

Stanisław BIELAK

Stanisław DONIEC

WPLYW PRACY PRĘTOWEJ W POWŁOCE WALCOWEJ  
PRACUJĄCEJ JAKO PRZEKRYCIE

**Streszczenie.** W pracy podano jednolite rozwiązanie przekryć walcowych pracujących w stanie zgięciowym zarówno długich, jak i krótkich dowolnie obciążonych i podpartych w ujęciu liniowej teorii powłok. Obecnie stosowane metody dzielą powłoki na długie, rozwiązywane metodą analogii belkowej i krótkie, rozwiązywane wg teorii bezmomentowej.

## 1. WSTĘP

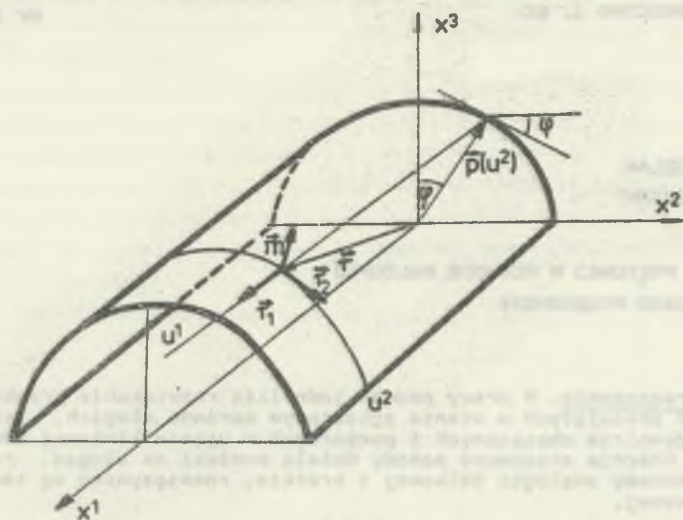
Metoda wymuszonych stanów błonowego i zgięciowego podana w pracy [1] stwarza duże możliwości w zakresie analitycznego rozwiązywania konstrukcji powłokowych pracujących w stanie zgięciowym. Istotą tej metody jest fakt, że naprężenia w dowolnym punkcie powłoki można rozpatrywać jako sumę złożoną z naprężeń wywołanych pracą błonową i zgięciową i tym samym uogólnione siły przekrojowe są sumami złożonymi z wpływów tychże prac. W pracy [2] rozwiązanie powłok prostokreślnych zostało sprowadzone do jednego równania różniczkowego cząstkowego ósmego rzędu. Poszukiwane rozwiązanie jest sumą całki ogólnej, rozwiązującej równanie różniczkowe jednorodne i całki szczególnej, spełniającej równanie niejednorodne. Całka ogólna odpowiada pracy zgięciowej, natomiast całka szczególna jest rozwiązaniem stanu wyjściowego, umownie nazywanego stanem błonowym. W powłoce walcowej pracującej jako przekrycie dowolnie podparte należy uwzględnić dodatkowy wpływ, który będziemy nazywali "pracą prętową". Ostateczne rozwiązanie będzie sumą pracy błonowej, zgięciowej oraz prętowej.

## 2. OPIS GEOMETRYCZNY

Równanie wektorowe powierzchni walcowej przyjmuje postać:

$$\vec{r} = \vec{p}(u^2) + \vec{i}u^1, \quad [\text{rys. 1}], \quad (2.1)$$

gdzie:  $u^2 = s$ ;  $s$  - parametr łukowy kierownicy walca.



Rys. 1

Współczynniki pierwszej formy różniczkowej oraz jej wyróżnik są równe:

$$\begin{aligned} g_{11} = g_{22} = 1, \quad g = 1 \\ g_{12} = g_{21} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Współczynniki drugiej formy różniczkowej oraz jej wyróżnik są równe:

$$\begin{aligned} b_{11} = b_{12} = b_{21} = 0, \quad b = 0, \\ b_{22} = \kappa, \end{aligned} \quad (2.3)$$

gdzie:  $\kappa$  - krzywizna kierownicy walca.

