tego urządzenia w i-tym okresie.

Dopływy do magazynu określone są wzorami:

$$q_i^j = Q_i^j \, x_i^j \quad ; \; i=1,\ldots,N \quad ; \; j=1,\ldots,K \tag{2}$$

przy czym: $x_i^j = \begin{cases} 1 & \text{- przy j-tym urządzeniu działającym w i-tym okresie,} \\ 0 & \text{- w przypadku przeciwnym,} \end{cases}$ (3)

Q_i^j - wydajność j-tego urządzenia w i-tym okresie.

W rozpatrywanym zadaniu optymalizacyjnym o binarnych zmiennych decyzyjnych x_i^j funkcja celu ma postać:

$$J = \sum_{i=1}^{N} \left(a_i - \sum_{j=1}^{K} q_i^j\right)^2 \tag{4}$$

przy czym obowiązuje ograniczenie:

$$S^{min} \leqslant s_i \leqslant S^{max} \quad ; \quad i=1,\ldots,N \tag{5}$$

Podstawiając (1) do (4) można przekształcić funkcję celu do postaci:

$$J = \sum_{i=1}^{N} (s_i - s_{i-1})^2 \tag{6}$$

Minimalizacja (4) jest więc równoznaczna z minimalizacją, w sensie średniokwadratowym, wahań zapełnienia magazynu.

3. Zadanie optymalizacji

Wzór (4), po uwzględnieniu (2), można przekształcić do postaci:

$$J = \sum_{i=1}^{N} a_i^2 + \sum_{j=1}^{K} (Q_i^j x_i^j)^2 - 2a_i Q_i^j x_i^j + 2 \sum_{j=1}^{K-1} Q_i^j x_i^j \Big(\sum_{l=j+1}^{K} Q_i^l x_i^l \Big) \tag{7}$$

Z zasady działania priorytetów i sposobu numeracji urządzeń wynika:

$$\left.\begin{array}{l} x_i^j = 0 \text{ implikuje } x_i^1 = \ldots x_i^{j-1} = 0 \\ x_i^j = 1 \text{ implikuje } x_i^{j+1} = \ldots x_i^K = 1 \end{array}\right\} ;\ j=1,\ldots,K \tag{8}$$

Zgodnie z (3) i (8) mamy:

$$\begin{array}{l} {x_i^j}^2 = x_i^j \\ x_i^j \sum_{l=j+1}^{K} Q_i^l x_i^l = x_i^j \sum_{l=j+1}^{K} Q_i^l \quad ; \quad j=1,\ldots,K;\ i=1,\ldots,N \end{array} \tag{9}$$

Podstawienie (9) do (7) daje:

$$J = \sum_{i=1}^{N} \Big(a_i^2 + \sum_{j=1}^{K} b_i^j x_i^j\Big) \tag{10}$$

przy czym:

$$\begin{array}{ll} b_i^j = Q_i^j \Big[Q_i^j - 2\Big(a_i - \sum_{l=j+1}^{K} Q_i^l\Big)\Big]; & j=1,\ldots,K-1 \\ & i=1,\ldots,N \\ b_i^K = Q_i^K (Q_i^K - 2a_i)\ ; & \end{array} \tag{11}$$

W wyniku działania zasady priorytetów można więc wyjściową kwadratową funkcję celu przekształcić do postaci liniowej względem zmiennych binarnych x_i^j.

Jednocześnie zasadę priorytetów można przedstawić w postaci zbioru ograniczeń na zmienne binarne:

$$x_i^{j+1} - x_i^j \geq 0; \quad i=1,\ldots,N\ ; \quad j=1,\ldots,K-1 \tag{12}$$

Podstawiając (2) do (5) otrzymujemy ograniczenia na poziomy magazynu w postaci jawnej względem zmiennych binarnych:

$$s^{min} \leq s_0 - \sum_{l=1}^{i} a_l + \sum_{l=1}^{i} \sum_{j=1}^{K} Q_l^j x_l^j \leq s^{max}\ ; \quad i=1,\ldots,N \tag{13}$$

W ten sposób zadanie ułożenia harmonogramu optymalnego przy zadanych priorytetach sprowadzono do standardowego zadania programowania binarnego liniowego: minimalizacja funkcji celu (10) przy ograniczeniach (12) i (13).

