ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988
Seria: AUTOMATYKA z.95 Nr kol.971

Eugeniusz Toczyłowski
Instytut Automatyki Politechniki Warszawskiej

SIECIOWE TRANSFORMACJE OGÓLNYCH PROBLEMÓW HARMONOGRAMOWANIA PRODUKCJI PORCJAMI [1]

Streszczenie. Sformułowany został ogólny model zadania harmonogramowania produkcji porcjami w złożonych, wielostopniowych systemach produkcyjnych. Wykazano, że zadanie to przy spełnieniu niezbyt mocnych warunków regularności można przetansformować do pewnego, równoważnego problemu optymalizacji dyskretnej mieszanej o strukturze sieciowej z dodatkowymi ograniczeniami. Relaksacja liniowa powyższego zadania jest silna i porównywalna z relaksacją Lagrange'a zadania pierwotnego. W rezultacie zaproponowano metodę rozwiązywania ogólnego zadania harmonogramowania, która może wykorzystać pakiety programowania liniowego mieszanego wielkiej skali. Pokazano ponadto pewne szczególne strukturalne właściwości tego zadania, pozwalające na konstrukcję wyspecjalizowanego algorytmu. Sformułowano szczególne przypadki rozważanego zadania uwzględniające ogólne, złożone modele podobieństw i różnic między wyrobami dotyczące wznowień produkcji, produkcję wielostopniową oraz jednoczesną produkcję wsadową wielu wyrobów w każdym gnieździe.

1. Wprowadzenie

Harmonogramowanie produkcji porcjami w złożonych, wielostopniowych systemach produkcyjnych należy do trudnych zadań optymalizacji dyskretnej [3,6,4,17,9,21]. Już dla najprostszych, klasycznych modeli harmonogramowania produkcji uwzględniających koszty i czasy przezbrojeń w postaci modelu ze stałą opłatą, ale bez ograniczeń zasobowych, najskuteczniejsze dotychczas algorytmy dokładne oparte o metodę podziału i ograniczeń z wykorzystaniem relaksacji Lagrange'a [1,2] pozwalają na rozwiązywanie zadań o stosunkowo niewielkiej liczbie zmiennych, rzędu kilkudziesięciu. W praktyce stosuje się algorytmy przybliżone [7,12,15].

Zadania stają się bardziej złożone przy uwzględnieniu ograniczeń zasobowych. Jeszcze większą trudność stanowią warunki pozwalające na uwzględnienie bardziej złożonych funkcji kosztów i ograniczeń. Dotyczy to takich przypadków, jak:

- problemy produkcji wieloasortymentowej, gdzie produkty różniące się kosztami produkcji oraz czasami wykorzystania zasobów można pogrupować w rodziny produktów dzielących wspólne, tzw. główne przezbrojenia,
- problem produkcji wielostopniowej, gdzie w każdym stopniu produkcji mogą wystąpić przezbrojenia, a wielkości porcji produkcyjnych są różne w różnych stopniach,
- jednoczesna produkcja wieloasortymentowa w elastycznych gniazdach obróbki, w których czas załadunku narzędzi wspólnych i różnicowych jest nie do pominięcia,

[1] praca częściowo finansowana w ramach problemu R.P.I.02 w temacie 5.3

- jednoczesna produkcja porcjami wielu wyrobów o złożonym modelu podobieństw i różnic między wyrobami, tak jak np. na automatycznej linii montażu płytek drukowanych.

W pracy analizowane są transformacje złożonych problemów harmonogramowania do postaci równoważnych, lecz łatwiejszych do rozwiązania. Podstawowe podejście polega na konstrukcji szczególnych restrykcji problemu pierwotnego, zachowujących rozwiązania optymalne zadania pierwotnego i pozwalających na dalsze transformacje i reformułowanie problemu do łatwiejszej postaci. Silne sformułowania klasycznych zagadnień harmonogramowania produkcji porcjami badano w pracach [4,5,11].

Dla ogólnego zadania optymalizacji dyskretnej w rozdziale 2 sformułowano problem restrykcyjny polegający na odrzuceniu jednorodnych składowych rozwiązania i podano warunki równoważności. W rozdziale 3 rozważany jest jako szczególny przypadek zadania stosunkowo ogólny problem harmonogramowania produkcji oraz jego sieciowa transformacja. Bardziej szczegółowy dyskretno-ciągły model rozważany jest w rozdziale następnym. W rozdziale 5 omawiane są specyficzne, trudne przypadki rozważanego zadania harmonogramowania, dla których dotychczas nie są znane skuteczne metody rozwiązywania. W ostatnim rozdziale rozważane jest zadanie harmonogramowania z ogólnymi poziomami zapasów początkowych i minimalnych.

2. Restrykcja ogólnego zadania optymalizacji

Niech $y = (y_1, \dots, y_n)$ będzie wektorem wszystkich zmiennych decyzyjnych oraz $L := \{y : Ay = b, y \geq 0\}$ będzie wyróżnionym wielościanem wypukłym określającym część warunków ograniczających zbiór dopuszczalny, gdzie A jest macierzą o wymiarach m na n. Rozważamy obecnie następujący problem optymalizacji

Problem P:

$$\min F(y) \tag{2.1}$$

przy ograniczeniach

$$H(y) \leq 0 \tag{2.2}$$

$$y \in L \tag{2.3}$$

gdzie: (2.2) może określać zbiór trudniejszych ograniczeń, natomiast (2.3) określa zbiór ograniczeń łatwiejszych, o specjalnej strukturze. Nawet jeżeli zbiór dopuszczalnych rozwiązań problemu (2.1,..., 2.3) jest ograniczony, jest całkiem prawdopodobne, że zbiór rozwiązań L jest nieograniczony.

