

Zdzisław SULIMOWSKI

Marek SZUTA

### DOBÓR GEOMETRII ZBIORNIKA HIPERBOLOIDALNEGO Z WARUNKU EFEKTYWNOŚCI SPRĘŻENIA

**Streszczenie.** Artykuł jest próbą nakreślenia ogólnych zasad ekonomicznego sprężenia kablami prostoliniowymi zbiorników o kształcie hiperboloidy jednopowłokowej. Analizę wpływu parametrów geometrycznych na przebieg zmienności funkcji sił wewnętrznych i dobór intensywności sprężenia przeprowadzono w stanie błonowym, we współrzędnych bezwymiarowych, przy obciążeniach: parciem hydrostatycznym, ciężarem własnym i sprężeniem.

#### 1. WSTĘP

Zaletą zbiorników hiperboloidalnych jest możliwość sprężenia wzdłuż tworzących, co powoduje małe straty sprężenia i ułatwia ułożenie ciągów. Problem przedstawiony w opracowaniu jest ograniczony do stanu błonowego, dla rodziny hiperboloid obciętych w przewężeniu. Zbadano dla nich zachowanie się sił wewnętrznych wywołanych parciem hydrostatycznym, ciężarem własnym i sprężeniem. Celem analizy jest dobór takiej geometrii powłoki, przy której najniższa możliwa intensywność sprężenia zagwarantuje nieprzekroczenie stanu granicznego pojawienia się rys. Jako parametr stały przyjęto objętość zbiornika i dla niej ustalono pozostałe wartości geometryczne hiperboloidy.

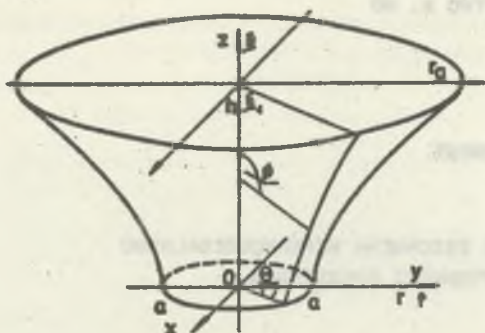
Równanie obrotowej hiperboloidy jednopowłokowej można przedstawić w postaci:

$$x^2 + y^2 = a^2 \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right) \quad (1)$$

Dla takiego zapisu analitycznego objętość zbiornika o wysokości "h" wyraża się wzorem:

$$V(h) = \iiint_V dx dy dz = \iint_0^h dx dy \int_0^h dz = \pi a^2 \left(h + \frac{h^3}{3c^2}\right) \quad (2)$$

Są trzy wielkości charakteryzujące w pełni geometrię powłoki:  $a$  - półos rzeczywista hiperboloidy,  $c$  - półos urojona hiperboloidy,  $h = \text{const.}$  -



Rys. 1. Odzworowanie hiperboloidy jednopowłokowej

wysokość hiperboloidy przy założeniu  $V = V(h) = \text{const}$ . Iloraz wartości  $\frac{c}{a} = \text{tg} \alpha$  jest współczynnikiem kierunkowym tworzących stożka asymptotycznego hiperboloidy.

W dalszych rozważaniach wprowadzono wielkości bezwymiarowe jako eto-  
sunki współrzędnych bieżących odniesionych do płaszczyzny rzeczywistej w postaci:

$$\xi = \frac{z}{a}, \quad \eta = \left(\frac{r}{a}\right)^2, \quad \varrho = \frac{r}{a} = \sqrt{1 + \eta \xi^2} \quad (3)$$

$$\bar{\xi} = \sqrt{1 + (\eta + \eta^2)^2}, \quad r_1 = -\frac{a \bar{\xi}^3}{\eta}, \quad r_2 = a \bar{\xi} \quad (4)$$

$$\sin \phi = \frac{\varrho}{\bar{\xi}}, \quad \cos \phi = \frac{\eta \xi}{\bar{\xi}}, \quad \text{tg} \phi = \frac{\varrho}{\eta \xi}$$