Problem można również sprowadzić do zadania programowania całkowitoliczbowego, przyjmując jako zmienne decyzyjne liczby urządzeń r_i działających w poszczególnych okresach. Wiemy bowiem, że jeśli w i-tym okresie działa $r_i = K-l$ urządzeń, to są to urządzenia o numerach:

$$l+1 \; , \; l+2 \; , \ldots , K$$

przy czym $l = 0,\ldots,K$.

Sytuacji, w której działa K-l urządzeń, odpowiadają jednoznacznie następujące wartości zmiennych binarnych:

$$x_i^1 = x_i^2 = \ldots x_i^l = 0 \; ; \qquad x_i^{l+1} = x_i^{l+2} \ldots = x_i^K = 1 \tag{14}$$

Przy $r_i = K$ działają wszystkie urządzenia, przy $r_i = 0$ - żadne z urządzeń nie działa.

Funkcję celu, po uwzględnieniu (8), można zapisać w postaci jawnej zależności od liczby urządzeń r_i działających w poszczególnych okresach:

$$J(\underline{r}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{l=K-r_i+1}^{K} b_i^l + a_i^2 \right) \tag{15}$$

przy czym: $\underline{r} = [r_1,\ldots,r_N]^T$; $r_i \in \{0,\ldots,K\}$; $\sum_{l=K+1}^{K} b_i^l = 0$

Zadanie sprowadza się zatem do minimalizacji (15) względem $r_i, i=1,\ldots,N$ przy zachowaniu w każdym okresie warunku (5):

$$\min_{r_i \in \{0,\ldots,K\}} J(\underline{r}) = \sum_{i=1}^{N} a_i^2 + \min_{r_i \in \{0,\ldots,K\}} \sum_{i=1}^{N} \sum_{l=K-r_i+1}^{K} b_i^l$$

$$S^{min} \leq s_i \leq S^{max} \qquad\qquad S^{min} \leq s_i \leq S^{max} \tag{16}$$

$$i \in \{1,\ldots,N\} \qquad\qquad i \in \{1,\ldots,N\}$$

Zadanie (15) wyznaczenia optymalnych wartości $\underline{r} = \hat{\underline{r}}$, minimalizujących funkcję celu (13) przy ograniczeniu (5), można zilustrować za pomocą grafu drzewiastego.

Stany magazynu w okresie i-tym, i=0,...,N, są reprezentowane przez węzły grafu. Każdy stan s_i jest jednoznacznie określony przez stan w okresie poprzednim oraz liczbę urządzeń działających w okresie i-tym:

$$s_i = s_i\,(s_{i-1}, r_i) \tag{17}$$

Graf rozpoczyna się węzłem s_o i kończy węzłami $s_N(s_{N-1}, r_i)$.

Węzły znajdujące się na trajektoriach stanów dopuszczalnych powinny spełniać ograniczenie (5). Liczba trajektorii możliwych wynosi $(K+1)^N$.

Parametrami gałęzi grafu są wartości funkcji celu w i-tym okresie przy włączonych r_i urządzeniach:

$$J_i(r_i) = -\sum_{l=K-r_i+1}^{K} (b_i^l) + a_i^2 \tag{18}$$

Algorytmy wyznaczania ścieżki optymalnej przedstawiono w punkcie 6.

4. Sterowanie ze sprzężeniem od stanu

Przy wyznaczaniu trajektorii stanu (optymalnej) zakładaliśmy znajomość a priori wypływów z magazynu a_i w całym horyzoncie planowania. Rozpatrzmy przypadek, gdy informacja taka dotyczy jedynie reprezentacji statystycznej takiego ciągu. Powstaje problem sterowania bieżącego magazynem przy znajomości jedynie aktualnych wartości a_i.

W opisanej sytuacji proponuje się postępowanie polegające na nadążaniu za optymalną trajektorią stanu $\underline{s}$, wyznaczoną na podstawie znajomości reprezentacji statystycznej ciągu a_i.