Definicja 1. *Wektor $y_s \in R^n$ jest nazywany* bazowym kierunkiem dopuszczalnym *zbioru L, jeżeli jest on rozwiązaniem jednorodnym spełniającym równanie $Ay = 0$ oraz zbiór jego n współrzędnych można podzielić na m współrzędnych bazowych oraz $n - m$ współrzędnych niebazowych w taki sposób, że:*

(i) kolumny macierzy A odpowiadające zmiennym bazowym tworzą macierz nieosobliwą,

(ii) oprócz jednej zmiennej niebazowej pozostałe zmienne niebazowe są równe zero,

(iii) *niezerowa zmienna niebazowa jest równa 1.*

W ogólnym przypadku zbiór L jest nieograniczonym wielościanem, którego rozwiązania można przedstawić jako

$$y = \sum_{r \in R} \lambda_r y^r + \sum_{s \in S} \mu_s y^s \tag{2.4}$$

gdzie:

$$\sum_{r \in R} \lambda_r = 1, \quad 0 \le \lambda_r \le 1, r \in R \tag{2.5}$$

oraz $\mu_s \ge 0$ dla wszystkich $s \in S$. Zbiór $\{y^r : r \in R\}$ jest zbiorem bazowych rozwiązań dopuszczalnych, natomiast $\{y^s; s \in S\}$ jest zbiorem bazowych kierunków dopuszczalnych. Niech

$$L_r = \{y : y \in L, y = \sum_{r \in R} \lambda_r y^r, \text{ gdzie } \sum_{r \in R} \lambda_r = 1, 0 \le \lambda_r \le 1, r \in R\}$$

będzie wielościanem ograniczonym, otrzymanym z L przez pominięcie rozwiązań jednorodnych odpowiadających kierunkom dopuszczalnym. Otrzymujemy następujący (restrykcyjny) problem optymalizacji

Problem R:

$$\min F(y) \tag{2.6}$$

przy ograniczeniach

$$H(y) \le 0 \tag{2.7}$$

$$y \in L_r. \tag{2.8}$$

Definicja 2. *Mówimy, że Problem P posiada* właściwość *R, jeżeli dla dowolnego rozwiązania dopuszczalnego y problemu P istnieje rozbicie $y = \bar{y} + \hat{y}$, takie, że $\bar{y} \in L_r$, oraz $H(\bar{y}) \le 0$ i $F(\bar{y}) \le F(y)$.*

Z łatwością można wykazać następujące

Twierdzenie 1. *Załóżmy, że Problem P posiadający właściwość R ma skończone rozwiązanie optymalne. Istnieje optymalne rozwiązanie Problemu P będące jednocześnie optymalnym rozwiązaniem Problemu R.*

W dalszej części pracy analizować będziemy nietrywialne klasy problemów harmonogramowania produkcji spełniające powyższe warunki. Jeżeli rozważany problem nie posiada pierwotnie właściwości R, to czasem możliwe jest, jak pokażemy w rozdziale 6 na przykładzie zadania harmonogramowania produkcji przerywanej przy obecności niezerowych zapasów początkowych i dowolnych zapasach bezpiecznych, przetransformowanie problemu pierwotnego, na przykład przez dodanie pewnych ograniczeń redundancyjnych, tak by otrzymany problem pozyskał właściwość R.

Jeżeli rozważane zadanie P posiada właściwość R, to wystarczy rozwiązywać problem restrykcyjny R. Problem R może być łatwiejszy do rozwiązywania z następujących powodów:

(i) relaksacja Lagrange'a ograniczeń (2.7) problemu restrykcyjnego jest na ogół silniejsza od relaksacji Lagrange'a problemu pierwotnego,

(ii) jeżeli funkcja celu F jest wklęsła, to podczas rozwiązywania zadania relaksacji Lagrange'a wystarczy przeglądać punkty wierzchołkowe zbioru L_T. Punkty wierzchołkowe mogą posiadać dodatkowe właściwości, np. mogą być reprezentowane w postaci najkrótszych ścieżek w odpowiednich grafach, dzięki czemu zadanie relaksacji Lagrange'a się upraszcza,

(iii) możliwe są dalsze transformacje problemu restrykcyjnego, dzięki czemu można otrzymać silniejsze relaksacje liniowe lub relaksacje Lagrange'a.

3. Ogólne zadanie harmonogramowania produkcji przerywanej

W systemie produkcyjnym wykorzystywany jest pewien zbiór zasobów do produkcji zbioru N wyrobów. Do celów harmonogramowania produkcji w dłuższym horyzoncie czasu przyjmijmy, że horyzont planowania został podzielony na T dyskretnych okresów. Rozważana jest łączna produkcja, dystrybucja i magazynowanie wyrobów w każdym z tych okresów, pomijane są natomiast szczegółowe warunki ograniczające, np. kolejnościowe w krótszych przedziałach czasowych.

Zapotrzebowanie d_{it} na wyrób $i, i \in N$ w okresie t musi być realizowane najpóźniej na koniec okresu t, przy czym wyrób może być produkowany w bieżącym okresie bądź też w okresach poprzedzających, w tym ostatnim przypadku utrzymywane być muszą niezerowe zapasy w okresie poprzedzającym. Wprowadźmy następujące zmienne decyzyjne:

$x_i(t)$ - łączna wielkość produkcji wyrobu i w okresie t,

$I_i(t)$ - stan zapasu wyrobu i pod koniec okresu t.