Współczynniki trzeciej formy różniczkowej są równe:

$$\begin{aligned} c_{11} = c_{12} = c_{21} = 0 \\ c_{22} = \kappa^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Symbole Christoffela drugiego rodzaju dla tak przyjętej parametryzacji są równe zero.

Krzywizny średnie i gaussowska są odpowiednio równe:

$$2H = \kappa, \quad K = 0. \quad (2.5)$$

### 3. ZBIORCZE ZESTAWIENIE RÓWNAŃ ROZWIĄZUJĄCYCH POWŁOKĘ WALCOWĄ

Równania podane w pracy [1] dla powłoki walcowej przyjmują następującą postać:

#### 3.1. Związki geometryczne

$$\hat{t}_{ij} = \frac{1}{2} (w^k|_j g_{ik} + w^k|_i g_{jk}) - w^3 b_{ij}, \quad (3.1)$$

$$q_{ij} = \frac{1}{2} (w^k|_j b_{ik} + w^k|_i b_{ju}) + \frac{1}{2} w^3|_{ij} - \frac{1}{2} w^3 c_{ij},$$

gdzie:

$\hat{t}_{ij}$  - tensor odkształcenia błonowego,

$q_{ij}$  - tensor odkształcenia błonowo-zgięciowego,

$w^k, w^3$  - składowe tensora przemieszczenia.

#### 3.2. Związki fizyczne

$$N^{ij} = \bar{N}^{ij} + 2H \hat{M}^{ij}, \quad (3.2)$$

$$M^{ij} = \hat{M}^{ij} + 2H \frac{h^2}{3} \bar{N}^{ij},$$

gdzie:

$$\bar{N}^{ij} = \frac{2Eh}{1-\nu^2} [(1-\nu) \delta^{ij} + \nu g^{ij} A], \quad (3.3)$$

$$\hat{M}^{ij} = -\frac{4Eh^3}{3(1-\nu^2)} [(1-\nu) \varphi^{ij} + \nu g^{ij} B].$$

Niezmienniki A i B są sumami:

$$A = g^{ij} \hat{t}_{ij}, \quad (3.4)$$

$$B = g^{ij} q_{ij}.$$

h - połowa grubości powłoki.

#### 3.3. Równania równowagi

Układ równań równowagi dla tak przyjętej parametryzacji powłoki walcowej przedstawia się następująco:

$$\frac{\partial N^{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial N^{12}}{\partial u^2} + P^1 = 0$$

$$\frac{\partial N^{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial N^{22}}{\partial u^2} - Q^2 b_{22} + P^2 = 0$$

$$\frac{\partial Q^1}{\partial u^1} + \frac{\partial Q^2}{\partial u^2} + b_{22} N^{22} + P^3 = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial M^{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial M^{12}}{\partial u^2} - Q^1 = 0$$

$$\frac{\partial M^{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial M^{22}}{\partial u^2} - Q^2 = 0$$

#### 4. RÓWNANIE ROZWIĄZUJĄCE DOWOLNĄ POWŁOKĘ

Ogólny układ równań równowagi (3.5) został sprowadzony w pracy [1] do jednego równania różniczkowego ósmego rzędu:

$$g_{ij} g_{kl} m_{ij} r_{kl} N^{22} \Big|_{\text{rsmnklij}} + \frac{w^4}{g} K_{ij}^2 b_{kl} N^{22} \Big|_{\text{kl ij}} = -R, \quad (4.1)$$

gdzie:

$$\frac{w^4}{g} = \frac{3(1-\nu^2)}{h^2}.$$

Całka tego równania może być przedstawiona jako suma:

$$\bar{N}^{22} = \bar{N}_0^{22} + \bar{N}_s^{22}, \quad (4.2)$$

gdzie:

$\bar{N}_0^{22}$  - całka ogólna rozwiązująca stan zgięciowy,

$\bar{N}_s^{22}$  - całka szczególna spełniająca stan błonowy.