W zagadnieniu przedstawionym w opracowaniu siły zewnętrzne mają taką samą symetrię jak powłoka, co powoduje, że naprężenia nie zależą od odległości kątowej  $\theta$ . Równania równowagi przyjmują postać:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(r \cdot N_1)}{d\phi} - r_1 \cdot N_2 \cdot \cos \phi &= -p_\phi \cdot r \cdot r_1 \\ \frac{d(r \cdot N_{12})}{d\phi} + r_1 \cdot N_{12} \cdot \cos \phi &= -p_\theta \cdot r \cdot r_1 \\ \frac{N_1}{r_1} + \frac{N_2}{r_2} &= -p_r \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Po rozwiązaniu układu równań dla ciężaru własnego  $g$  i parcia hydrostatycznego  $\gamma$ , wprowadzając stałe całkowania i współrzędne bezwymiarowe, otrzymujemy funkcje sił wewnętrznych południkowych  $N_1$  i równoleżnikowych  $N_2$  odpowiednio:

$$N_{1g} = -\frac{a\eta\bar{q}}{2q^2} \left[ \xi_1 \bar{q}_1 - \xi \bar{q} + \frac{1}{\sqrt{\eta + \eta^2}} (\text{Arsh}(\xi_1 \sqrt{\eta + \eta^2}) - \text{Arsh}(\xi \sqrt{\eta + \eta^2})) \right] - p_0 \frac{q_1 \bar{q}}{q^2} \quad (6)$$

$$N_{2g} = \frac{\eta}{q^2} N_{1g} = a\eta \bar{q} \xi \quad (7)$$

$$N_{1h} = \frac{a^2 \eta \bar{q}}{6q^2} (-2\xi^3 + 3\xi_1 \xi^2 - \xi_1^3) = -\frac{a^2 \eta \bar{q}}{6q^2} (\xi_1 + 2\xi)(\xi_1 - \xi)^2 \quad (8)$$

$$N_{2h} = \frac{\eta}{q^2} N_{1h} + a^2 \bar{q} (\xi_1 - \xi) \quad (9)$$

Dla obciążenia brzegu powłoki siłami sprzężającymi otrzymujemy zależności:

$$N_{1s} = -p_{s0} \frac{\bar{q}}{q^2} \quad (10)$$

$$N_{2s} = \frac{\eta}{q^2} N_{1s} = -p_{s0} \frac{\eta}{q^2} \quad (11)$$

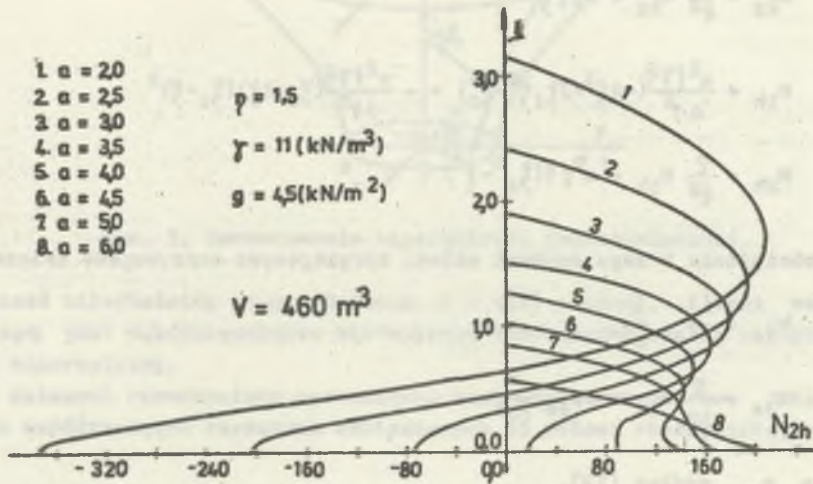
gdzie  $p_{s0}$  według (12).