Zakładamy, że $I(0) = 0$. W dalszej części pracy będziemy stosować następującą notację: dla zbioru zmiennych $x_i(t), i \in N, t = 1, \ldots, T$ oznaczamy $x(t) = (x_i(t))_{i \in N}$ dla $t = 1, \ldots, T$, oraz $x = (x(1), \ldots, x(T))$. Podobnie tworzymy $I(t)$ oraz I.

3.1. Charakteryzacja zbioru L

Przyjmijmy $y = (x, I)$ i wprowadźmy do zbioru L sieciowe ograniczenia bilansów magazynowych wszystkich wyrobów:

$$L = \{(x, I) : I(t-1) + x(t) - I(t) = d_t, \quad x(t), I(t) \geq 0, t = 1, \ldots, T\} \tag{3.1}$$

gdzie $I(0) = 0$, oraz $d_t \geq 0$. Problem P jest zatem ogólnym zadaniem harmonogramowania produkcji, w którym funkcja F reprezentuje wszystkie koszty produkcji i magazynowania, natomiast $H(y)$ reprezentuje ograniczenia na dostępne zasoby oraz ewentualnie inne warunki, np. wzajemne wymagania na poziomy zapasów poszczególnych grup produktów. Bardzo często, jak pokażemy w rozdziale następnym, funkcje kosztów F i ograniczeń H są monotonicznie niemalejące.

Szczególna postać zbioru L pozwala na wygodną charakteryzację bazowych kierunków dopuszczalnych $\{y^s : s \in S\}$ oraz rozwiązań bazowych odpowiadających punktom wierzchołkowym $\{y^r : r \in R\}$. Zbiór restrykcyjny jest postaci

$$L_r = \{(x, I) : (x, I) \in L,\ I(0) = I(T) = 0\} \tag{3.2}$$

Każdy punkt wierzchołkowy $y^r, r \in R$ może być przedstawiony jako kombinacja ścieżek w grafach $G_i, i \in N$ konstruowanych zgodnie z podejściem Wagnera i Whitina [20].

Dla ustalonego $i, i \in N$ zdefiniujmy acykliczny graf $G_i = (V_i, E_i)$, gdzie $V_i = \{v_{i0}, v_{i1}, \ldots, v_{iT}\}$ jest zbiorem wierzchołków, oraz $E_i \subset V_i \times V_i$ jest zbiorem łuków. Wierzchołek $v_{it}, 1 \leq t \leq T$ odpowiada chwili między okresami produkcyjnymi t oraz $t+1$. Łuki odpowiadają grupom sąsiadujących ze sobą okresów, w ramach których występuje produkcja danego wyrobu tylko raz o wielkości porcji pozwalającej na zaspokojenie zapotrzebowania w tych okresach. Dokładniej, łuk $e^i_{s,t} = (v_{is}, v_{it}) \in E_i, 0 \leq s < t \leq T$, odpowiada produkcji wyrobu i w okresie $s+1$ o wielkości porcji

$$X^i_{st} = d_{i,s+1} + \cdots + d_{it}.$$

Można wykazać, że punktom wierzchołkowym $\{y^r, r \in R\}$ odpowiadają ścieżki w grafach $G_i, i \in N$, od wierzchołków v_{i0} do $v_{iT}, i \in N$. Wektor $y^s, s \in S$ jest natomiast rozwiązaniem jednorodnym spełniającym

$$I(t-1) + x(t) - I(t) = 0, \qquad x(t), I(t) \geq 0, t = 1, \ldots, T \tag{3.3}$$

przy czym rozwiązanie to odpowiada przepływowi jednostkowemu od wierzchołka v_{i0} do wierzchołka v_{iT} wzdłuż ścieżki $[v_{i0}, v_{it}, v_{i,t+1}, v_{i,t+2}, \ldots, v_{i,T-1}, v_{iT}]$ w jednej z sieci odpowiadających równaniom (3.1).

Twierdzenie 2. *Jeżeli funkcje F, H są monotonicznie niemalejące, zbiór L jest zdefiniowany przez (3.1), to Problem P posiada właściwość R.*

Dowód. Zbiór L jest nieograniczonym wielościanem, którego rozwiązania można przedstawić jako $y = \check{y} + \hat{y}$, przy czym $\check{y} = \sum_{r \in R} \lambda_r y^r$, gdzie $\sum_{r \in R} \lambda_r = 1$, $0 \leq \lambda_r \leq 1, r \in R$ oraz $\hat{y} = \sum_{r \in S} \mu_s y^s$, gdzie $\mu_s \geq 0$ dla wszystkich $s \in S$. Zbiór $\{y^r : r \in R\}$ jest zbiorem bazowych rozwiązań dopuszczalnych, natomiast $\{y^s : s \in S\}$ jest zbiorem bazowych kierunków dopuszczalnych. Zatem dla dowolnego $y = (x, I) \in L$ istnieje rozbicie $y = \check{y} + \hat{y}$, takie, że $\check{y} \in L_r$, oraz $\hat{y} \geq 0$. Z monotoniczności F oraz H wynika, że $F(\check{y}) \leq F(y)$ oraz $H(\check{y}) \leq H(y) \leq 0$.□