##### 4.1. Całka szczególna

Wyjątkowo dla powłoki walcowej całka szczególna nie jest rozwiązaniem stanu błonowego, lecz oparta jest na uogólnionych siłach przekrojowych  $M^{22}$ ,  $Q^2$ ,  $N^{22}$ , co zostało uzasadnione w pracy [3].

Dla powłoki walcowej opartej na okręgu o promieniu  $r$  i obciążonej ciężarem własnym  $q$  rozwiązanie szczególne wyraża się wzorami:

$$\bar{N}_s^{22} = qr\psi \sin\varphi + c_1 \cos\varphi$$

$$\hat{Q}_s^2 = qr\psi \cos\varphi - c_1 \sin\varphi$$

$$\hat{M}_s^{22} = qr^2(\psi \sin\varphi + \cos\varphi) + c_1 r \cos\varphi + C_3$$

(4.3)

$$\bar{W}_s^3 = C_2 \cos\varphi - \frac{3r^2}{2Eh^3} \left[ C_3 + \frac{C_1 r + qr^2}{2} \psi \sin\varphi - \frac{qr^2}{2} (\psi^2 \cos\varphi - \psi \sin\varphi) \right]$$

$$\bar{W}_s^2 = C_2 \sin\varphi - \frac{3r^2}{2Eh^3} \left[ C_3 \psi + \frac{C_1 r + qr^2}{2} (\sin\varphi - \psi \cos\varphi) - \right.$$

$$\left. + \frac{qr^2}{4} (\psi^2 \sin\varphi + 3\psi \cos\varphi - 3 \sin\varphi) \right]$$

Ograniczenie rozważań do obciążenia ciężarem własnym nie wynika z trudności merytorycznych, lecz z charakteru pracy, której celem nie jest rozwiązanie powłoki od różnych wpływów, tylko analiza ciekawego zjawiska jakim jest praca prętowa powłoki.

Na szczególne podkreślenie zasługuje fakt, że wzory (4.3) są rozwiązaniem pełnym i ostatecznym dla powłok walcowych o ciągłych warunkach brzegowych wzdłuż krawędzi. W przypadku nieciągłości rozwiązanie to musi być uzupełnione stanem zgięciowym.

#### 4.2. Całka ogólna

Na podstawie podanego w pracy [2] rozwiązania równania różniczkowego ósmego rzędu (4.1) siły przekrojowe oraz przemieszczenia dla powłoki walcowej opartej wzdłuż krawędzi na słupach wyrażają się wzorami:

$$\bar{N}_o^{11} = - \left[ \bar{N}_{SA}^{22} + 2 \wp \frac{D_n^1}{D_n} - 2 w^2 \cos\varphi \frac{D_n^2}{D_n} \right] S_n^2$$

$$\bar{N}_o^{12} = 0$$

$$\bar{N}_o^{22} = \bar{N}_{SA}^{22} S_n^2$$

$$\hat{Q}_o^1 = -2wn_1 \frac{D_n^1}{D_n} S_n^1$$

$$\hat{Q}_o^2 = \hat{Q}_{SA}^2 S_n^2$$

$$\hat{M}_o^{11} = \left[ 2 \wp \frac{D_n^1}{D_n} - (1-\wp) \sin^2 \varphi \frac{D_n^2}{D_n} \right] S_n^2$$

(4.4)

$$\hat{M}_o^{12} = 0$$

$$\hat{M}_o^{22} = \hat{M}_{SA}^{22} S_n^2$$

$$\hat{W}_o^1 = \frac{\rho Q}{2Eh} Q^1$$

$$\hat{W}_o^2 = \frac{\rho Q}{2Eh} Q^2$$

$$\hat{W}_o^3 = - \frac{\rho^2 Q}{Eh} \cos \varphi \frac{D_n^2}{D_n} S_n^2 \quad (4.4)$$

gdzie:

$\hat{M}_{SA}^{22}$ ,  $\hat{M}_{SA}^{22}$ ,  $Q_{SA}^2$  - siły przekrojowe wynikające z rozwiązanie szczególnego na krawędzi powłoki.