W tym celu w każdym kolejnym okresie i wyznaczamy liczbę działających urządzeń $r_i = \tilde{r}_i$, która minimalizuje cząstkową funkcję celu D_i sterowania bieżącego:

$$D_i = (\hat{s}_i - s_i)^2 \quad ; \; i=1,2,\ldots,N \tag{19}$$

przy ograniczeniach (5), przy czym: $\hat{s}_i$ - stan optymalny w okresie i-tym

$$s_i = s_{i-1} - a_i + \sum_{l=K-r_i+1}^{K} Q_i^l \quad ; \; i=1,2,\ldots,N \tag{20}$$

Wobec tego, że minimalizacja (19) może dawać rozwiązania niejednoznaczne, należy dodatkowo sformułować zasadę, wg której preferuje się jedno z dwóch rozwiązań. Może to być np. wybór mniejszej z dwóch wielkości lub też wartości, która prowadzi do stanu s_i bardziej oddalonego od ograniczeń. Przy takim podejściu, jeśli w wyniku minimalizacji D_i otrzymujemy wartość $\tilde{r}_i^1$ oraz $\tilde{r}_i^2$, przy czym:

$$D_i(\tilde{r}_i^1) = D_i(\tilde{r}_i^2) \tag{21}$$

to

$$r_i = \begin{cases} \tilde{r}_i^1 & \text{jeśli } \Delta(r_i^1) \le \Delta(r_i^2) \\ \tilde{r}_i^2 & \text{w przypadku przeciwnym} \end{cases} \tag{22}$$

przy czym:

$$r_i^l = \min\left[s^{max} - s_i(\tilde{r}_i^l),\; s_i(\tilde{r}_i^l) - s^{min}\right] \quad ; \; l=1,2 \tag{23}$$

5. Produkcja wielu wyrobów *

Załóżmy, że na tych samych urządzeniach produkuje się M wyrobów, przy czym zadana jest kolejność, w której układane są harmonogramy ich wykonania - zgodna z kolejnym numerem wyrobu: $m=1,\dots,M$.

Jak z tego wynika, początkowo układamy harmonogram dla wyrobu 1-go bez dodatkowych ograniczeń. Natomiast przy układaniu harmonogramu dla wyrobów następnych $(m=2,\dots,M)$ należy uwzględnić zajętość maszyn, wynikającą z harmonogramu dla wyrobu 1-go.

Przyjmujemy, że j-ta maszyna ma przy wykonaniu m-tego wyrobu kolejny numer j_m, wynikający z zasady priorytetów dla tego wyrobu.

Uwzględnienie zajętości maszyn wynikające z harmonogramów dla wyrobów $1,\dots,m-1$ może mieć postać implikacji:

$$x_i^{j_{m-1}} = 1 \rightarrow Q_i^{j_m} = Q_i^{j_{m+1}} = \dots = Q_i^{j_M} = 0 \tag{24}$$

przy czym: $Q_i^{j_m}$ - wydajność j-tej maszyny przy wykonywaniu m-tego wyrobu w i-tym okresie.

Podobnie można uwzględnić czasy przezbrojeń. Niech przezbrojenie maszyny j-tej z produkcji produktu m-tego na produkcję produktu m+1-go wymaga $H^j_{m,m+1}$ okresów. Należy wtedy przy opracowaniu harmonogramów dla produktów $m+1,\dots,M$ uwzględnić implikację:

$$x_i^{j_m} = 1 \rightarrow Q_{i+h}^{j_g} = 0 \quad \text{dla} \quad h=1,\dots, H^j_{m,m+1}, \quad g=m+1,\dots,M \tag{25}$$

6. Algorytm heurystyczny

Heurystyczny algorytm wyznaczania liczby maszyn włączonych w każdym okresie rozpoczyna się od wczytania danych, takich jak: liczba okresów N, maksymalna liczba maszyn K, wypływy z magazynu a_i oraz wydajność maszyn Q_i^j, $i=1,\dots,N$, $j=1,\dots,K$. Następnie wyznacza się optymalną liczbę maszyn działających w i-tym okresie, przy czym nie uwzględnia się ograniczeń na minimalną i maksymalną pojemność magazynu. Po wyznaczeniu tej liczby (r_i^{opt}) następuje sprawdzenie, czy stan s_i wynikający ze stanu s_{i-1}, liczby włączonych maszyn r_i^{opt} oraz wypływu z magazynu a_i spełnia ograniczenie (5). Jeżeli tak, to przechodzi się do wyznaczania liczby włączonych maszyn w kolejnym (i+1)-szym okresie. Jeżeli ograniczenie (5) w i-tym okresie nie jest spełnione, to przechodzimy do korekcji liczby łączonych maszyn w okresach poprzedzających łącznie z okresem i-tym.