3.2. Transformacja sieciowa

Problem restrykcyjny R można przetransformować do innej, równoważnej postaci przez zamianę zmiennych. Wprowadźmy zmienne $f^i_{st}, 0 \leq f^i_{st} \leq 1$, związane z łukami $e^i_{st}, e^i_{st} \in E_i$ grafów $G_i, i \in N$. Zmienna f^i_{st} ma sens przepływu elementarnego wzdłuż łuku e^i_{st} w grafie G_i któremu odpowiada porcja produkcji $X^i_{st} = d_{i,s+1} + \cdots + d_{it}$ w okresie $s+1$. Łączną wielkość produkcji $x_i(t)$ w okresie $t=s+1$ można wyznaczyć ze wzoru

$$x_i(s+1) = \sum_{t=s+1}^{T} X^i_{st} f^i_{st}. \tag{3.4}$$

Zmienne magazynowe $I_i(t), i \in N, t = 1, \ldots, T$, wyrażają się w funkcji zmiennych produkcyjnych

$$I_i(t) = I(0) + \sum_{s=1}^{t} (x_i(s) - d_{i_s}) \tag{3.5}$$

więc wektor wszystkich zmiennych decyzyjnych $y = (x, I)$ można przedstawić w funkcji wektora zmiennych sieciowych $f = (f^i_{st})$. Ograniczenia zbioru L_r są w postaci ograniczeń zadania przepływu w sieciach $G_i, i \in N$

$$\sum_{s=0}^{t-1} f^i_{st} + \sum_{t+1}^{T} = 0 \quad i \in N; t = 1, \ldots, T-1 \tag{3.6}$$

$$\sum_{s=0}^{T-1} f^i_{sT} = 1 \quad i \in N \tag{3.7}$$

Problem restrykcyjny R zapisujemy w postaci równoważnej
Problem RT:

$$\text{minimalizuj } J(f) \doteq f(y(f)) \tag{3.8}$$

przy spełnieniu ograniczeń (3.6,3.7) oraz

$$H(y(f)) \leq 0 \tag{3.9}$$

$$0 \leq f^i_{st} \leq 1 \quad \forall i, s, t \tag{3.10}$$

W ogólnym przypadku transformacja sieciowa problemu R nie zawsze jest opłacalna. Jej znaczenie jest istotne dla problemów harmonogramowania formułowanych jako zadania programowania liniowego całkowitoliczbowego mieszanego.

4. Dyskretno-ciągłe modele harmonogramowania

Przyjmijmy, że produkcja i magazynowanie charakteryzowane są przez pewien wektor atrybutów produkcyjnych $z = (z_m)_{m \in M}$, wyrażających się wzorem $z = Ax + BI$, gdzie A i B są nieujemnymi macierzami odpowiednich wymiarów. Zaistnienie niezerowego atrybutu z_m wiąże się z wystąpieniem pewnych kosztów i zużyciem zasobów.

Wprowadźmy wektor zmiennych binarnych $v = (v_m)_{m \in M}$ reprezentujących niezerowe atrybuty charakteryzujące warunki produkcyjne. Funkcje kosztów i ograniczeń F i H wyrażamy w następujący sposób

$$F(x, I) = Cx + HI + Sv \tag{4.1}$$

$$H(x, I) = Px + RI + Ev - Q \leq 0 \tag{4.2}$$

$$z = Ax + BI \leq Mv, \quad v\text{– wektor binarny} \tag{4.3}$$

przy czym C, H, P, R są nieujemnymi macierzami odpowiednich wymiarów, Q— wektorem zasobów swobodnych, oraz M jest macierzą diagonalną z dostatecznie dużymi współczynnikami na przekątnej głównej. Reasumując, rozważamy następujące zadanie harmonogramowania

Problem PH:

$$\text{minimalizuj } F(x,I) = Cx + HI + Sv \tag{4.4}$$

przy ograniczeniach

$$H(x,I) = Px + RI + Ev - Q \leq 0 \tag{4.5}$$

$$z = Ax + BI \leq Mv, \quad v\text{– wektor binarny} \tag{4.6}$$

$$(x,I) \in L \tag{4.7}$$

gdzie: L zdefiniowane jest wzorem (3.1). Warunek (4.6) jest ograniczeniem typu stałej opłaty i określa wektor zmiennych binarnych v w funkcji x, I jako $v = \delta(Ax + BI)$. Uzasadnia to zapis, że F, H są funkcjami x, I.

Jak wskazują doświadczenia numeryczne, ograniczenia typu stałej opłaty prowadzą do trudnych problemów optymalizacji dyskretnej. Typowa relaksacja liniowa polegająca na odrzuceniu warunków całkowitoliczbowości zmiennych binarnych v daje słabe oszacowanie od dołu. Skuteczniejsze są następujące metody: (i) relaksacja Lagrange'a ograniczeń zasobowych $H(x, I) \leq 0$; oraz (ii) sieciowe transformacje restrykcji problemu PH.

Aby spełniony był warunek (4.6) dla zmiennej v_m o wartości ustalonej na zerze, te zmienne $x_i(t)$ oraz $I_i(t)$, dla których odpowiednie współczynniki macierzy A i B są niezerowe, muszą być również równe zero. Dla ustalonej zmiennej v_m oznaczmy przez $\mathcal{X}\mathcal{T}_m$ zbiór par (i, t) odpowiadających tym zmiennym $x_i(t)$, które muszą być równe zero, gdy $v_m = 0$. Podobnie $\mathcal{I}\mathcal{T}_m$ jest zbiorem par (i, t) odpowiadających zmiennym $I_i(t)$ spełniającym analogiczne warunki. Sieciowa transformacja problemu PH prowadzi do następującego zadania:

Problem PHRT

$$\text{minimalizuj } Cx(f) + HI(f) + Sv \tag{4.8}$$

przy ograniczeniach (3.6,3.7) oraz

$$Px(f) + RI(f) + Ev - Q \leq 0 \tag{4.9}$$

$$\sum_{s=t}^{T} f^i_{t-1,s} \leq v_m \quad (i,t) \in \mathcal{X}\mathcal{T}_m, m \in M \tag{4.10}$$

$$1 - \sum_{s=0}^{t} f^i_{s,t} \leq v_m \quad (i,t) \in \mathcal{I}\mathcal{T}_m, m \in M \tag{4.11}$$

$$v_m \in \{0,1\} \quad m \in M. \tag{4.12}$$

Twierdzenie 3. *Jeżeli problem PH spełnia warunek R, to rozwiązanie optymalne problemu PHRT umożliwia wyznaczenie optymalnego rozwiązania problemu PH zgodnie ze wzorami (3.4,3.5).*

Dowód. Tworzymy restrykcję zbioru L za pomocą warunku (3.2). Z twierdzenia 1 wynika, że problem restrykcyjny zachowuje rozwiązanie optymalne problemu *PH*. Kolejne przekształcenie polegające na wprowadzeniu zmiennych sieciowych spełniających (3.6,3.7) oraz (3.4,3.5) prowadzi do równoważnego zadania postaci *RT*. Dalsza transformacja polega na wzmocnieniu opisu warunku (4.6).

Jeżeli $v_m = 0$, to $x_i(t) = 0$ dla $(i,t) \in \mathcal{XT}_m$ oraz $I_i(t) = 0$ dla $(i,t) \in \mathcal{IT}_m$. Oznacza to dla zmiennych sieciowych $\sum_{s=t}^{T} f_{t-1,s}^{i} = 0$, dla$(i,t) \in \mathcal{XT}_m$, oraz $\sum_{s=0}^{t} f_{s,t}^{i} = 1$, dla$(i,t) \in \mathcal{IT}_m$. Z drugiej strony warunek (4.6) implikuje, że jeżeli $v_m = 1$, to zmienne $x_i(t), (i,t) \in \mathcal{XT}_m$ oraz $I_i(t), (i,t) \in \mathcal{IT}_m$ mogą być dowolne. Łącznie warunek (4.6) jest równoważny ograniczeniom

$$\begin{aligned} \sum_{s=t}^{T} f_{t-1,s}^{i} &\le v_m \quad (i,t) \in \mathcal{XT}_m, m \in M \\ 1 - \sum_{s=0}^{t} f_{s,t}^{i} &\le v_m \quad (i,t) \in \mathcal{IT}_m, m \in M \\ v_m &\in \{0,1\} \quad m \in M. \square \end{aligned}$$

Zadanie *PHRT* różni się od zadania *PH* tym, że posiada większą liczbę zmiennych, jednakże zadanie relaksacji liniowej jest problemem programowania liniowego o specjalnej strukturze, wygodnej do efektywnej reprezentacji odwrotności macierzy bazowych. Zaletą zadania *PHRT* jest to, że relaksacja liniowa jest znacznie silniejsza niż relaksacja liniowa zadania *PH*. Problem *PHRT* może więc być rozwiązywany znacznie skuteczniej za pomocą pakietów programowania liniowego mieszanego wielkiej skali, uwzględniających specjalną strukturę macierzy ograniczeń.

5. Szczególne zadania harmonogramowania

Jako szczególne przypadki problemu *PH* rozważamy następujące zadania harmonogramowania:

Produkcja grup wyrobów dzielących wspólne przezbrojenia. Produkcja każdego z wyrobów realizowana jest oddzielnie na jednym ze środków produkcji wymagających przezbrojenia. Wyroby ze zbioru N można podzielić na grupy $N_k, k = 1, \ldots, K$, produktów podobnych mających podobne wymagania wymagania co do przezbrojeń, natomiast inne warunki, na przykład jednostkowe czasy i koszty produkcji, mogą być dowolne. Przyjmujemy, że przezbrojenie maszyny na wykonywanie wyrobu $i, i \in N_k$ składa sie z przezbrojenia głównego związanego z grupą wyrobów N_k oraz przezbrojenia dodatkowego związanego z wyrobem i. Niech S_k oznacza koszt przezbrojenia głównego oraz s_i — koszt przezbrojenia dodatkowego. Składniki funkcji kosztów związanych z przezbrojeniami są równe

$$\sum_{k=1}^{K} S_k \delta\Big(\sum_{i \in N_k} x_i(t)\Big) + \sum_{i \in N} s_i \delta(x_i(t))$$

gdzie $\delta(x) = 1$, jeżeli $x > 0$ oraz $\delta(x) = 0$ w przeciwnym przypadku.

Produkcja wsadowa wyrobów o złożonym modelu podobieństw. Model produkcji jak poprzednio, ale wyrobów nie można pogrupować w rodziny wyrobów dzielących główne przezbrojenia, model podobieństw i różnic między wyrobami jest więc bardziej złożony.

Rozważmy przykładowo automatyczny montaż elementów elektronicznych techniką otworową lub powierzchniową na płytkach drukowanych. Automaty obsadzające płytki elementami elektronicznymi wymagają ustawienia głowicy i zaprogramowania ruchu głowicy dla każdego montowanego elementu na płytce. Linia może być dostosowana do montażu różnorodnych układów elektronicznych, przy czym koszty i czasy przestawiania zależą od kolejności montażu. W modelu harmonogramowania należy uwzględnić możliwość wspólnego ustawiania montażu dla identycznie montowanych elementów na płytkach różnych typów.