$$S_n^1 = e^{-\omega n} 2u^2 \alpha_n \sin \omega n_j u_j$$

$$S_n^2 = a^{-\omega n} 2u^2 \alpha_n \cos \omega n_j u_j$$

$$D_n = 2 \cos^2 \varphi + (1 - \varphi) \sin^2 \varphi$$

$$D_n^1 = \hat{M}_{SA}^{22} \cos^2 \varphi - \frac{1 - \varphi}{2} \frac{\sin \varphi}{\omega n_1} \hat{Q}_{SA}^2 \sin^2 \varphi$$

$$D_n^2 = \hat{M}_{SA}^{22} + \frac{\sin \varphi}{\omega n_1} \hat{Q}_{SA}^2$$

$$\omega n_1 = \frac{2\pi n}{l}$$

$Q$  - promień krzywizny kierownicy

$$\omega n_2 = \frac{2\pi n}{l} \cot \varphi$$

$l$  - odległość między szlupami

$$\omega n_2 = - \frac{2\pi n}{l \sin \varphi}$$

$a$  - szerokość przekroju poprzecznego szlupa

$$\alpha_n = \frac{2l}{an} \sin \frac{\pi an}{l}$$

$n$  - liczba naturalna

$$\sin \varphi = \frac{2\pi n}{\omega l} \sqrt{2\ell \cos \varphi}$$

$$\cos \varphi = Q \left( \frac{2\pi n}{\omega l} \right)^2 \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\omega l}{2\pi n} \right)^4 \frac{1}{Q^2}} - 1 \right).$$

## 5. WPŁYW PRACY PRĘTOWEJ

Na podstawie dokonanych obliczeń numerycznych w oparciu o podane wzory okazało się, że w powłoce walcowej pracującej jako przekrycie należy uwzględnić dodatkowy wpływ, który będziemy nazywali "pracą prętową".

Powłoka oparta na słupach pracuje również jako dźwigar belkowy. Jeśli założymy, że siły  $N^{22}$  jest funkcję opisaną parzystym szeregiem potęgowym postaci:

$$\bar{N}_p^{22} = a_0 + a_2\varphi^2 + a_4\varphi^4 + a_6\varphi^6. \quad (5.1)$$

to spełnimy równanie różniczkowe jednorodne (4.1).

Siły przekrojowe oraz przenieszczenia otrzymane w oparciu o założony szereg (5.1) będą wywołane wpływem pracy prętowej, który należy podać do podanego wcześniej rozwiązania.

Korzystając z równań równowagi (3.5) oraz z zależności (5.2) otrzymamy równanie różniczkowe (5.3).

$$\sum X = N^{12}\sin\varphi + Q^1\cos\varphi = 0 \quad (5.2)$$

$$N_{\varphi\varphi}^{22} + N^{22} = -r \left[ N_{\varphi}^{12} - \operatorname{ctg}\varphi N_{\varphi}^{12} \right] - r(R_2^2 + P^3) \quad (5.3)$$

$N_{\varphi}$  - oznacza pochodną po  $u^1$ .

Dalej w oznaczeniu sił przekrojowych  $N_p^{ij}$  będziemy pomijali indeks "p" wyrażający wpływ pracy prętowej.

$$N_{\varphi\varphi}^{22} + N^{22} = -r(R_2^2 + P^3) \quad (5.4)$$

Równanie (5.4) daje rozwiązanie szczególne opisane wzorami (4.3). Wpływ pracy prętowej będzie rozwiązaniem równania:

$$N_{\varphi\varphi}^{22} + N^{22} = W(\varphi), \quad (5.5)$$

gdzie:

$$W(\varphi) = -r \left[ N_{\varphi}^{12} - \operatorname{ctg}\varphi N_{\varphi}^{12} \right] \quad (5.6)$$

Po rozwiązaniu równania (5.6) i uwzględnieniu warunków brzegowych otrzymamy:

$$N^{12} = \frac{W}{\sin\varphi} (u^1 - u_0^1) (J_A - J) \sin\varphi, \quad (5.7)$$

gdzie:

$$J = \int \frac{W}{\sin\varphi} d\varphi; \quad J_A = J(\varphi_A), \quad (5.8)$$

$u_0^1, \varphi_A$  - współrzędna na krawędziach powłoki.