## 2. PRZEBIEGI SIŁ WEWNĘTRZNYCH DLA POSZCZEGÓLNYCH PRZYPADKÓW OBCIĄŻENIA

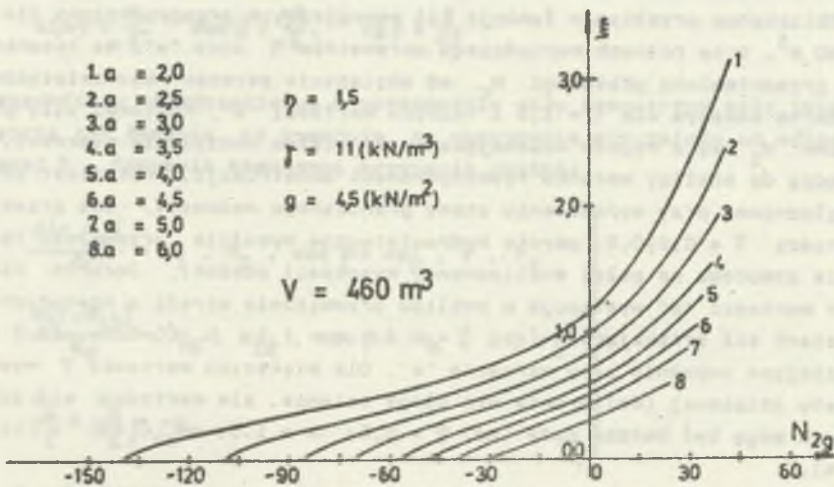
### 2.1. Charakterystyka funkcji sił wewnętrznych dla obciążeń zewnętrznych

Obliczenia przebiegów funkcji sił wewnętrznych przeprowadzono dla  $V = 460 \text{ m}^3$ , przy różnych wartościach parametrów  $\eta$  oraz "a". Na rysunkach 2 i 3 przedstawiono przebiegi  $N_2$  od obciążenia parciem hydrostatycznym i ciężarem własnym dla  $\eta = 1,5$  i różnych wartości "a". Ponieważ siły południkowe  $N_1$  są z reguły ściskające (z wyjątkiem obciążenia wiatrem), nie wchodzi do analizy warunku rysoodporności konstrukcji, natomiast zostaną uwzględnione przy sprawdzeniu stanu granicznego nośności. Dla przedziału wartości  $\eta = 0,2 \div 0,8$ , parcie hydrostatyczne wywołuje przeważnie rozciąganie obwodowe na całej analizowanej wysokości powłoki. Jedynie dla małych wartości "a" występuje w pobliżu przewężenia strefa o niedużych wartościach sił ściskających (np.  $\eta = 0,4$ ;  $a = 1,5$ ;  $N_{2h}(\xi=0) = -22,3 \text{ kN/m}$ ), zanikająca zupełnie przy wzroście "a". Dla większych wartości  $\eta$  wysokość strefy ściskanej (wm) prawie nie ulega zmianie, ale wartości sił ściskających mogą być bardzo duże (np.  $\eta = 2,6$ ;  $a = 1,5$ ;  $N_{2h}(\xi=0) = -1211,9 \text{ kN/m}$ ).

Dla ustalonego "a" wartość maksymalnej siły rozciągającej  $N_{2h}$  w małym stopniu zależy od  $\eta$ , z tym jednak, że ze wzrostem  $\eta$  wyraźniej zarysowuje się maksimum oraz powstają większe wartości sił ściskających w przewężeniu powłoki.



Rys. 2. Wykresy siły  $N_{2h}$  od parcia hydrostatycznego  
 $\eta = 1.5$ ,  $a = 2.0 \div 6.0 \text{ m}$



Rys. 3. Wykresy siły  $N_{2g}$  od ciężaru własnego  
 $\eta = 1.5$ ,  $a = 2.0 \div 6.0 \text{ m}$

Natomiast przy ustalonej wartości  $\eta$  ze wzrostem promienia "a" pojawia się tendencja do zaniku maksimum  $N_{2h}$  i jego zmiany w punkt przegięcia. Zależność ta jest słabsza dla większych  $\eta$ . Przy małych wartościach "a" i dużych  $\eta$  występuje spiętrzenie sił ściskających w przewężeniu od wszystkich obciążeń.