Niech N_m będzie podzbiorem typów płytek posiadających niepusty podzbiór wspólnych elementów, identycznie montowanych wyłącznie na płytkach ze zbioru N_m. Na ogół zbiory $N_m, m \in M$ nie są rozłączne. Przyjmijmy, że e_m jest czasem przygotowania montażu wspólnych elementów. Czas przestoju linii związany z przygotowaniem montażu wyraża się wzorem

$$\sum_{m \in M} e_m v_m(t),$$

gdzie: $\sum_{i \in N_m} x_i(t) \leq M v_m$ dla $v_m \in \{0,1\}$. Analogicznie można wyrazić koszty przygotowania montażu.

Złożony model produkcji wielostopniowej. W przypadku systemów produkcyjnych złożonych z wielu stopni wytwarzania, sieciowe ograniczenia bilansów magazynowych wszystkich wyrobów są postaci

$$I_i(t-1) + x_i(t) - I_i(t) = d_{it} + \sum_{j \in S_i} r_{ij} x_j(t) \quad i \in N; t = 1, \ldots, T \tag{5.1}$$

gdzie: S_i jest zbiorem bezpośrednich następników produktu i w grafie struktury produktów [16]. Stosując rekurencyjnie podstawienie

$$E_i(t) = I_i(t) + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_j(t) \quad \text{oraz} \quad D_{it} = d_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} D_{jt} \tag{5.2}$$

począwszy od wyrobów finalnych, ich składowych, aż dochodząc do surowców i innych pierwotnych składników (nie posiadających poprzedników w grafie struktury produktów), bilanse magazynowe można przedstawić w równoważnej formie

$$E_i(t-1) + x_i(t) - E_i(t) = D_{it} \quad i \in N; t = 1, \ldots, T \tag{5.3}$$

z dodatkowym warunkiem

$$\sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_j(t) - E_i(t) \leq 0 \quad i \in N; t = 1, \ldots, T. \tag{5.4}$$

gdzie:(5.3) jest postaci (3.1), natomiast (5.4) można włączyć do ograniczeń (4.5).

Wiele współczesnych systemów wytwarzania charakteryzuje się szczególną złożonością mierzoną ilością wyrobów oraz liczbą stopni produkcji, operacji, maszyn i innych zasobów. Zagadnienia harmonogramowania w wielostopniowych systemach produkcyjnych są więc szczególnie złożone. Zdecydowane uproszczenie produkcji i przepływu materiałów w systemie, wielokrotne skrócenie cykli oraz poziomu zapasów robót w toku uzyskuje sie stosując organizację technologii grupowej, dzięki integracji środków produkcji w formy elastycznych gniazd obróbki grupowej.

W szczególności przepływ materiałów wewnątrz gniazd, realizowany przykładowo za pomocą automatycznie sterowanych pojazdów, powoduje, że ze względu na ograniczenia zapasów międzyoperacyjnych, wielkości porcji produkcyjnych są stałe dla wszystkich operacji tego samego zadania.

Niech wyrób i będzie produktem międzyoperacyjnym produkowanym 'akurat na czas', zgodnie z zapotrzebowaniem określonym przez produkty $j \in S_i$. Zatem $I_i(t) = 0$ dla $t = 1, \ldots, T$ oraz $x_i(t) = d_{it} + \sum_{j \in S_i} r_{ij} x_j(t)$, dla $t = 1, \ldots, T$.

W rezultacie model harmonogramowania może posiadać znacznie mniej zagregowanych stopni produkcyjnych (odpowiadających gniazdom produkcyjnym), zmiennych (odpowiadających produktom przepływającym między gniazdami) i ograniczeń (odpowiadających zagregowanym zasobom gniazd produkcyjnych).

Przepływ wyrobów pomiędzy gniazdami może być realizowany porcjami, np. za pomocą systemu Kan-Ban. W przypadku zastosowania prostych reguł odnawiania zapasów wyrobów przepływających pomiędzy gniazdami, w granicznym przypadku można w rezultacie uzyskać uproszczony, nawet jednostopniowy model harmonogramowania, w którym występują jedynie zmienne niezależne odpowiadające wyrobom finalnym, natomiast pozostałe zmienne są zależne [13]. W modelu tym do produkcji wyrobu i w okresie t wymagany jest ciąg operacji realizowanych na różnych środkach produkcji, w tym przygotowanie podzespołów lub innych składników w okresach $t - \tau_i + 1, t - \tau_i + 2, \ldots, t$, gdzie τ_i jest oszacowaniem produkcyjnego czasu przejścia wyrobu i w cyklu produkcyjnym. Niech M_i będzie zbiorem atrybutów (operacji, składników) wyrobu i, związanych z wykorzystaniem pewnych środków produkcji. Wielkość atrybutu m w okresie t wyraża się wzorem

$$z_m(t) = \sum_{(i,\tau) \in IT_m} b_{mi\tau} x_i(t + \tau) \tag{5.5}$$

gdzie: zbiór

$IT_m = \{(i, \tau)$: atrybut $m, m \in M_i$ jest wymagany w okresie t, aby ukończyć wyrób i w okresie $t + \tau\}$

a $b_{mi\tau}$ jest wielkością atrybutu m wymaganą w okresie t w celu ukończenia jednostki wyrobu i w okresie $t + \tau$. Funkcja kosztów może zawierać składniki związane z przygotowaniem wszystkich podzespołów i operacji

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{m \in M_i} s_{mt} \delta(z_m(t)).$$

Bardziej złożony model można otrzymać, jeśli założymy, że wśród atrybutów $m, m \in M$ można wyróżnić grupy atrybutów dzielących wspólne główne czasy i koszty przygotowawcze. Niech $z_m, m \in m$ wyraża się wzorem (5.5). Przyjmijmy, że mamy zbiory atrybutów (niekoniecznie rozłączne) $A_k, k = 1, \dots, K$, którym odpowiadają wspólne czynności przygotowawcze. Składniki funkcji kosztów związane z przygotowaniem produkcji można wyrazić wzorem

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{K} S_k \delta\Big(\sum_{m \in A_k} z_m(t)\Big).$$

Analogicznie formułujemy modele zużycia zasobów.