Korekcja rozkłada się na dwie części, w zależności od tego, czy przekroczony jest poziom minimalny magazynu, czy poziom maksymalny. Przy przekroczeniu poziomu minimalnego, we wszystkich okresach, które obejmuje korekcja, próbuje się włączyć większą, niż uprzednio wyznaczona, liczbę maszyn. Włączenie dodatkowej maszyny powoduje zwiększenie zapełnień magazynu, począwszy od rozpatrywanego okresu, o wartości dopływu włączonej maszyny. Dla każdego okresu objętego korekcją pierwsza wolna według ustalonego priorytetu maszyna (jeżeli maszyna taka jest dostępna) zostaje umieszczona na liście korekcji. Z listy tej wybiera się jedną z maszyn, której dodanie do maszyn już działających zmieni funkcję celu o najmniejszą wartość. Po dodaniu tej maszyny (w k-tym okresie) sprawdza się, czy ograniczenie na poziom minimalny magazynu w i-tym okresie jest spełnione. Jeżeli nie, to dla k-tego okresu kolejna według priorytetu maszyna (jeżeli maszyna taka jest dostępna) zostaje umieszczona na liście korekcji. Z listy tej wyznacza się inną maszynę w sposób opisany powyżej. Postępowanie takie powtarza się aż do spełnienia ograniczenia w i-tym okresie lub wyczerpania listy korekcji. W drugim przypadku przyjmuje się, że zadanie nie ma rozwiązania. W przypadku pierwszym przechodzimy do wyznaczania liczby maszyn działających w (i+1)-szym i dalszych okresach.

Analogicznie postępujemy w przypadku przekroczenia poziomu maksymalnego magazynu z tym, że na listę korekcji wpisuje się maszyny działające w okresach podlegających korekcji. Z listy tej wybiera się maszynę do wyłączenia, w celu zmniejszenia zapełnienia magazynu we wszystkich okresach następujących po okresie, w którym została wyłączona maszyna.

Przyjmuje się założenie, że maszyna raz dodana przy korekcji poziomu minimalnego (lub usunięta przy korekcji poziomu maksymalnego), nie może być usuwana (włączana). Jest to reguła heurystyczna, która znacznie zmniejsza liczbę analizowanych wariantów korekcji, ale może spowodować eliminację rozwiązania optymalnego.

W celu uniknięcia zapętlenia, przy przejściu od korekcji poziomu minimalnego na korekcję poziomu maksymalnego lub odwrotnie, przyjmuje się, że korekcji podlegają okresy od okresu, dla którego dokonano ostatniej korekcji poziomu przeciwnego - do okresu i-tego, w którym stwierdzono ponowne naruszenie ograniczenia (5).

Praca została wykonana w ramach tematu RPBR-RP.I.02/5.1 i była finansowana z funduszu problemu RP.I.02 - Teoria sterowania i optymalizacji ciągłych układów dynamicznych i procesów dyskretnych.

Recenzent: Doc.dr hab.inż.J.Klamka

Wpłynęło do Redakcji do 1988-04-30.

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ВЫПОЛНЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ЗАДАЧ АГРЕГАТАМИ С ЗАДАННЫМ ПРИОРИТЕТОМ

Р е з ю м е

В статье рассмотрена задача определения производственного графика для параллельно действующих агрегатов и общего склада , когда заданы приоритеты агрегатов. Предложен эвристический алгоритм решения этой задачи. Такая задача может также возникнуть в результате некой декомпозиции более общей задачи определения графика работы агрегатов с неизвестными приоритетами.

PARALLEL JOB PROCESSING BY A PRIORITY ORDERED SET OF MACHINES

S u m m a r y

In this paper we consider the problem of scheduling jobs on machines manufacturing a certain product to a common storage when a priority of each machine is known. A heuristic algorithm for this problem is proposed. Such problem can arise as a result of some kind of decomposition for a more general problem when the priorities of machines are not known.