Siły  $N_{2g}$  wywołane ciężarem własnym są na ogół dużo mniejsze od odpowiednich sił  $N_{2h}$ , ale osiągają swoje maksimum na górnym brzegu. Obciążenie liniowe górnego brzegu zaniejsze ich wartość oraz wysokość strefy rozciąganej ciężarem własnym. Dlatego jako bardziej niekorzystny rozpatrywano schemat bez obciążenia górnego brzegu. Wartość  $\max N_{2g}$  zależy przede wszystkim od kąta nachylenia do poziomu tworzących stożka asymptotycznego oraz wychylenia  $w = r_g - a$  górnego brzegu powłoki względem przewężenia. Dla mniejszych kątów  $\alpha = \arctg \frac{a}{r_g}$  i większych wartości "w" otrzymujemy większe wartości sił rozciągających  $N_{2g}$ . Rozciąganie od ciężaru własnego zawsze zanika w pobliżu przewężenia.

## 2.2. Funkcje sił wewnętrznych powstających od sprężenia

Sprężenie cięgnami poprowadzonymi wzdłuż tworzących hiperboloidy daje w wyniku ściskające siły  $N_{1s}$  i  $N_{2s}$ . Dla intensywności sprężenia  $p_{so}$ , przyjętej dla dolnego brzegu powłoki (dla przewężenia) wartości sił sprężających zależą jedynie od  $\eta$ .

$$p_{so} = \frac{\sum_n S_1 \cdot \cos \frac{\beta_0}{2}}{2r_1a} = N_{1s}(\xi=0). \quad (12)$$

gdzie:

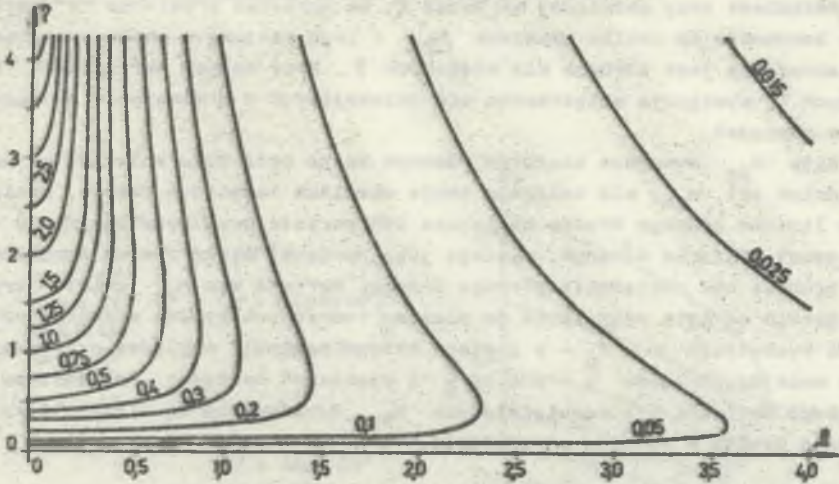
$S_1$  - siła w pojedynczym cięgnię sprężającym,

$\beta_0$  - kąt między tworzącymi przecinającymi się na wysokości  $\xi = 0$ .

Przy czym musi być  $S_1 = \text{const.}$  oraz parzysta liczba kabli "n", w przeciwnym razie wystąpię siły ścinające w powłoce [3]. Korzystając z własności, że  $N_{1s}$  i  $N_{2s}$  zależą jedynie od  $\eta, \xi$  i  $p_{so}$  sporządzono wykres (rys. 4), na podstawie którego można oszacować dla dowolnych parametrów  $\eta$  i  $\xi$  przebieg sił wewnętrznych od sprężenia w badanej powłoce. Zależność siły równoleżnikowej od południkowej dla powłoki hiperboloidalnej, w przypadku braku obciążenia powierzchniowego, przedstawia trzeci wzór układu (5) przy  $p_r = 0$ . Uwzględniając (4) otrzymujemy:

$$\chi(\eta, \xi) = \frac{N_2}{N_1} = -\frac{r_2}{r_1} = \frac{a \sqrt{\eta}}{a \cdot \eta^3} = \frac{\eta}{1 + (\eta + \eta^2)\xi^2} \quad (13)$$

Funkcja ta nie posiada ekstremów, a pochodne cząstkowe podług  $\eta$  i  $\xi$  zerują się odpowiednio w punktach  $\eta = 1/\xi, \eta = 0$ . Na wykresie przedstawiono funkcję  $\chi(\eta, \xi)$  w postaci poziomic o równaniach

Rys. 4. Poziomicowy obrys funkcji  $z(\eta, \xi)$ 

$$\xi = \sqrt{\frac{\eta - z}{z(\eta + \eta^2)}}$$

co pozwala na oszacowanie stosunku sił  $N_2/N_1$  dla danego  $\xi$  i  $\eta$ , a także dla zadanej wysokości  $\xi$  na znalezienie maksymalnej wartości ilorazu  $N_2/N_1$  oraz odpowiedniej wartości  $\eta$ .