Jednoczesna produkcja wsadowa wieloasortymentowa. Rozważany jest elastyczny system produkcji złożony ze sterowanych komputerowo (CNC) centrów obróbkowych posiadających magazynki narzędzi i połączonych ze sobą systemem transportu, również sterowanym centralnie. Zakładamy, że załadunek narzędzi do magazynków odbywa się ręcznie, a tym samym czas załadunku jest nie do pominięcia.

W danej chwili mogą być jednocześnie wykonywane wyroby z grupy wyrobów, dla których załadowano do magazynków niezbędne narzędzia. Niech $N_m, N_m \subset N$ oznaczają grupy wyrobów wymagających pewnych podzbiorów narzędzi zajmujących objętość p_m w magazynku narzędzi o pojemności Q oraz wymagających czasu t_m na załadunek narzędzi. Zbiory rodziny $\{N_m\}_{m \in M}$ są na ogół nierozłączne. Ograniczenie na pojemność magazynku wyraża sę wzorem

$$\sum_{m \in M} p_m v_m \leq Q,$$

gdzie: $\sum_{i \in N_m} x_i(t) \leq M v_m$ dla $v_m \in \{0, 1\}$. Podobnie wyznaczany jest czas załadunku narzędzi $C = \sum_{m \in M} t_m v_m$.

6. Niezerowe poziomy zapasów początkowych i minimalnych

W przypadku sterowania repetycyjnego rozważane są zadania harmonogramowania z przesuwanym horyzontem. W takim przypadku poziom zapasów początkowych jest zazwyczaj różny od zera. Podobnie konieczność uwzględnienia niepewności w zapotrzebowaniu na wyroby oraz zakłóceń produkcyjnych może wymagać wprowadzenia do modelu niezerowych i zróżnicowanych poziomów zapasów minimalnych (bezpiecznych)[8]. Rozważmy zbiór

$$L^* = \{(x, I) : I(t-1) + x(t) - I(t) = d_t, \quad x(t), I(t) \geq L_t, t = 1, \dots, T\}. \tag{6.1}$$

gdzie: $I(0) \geq 0$, oraz $\underline{I} = (\underline{I}(1), \dots, \underline{I}(T))$ jest poziomem zapasów bezpiecznych. W przypadku problemu harmonogramowania zawierającego ograniczenia (6.1) zamiast (3.1), problem restrykcyjny utworzony przez odrzucenie rozwiązań odpowiadających kombinacji wypukłej bazowych kierunków dopuszczalnych nie pozwala w ogólnym przypadku na uzyskanie rozwiązań optymalnych zadania pierwotnego, jest więc restrykcją istotnie ograniczającą zbiór dopuszczalny. Zatem problem P nie może posiadać właściwości R nawet przy spełnieniu najbardziej korzystnych pozostałych warunków. Możliwa jest jednak transformacja zbioru L^* do postaci spełniającej wymagane warunki.

Zdefiniujmy zregularyzowane poziomy zapasów [18] $\hat{L}_t = (\hat{L}_{it})_{i \in N}$ określone rekurencyjnym wzorem

$$\hat{L}_{it} = \begin{cases} I_i(0) & t = 0 \\ \max\,(L_{it}, \hat{L}_{i,t-1} - d_{it}) & t = 1, \ldots, T \end{cases} \tag{6.2}$$

a następnie zastąpmy ograniczenia $I(t) \geq L_t, t = 1, \ldots, T$ przez ograniczenia

$$I(t) \geq \hat{L}_t, t = 1, \ldots, T. \tag{6.3}$$

Ponieważ zachodzi $\hat{L}_t \geq L_t, t = 1, \ldots, T$, więc otrzymamy problem restrykcyjny. W istocie jednak restrykcja jest pozorna, gdyż wprowadzone ograniczenia

$$I_i(t) \geq \hat{L}_{it}, \tag{6.4}$$

są redundancyjne w problemie P. Są więc one jedynie silniejszym opisem ograniczeń pierwotnych.

Wprowadźmy (patrz [19]) zmienne przesunięte $\bar{I}(t) = I(t) - \hat{L}$. W rezultacie uzyskujemy zbiór

$$L = \{(x, \bar{I}) : \bar{I}(t-1) + x(t) - \bar{I}(t) = \bar{d}_t, \quad \bar{I}(0) = 0, \quad x(t), \bar{I}(t) \geq 0, t = 1, \ldots, T\}.$$

Dzięki regularyzacji zapasów minimalnych zachodzi warunek $\bar{d}(t) \geq 0, t = 1, \ldots, T$, i więc otrzymany problem spełnia warunki wymagane do restrykcji regularnej.

Dla dowodu iż $\bar{d}(t) \geq 0, t = 1, \ldots, T\}$ zauważmy, że jeżeli istniałby wyrób $i, i \in N$, taki, że $\bar{d}(t) < 0$, to $\hat{I}_{i,t-1} - d_{it} \leq \hat{I}_{it}$, co przeczy warunkowi (6.2).

Regularyzacia poziomu zapasów powoduje,że wektor $\bar{d}_t$ może mieć więcej współczynników zerowych, co można wykorzystać w algorytmach rozwiązujących zadanie harmonogramowania.