Korzystając z równań równowagi (3.5) oraz związków fizycznych (3.2) otrzymamy wzory na pozostałe siły:

$$Q^1 = -\operatorname{ctg} \varphi N^{12}$$

$$N^{11} = -\alpha^2 \frac{1}{2} (u^1 - u_0^1)^2 \left[ (J_A - J) \cos \varphi - W \right] \quad (5.9)$$

$$Q^2 = (J_A - J) \sin \varphi + 2\varphi (d_2 + 2d_4 \varphi^2 + 3d_6 \varphi^4) \quad (5.9)$$

$$M^{22} = \frac{1}{\alpha} N^{22}$$

$$M^{12} = \frac{1}{\alpha} N^{12}$$

$$M^{11} = \frac{1}{\alpha} N^{11}$$

Siły przekrojowe (5.9) zapisane są przy użyciu szeregu potęgowego którego współczynniki możemy obliczyć korzystając z warunków brzegowych:

$$N^{22} \Big|_{d \text{ dla } \varphi = \varphi_A} = 0 \Rightarrow d_0 + d_2 \varphi_A^2 + d_4 \varphi_A^4 + d_6 \varphi_A^6 = 0$$

$$Q^2 \Big|_{d \text{ dla } \varphi = \varphi_A} = 0 \Rightarrow d_2 + 2d_4 \varphi_A^2 + 3d_6 \varphi_A^4 = 0 \quad (5.10)$$

$$W \Big|_{d \text{ dla } \varphi = 0} = 0 \Rightarrow d_6 + 2d_2 = 0$$

Po wykorzystaniu (5.1), (5.5), (5.8), (5.10) otrzymamy:

$$J = \int \frac{W}{\sin \varphi} d\varphi = d_0 \left[ -\frac{6}{\varphi_A^2} \left( 3 - \varphi_A^2 + \frac{1}{24} \varphi_A^4 \right) \left( \frac{\varphi}{\varphi_A} \right)^2 \cdot A_1 + \right. \\ \left. + \frac{3}{2\varphi_A^2} \left( 10 - 3\varphi_A^2 + \frac{1}{6} \varphi_A^4 \right) \left( \frac{\varphi}{\varphi_A} \right)^4 \cdot A_2 + \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{4} \varphi_A^2 \right) \left( \frac{\varphi}{\varphi_A} \right)^6 \cdot A_3 \right], \quad (5.11)$$

gdzie:

$$A_1 = \frac{2}{\varphi_A^2} \int \frac{\varphi^2}{\sin \varphi} d\varphi = 1 + \frac{\varphi^2}{2 \cdot 3!} + \frac{7\varphi^4}{9 \cdot 5!} + \dots$$

$$A_2 = \frac{4}{\varphi_A^4} \int \frac{\varphi^4}{\sin \varphi} d\varphi = 1 + \frac{\varphi^2}{9} + \frac{7\varphi^4}{720} + \dots \quad (5.12)$$

$$A_3 = \frac{6}{\varphi_A^6} \int \frac{\varphi^6}{\sin \varphi} d\varphi = 1 + \frac{\varphi^2}{8} + \frac{7\varphi^4}{600} + \dots$$



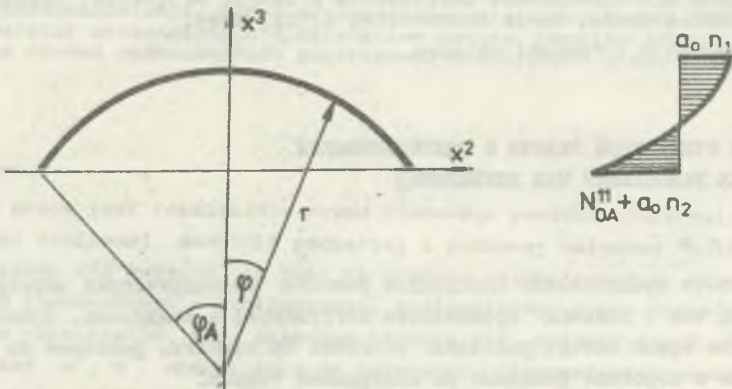
Korzystając z rozkładu siły przekrojowej  $N^{11}$  [rys. 2] wyznaczmy współczynnik  $a_0$ .