Po przyjęciu kryterium efektywności sprężenia, wyrażającego się za pomocą stosunku  $N_2(\xi = h) : N_1(\xi = 0)$ , z rys. 4 możemy odczytać dogodne parametry  $\xi$  i  $\eta$ , przy dowolnym promieniu przewężenia "a". Operowanie wartością "a" pozwala dopasować przebieg sił wewnętrznych  $N_{2h}$  i  $N_{2g}$  do przebiegu  $N_{2g}$ . Muszą być przy tym zachowane warunki: stanu granicznego powstanie się rys

$$N_{2g} + N_{2g} + N_{2h} \leq N_{2f}^0 \quad \text{dla } \xi \in \langle \xi_1, 0 \rangle \quad (14)$$

oraz stanu granicznego nośności

$$\begin{aligned} \sum N_{11} + N_{1a} &< N_1^0 && \text{(wystarczy sprawdzenie dla } \xi = 0) \\ \sum N_{21} + N_{2g} &< N_2^0 && \text{- dla } \xi \in \langle \xi_1, 0 \rangle \end{aligned} \quad (15, 16)$$

## 3. WNIOSKI

Przy kształtowaniu geometrii powłoki należy unikać:

- dużych wysokości  $\xi_1$ , szczególnie dla  $\eta > 1,5$ , ze względu na szybki zanik sił  $N_{2a}$  dla  $\xi > 1,0$ ,
- przyjmowania dużych wartości  $\eta$  (szczególnie przy małym "a") ze względu na spiętrzenie naprężeń w przewężeniu,
- przyjmowania zbyt małych wartości  $\eta$  z uwagi na niewielką efektywność sprężenia:  $\max N_{2a} = \eta \cdot N_{1a}$ .

Należałoby przyjmować możliwie duży promień przewężenia "a", dzięki czemu wzrasta wysokość strefy efektywnie sprężonej, natomiast przebieg funkcji  $N_{2h}$  staje się bardziej płaski. Ułatwia to dostosowanie intensywności sprężenia do warunków nieprzekroczenia stanów granicznych, również przez to, że wtedy zaniejszą siły ściskające  $N_{21}$  w przewężeniu. Dla analizowanych powłok najlepsze wyniki uzyskano dla  $\eta$  z przedziału (1,0 - 1,8) oraz "a" > 3,5 m.

## LITERATURA

- [1] Ledwoń J.: Żelbetowe chłodnie powłokowe - obliczenia i konstrukcja. Wyd. I; Arkady, Warszawa 1959.
- [2] Ledwoń J., Golczyk M.: Chłodnie kominowe i wentylatorowe. Wyd. I; Arkady, Warszawa 1967.
- [3] Flugge W.: Powłoki, Obliczenia statyczne. Wyd. I; Arkady, Warszawa 1972.

## ПОДБОР ГЕОМЕТРИИ ГИПЕРБОЛОИДНОГО РЕЗЕРВУАРА ИЗ УСЛОВИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЯ

## Р е з ю м е

Статья является попыткой определить основные принципы экономического напряжения прямолинейными кабелями резервуаров в виде однополостного гиперболоида. Анализ, влияния геометрических параметров на протекание изменения функции внутренних сил и подбор интенсивности напряжения, был проведен в плёночном состоянии в безразмерных координатах при нагрузках гидростатическим давлением, собственным весом и напряжением.

THE GEOMETRICAL CHOICE OF THE HYPERBOLOIDAL RESERVOIR  
ON THE PRESTRESSING EFFECTIVENESS CONDITION

Summary

In this paper the general principles are given for an economical prestressing of the hyperboloidal reservoirs with rectilinear tendons. An analysis of the geometrical parameters effect on the variability of internal forces is carried out in the membrane state and the unidimensional coordinates under loads: the hydrostatic pressure, the self-weight and the prestressing forces.