Literatura

[1] Afentakis P., Gavish B., Karmarkar U.: Computationally Efficient Optimal Solutions to the Lot-Sizing Problem in Multi-Stage Assembly Systems, *Management Science*, 30, 222-239, 1984.

[2] Afentakis P., Gavish B.: Optimal Lot-Sizing Algorithms for Complex Product Structures, *Operations Research*, 34, 237-249, 1986.

[3] Axater, S., Schneeweiss, Ch., Silver, E. (Eds.), 'Multistage Production Planning and Inventory Control', *Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems*, 266, Springer, Berlin.

[4] Barany, I., Roy, T., Wolsey, L., 1984, Uncapacited Lot-Sizing: the Convex Hull of Solutions, *Math.Progr. Study*, 22, 32-43.

[5] Barany, I., Van Roy, T.J., and Wolsey, L.A., Strong Formulations for Multi-Item Capacitated Lot Sizing, *Management Science*, vol.30, No.10, Oct., 1984, pp.1255-1261.

[6] Bitran, G.R., Yanasse, H.H., Computational Complexity of the Capacitated Lot Size Problem, *Management Science*, 28, 107-125.

[7] Blackburn, J.D. and R.A. Millen, Improved Heuristics for Multi-Echelon Requirements Planning Systems, *Management Science*, vol. 28 (January 1982), pp.44-56.

[8] Collier, D.A., 1982, Aggregate Safety Stock Levels and Component Part Commonality, *Management Science*, 28, pp.1296-1303.

[9] Crowston, W., M. Wagner and J. Williams, 1973, Dynamic Lot-Size Models for Multistage Assembly Systems, *Management Science*, 19, 517-527.

[10] De Bodt, M., Gelders, L. and Van Wassenhove, L.N., 1984, Lot-Sizing Under Dynamic Demand Conditions: A Review, *Engineering and Production Economics*, 8, pp.165-187.

[11] Eppen, G.D., Martin, R.K., Solving Multi-Item Capacitated Lot Sizing Problems Using Variable Redefinition, presented at TIMS/ORSA Meeting, Los Angeles, April 1986.

[12] Graves, S.C., 1981, Multistage Lot Sizing: An Iterative Approach. In *Multistage Production/Inventory Control Systems: Theory and Practice*, L.B. Schwarz (ed.), North Holland, Amsterdam.

[13] K.S. Hindi, E. Toczylowski, Aggregation and Disaggregation of End Items in a Class of Mulistage Production Systems, *Int. J. Advan. Manuf. Techn.* 3,45-55, (1988).

[14] Kennington, J.F., R.V. Helgason, *Algorithms for Network Programming*, John Willey & Sons, New York, 1981.

[15] Karni, R. and Roll, Y., A Heuristic Algorithm for the Multi-Item Lot Sizing Problem with Capacity Constraints, *IIE Transactions*, vol.14, No.4, Dec., 1982, pp.249-356.

[16] Pieńkosz, K, Toczyłowski, E. Warunki regularnej agregacji produktów w wielostopniowych systemach produkcyjnych Zesz. Nauk. Pol. Śl., 1988 (materiały tej konferencji).

[17] Steinberg, E. and Napier, H.A., 1980, Optimal Multi-Level Lot Sizing for Requirements Planning Systems, *Management Science*, 26, 1258-1271.

[18] Toczylowski E.: On Aggregation of Items in the Single-Stage Lot Size Scheduling Problem, *Large Scale Systems* 10, 157-164, 1986.

[19] E. Toczyłowski, K.S. Hindi, M.G. Singh, A shortest path reformulation of the aggregate multi-line uncapacitated lot size scheduling problem. Control Systems Centre Report No 672, UMIST, Manchester, April 1987.

[20] Wagner, M.M., T.M. Whittin, 1958, Dynamic Version of the Economic Lot-sizing Model, *Management Science*, 5, pp. 89–96.

[21] Zangwill, W.I., 1969, A Backlogging Model and a Multi-Echelon Model of a Dynamic Economic Lot Size Production System — a Network Approach, *Management Science*, 15, 506-527.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. M. Zaborowski

Wpłynęło do Redakcji do 1988-04-30.

СЕТЕВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБЩИХ ПРОБЛЕМ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА МЕТОДОМ ПОРЦИЙ

Р е з ю м е

Дана формулировка общей модели задачи календарного планирования производства методом порций в сложных многоступенчатых производственных системах. Показано, что задачу эту , при выполнении некоторых условий регулярности, можно свести к некоторой одноимённой проблеме дискретной смешанной оптимизации с сетевой структурой и добавочными ограничениями . Линейная релаксация оговариваемой задачи очень сильна и сравнима с релаксацией Лагранжа первичной задачи. В итоге предложен метод решения общей задачи календарного планирования. Показаны некоторые частные свойства этой задачи.

NETWORK-FLOW TRANSFORMATIONS OF GENERAL LOT-SIZE SCHEDULING PROBLEMS

Summary

General lot-size scheduling problem for complex, multistage production systems is formulated. It was shown, that, under relatively weak assumptions, the problem can be transformed into an equivalent mixed-integer network-flow optimisation problem with side constraints. Linear programming relaxation of this problem is strong and comparable with Lagrangean relaxation of the original formulation. Therefore, the general scheduling problem can be solved by mixed-integer linear programming codes. Structural properties of the problem are investigated to develop specialised algorithms. In particular, a number of specific scheduling problems are investigated, such as problems having complex, very general patterns of set-ups, multistage production, and batching of groups of different items processed simultaneously in a cell.