$$d_0 n_1 = N^{11} \Big|_{\text{dla } \varphi=0}$$

$\bar{N}_{OA}^{11}$  - wartość siły przekrojowej stanu zgięciowego dla  $\varphi = \varphi_A$ .

$$d_0 n_2 = N^{11} \Big|_{\text{dla } \varphi = \varphi_A}$$

$$d_0 = \frac{\bar{N}_{OA}^{11}}{2n_1 - n_2} \quad (5.13)$$



Rys. 2

Ostatecznie siły przekrojowe wpływu pracy prętowej opisane są wzorami:

$$\bar{N}_P^{11} = -\frac{1}{2} r^2 (u^1 - u_0^1)^2 \left[ (\varphi_A - \varphi) \cos \varphi - \varphi \right]$$

$$\bar{N}_P^{12} = r^2 (u^1 - u_0^1) (\varphi_A - \varphi) \sin \varphi$$

$$\bar{N}_P^{22} = a_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} \varphi^2 - (3 - \varphi_A^2) \left( \frac{\varphi}{\varphi_A} \right)^4 + 2 \left( 1 - \frac{1}{4} \varphi_A^2 \right) \left( \frac{\varphi}{\varphi_A} \right)^6 \right]$$

$$\hat{Q}_P^1 = -\epsilon \varphi r N^{12}$$

$$\hat{Q}_P^2 = (\varphi_A - \varphi) \sin \varphi - a_0 \left[ \varphi + \frac{4}{\varphi_A} (3 - \varphi_A^2) \varphi^3 - \frac{12}{\varphi_A^3} \left( 1 - \frac{1}{4} \varphi_A^2 \right) \varphi^5 \right]$$

Momenty przekrojowe opisują wzory (5.9).

Dotychczasowe rozwiązania dzielą powłoki na krótkie, rozwiązywane wg teorii bezmomentowej oraz na długie, rozwiązywane metodą analogii belkowej.

W prezentowanej pracy podano jednolite rozwiązanie przekryć walcowych, dowolnie obciążonych i podpartych, zarówno długich, jak i krótkich.

#### LITERATURA

- [1] Bielek S.: Powłoki prostokątne, Zeszyty Naukowe WSI w Opolu, Seria: Budownictwo z. 3, 1976.
- [2] Bielek S.: Teoria powłok, Skrypty Uczelniane Politechniki Śląskiej Nr 1111, 1983.
- [3] Doniec S.: Rozwiązanie analityczne przekryć walcowych, Zeszyty Naukowe WSI w Opolu, Seria Budownictwo z. 21, 1984.
- [4] Lundgren J.: Powłoki walcowe.

#### ВЛИЯНИЕ СТЕРЖНЕВОЙ РАБОТЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ РАБОТАЮЩЕЙ КАК ПЕРЕКРЫТИЕ

#### Р е з ю м е

В работе представлено однородное решение цилиндрических перекрытий как коротких так и длинных произвольно нагруженных и подпертых. Применяемые в настоящее время методы разделяют оболочки на длинные, решаемые по балковой аналогии и короткие решаемые по мембранной теории.

#### THE INFLUENCE OF ROD WORK IN THE CYLINDRICAL SHELL WORKING AS A ROOFING

#### S u m m a r y

The paper presents an indiscriminately solution of the cylindrical roofs working in a bending state of stress both long and short freely supported and loaded in turn of the linear theory of shells. The methods used nowadays divide the shells into the long, solved by a beam analogy and the short, solved according to the membrane theory.