ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988

Seria: ELEKTRYKA z. 104 Nr kol. 905

Edward WILCZYŃSKI

ZASTOSOWANIE METODY RÓWNAŃ CAŁKOWYCH DO WYZNACZANIA PARAMETRÓW ELEKTROMAGNETYCZNYCH UKŁADU CEWKA - WALEC PRZEWODZĄCY

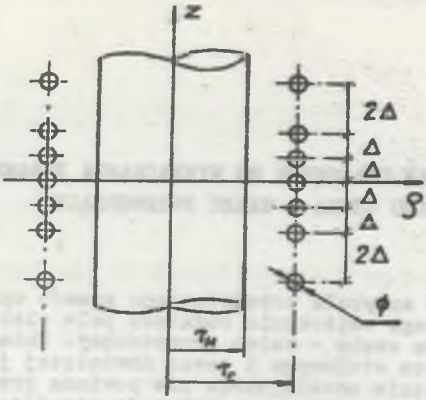
Streszczenie. W artykule przedstawiono sposób opracowania algorytmu umożliwiającego obliczenie rozkładu pola elektromagnetycznego i impedancji układu cewka - walec przewodzący. Układ składa się z nieskończonego walca stalowego i cewki nawiniętej jednowarstwowo. Częstotliwość napięcia zasilającego nie powinna przekraczać wartości 100 kHz. Obliczenia numeryczne wykonuje się dla przypadku odpuszczania spoiny kotła wysokociśnieniowego prądami średniej częstotliwości. Algorytm obliczeń opracowano na podstawie metody równań całkowych prezentowanej w pracach [10], [11], [12], [13]. Metoda została sformułowana w postaci odpowiedniego problemu brzegowego przy założeniu, że metal jest ośrodkiem liniowym, izotropowym i jednorodnym. Rozwiązanie tego problemu sprowadza się do rozwiązania układu równań całkowych na tworzącej powierzchni walcowej metalu. Wykorzystując odpowiednie wzory całkowe oblicza się następnie pole elektromagnetyczne w całej przestrzeni, straty mocy czynnej w metalu oraz impedancję cewki. W trakcie realizacji programu istnieje możliwość weryfikacji dokładności obliczeń poprzez porównanie oporności czynnej impedancji cewki z opornością wynikającą ze strat mocy czynnej w metalu.

1. Wstęp

Istnieje wiele metod wyznaczania pola elektromagnetycznego i impedancji układu cewka - walec przewodzący [3], [4], [5], [8], [9], [14]. Często wymaga się obliczeniattych parametrów w szerokim zakresie częstotliwości i przenikalności magnetycznej rdzenia. Niniejszy artykuł jest propozycją metody użytecznej w obliczeniach za pomocą minikomputera, jak również przy zastosowaniu dużej maszyny cyfrowej. Jest to metoda prowadząca do formułowania układu równań całkowych na granicy ośrodków metalu i powietrza. Po rozwiązaniu tego układu można obliczyć pole elektromagnetyczne w całej przestrzeni.

2. Układ cewka - walec przewodzący

Kształt cewki i rdzenia przyjęto taki jak na rys. 1 (powierzchnia boczna rdzenia ma równanie ρ = const w układzie współrzędnych cylindrycznych ρ, φ, z, a cewka powstała przez nawijanie rurki lub drutu na taką powierzchnię).



Rys. 1. Układ cewka - walec przewodzący
Fig. 1. The system: coil - conductive cylinder

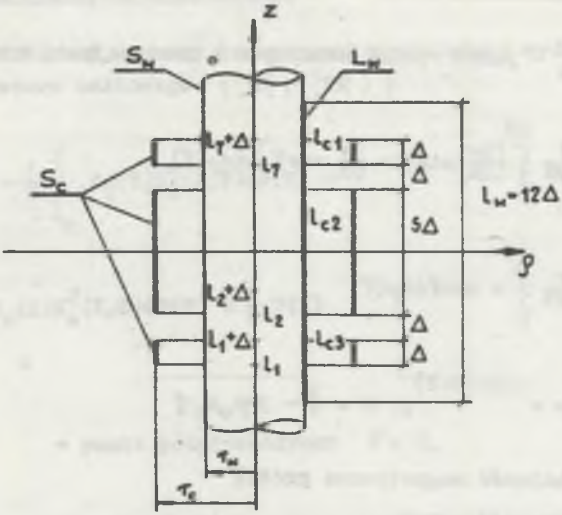
Długość rdzenia wielokrotnie przewyższa długość cewki. Cewkę zasila się prądem sinusoidalnie zmiennym o częstotliwości do 100 kHz. Rdzeń jest ośrodkiem izotropowym, jednorodnym i liniowym ze względu na przenikalność magnetyczną μ, elektryczną ε i konduktywność metalu γ.
W układzie tym należy określić rozkład pola elektromagnetycznego wokół cewki, na powierzchni metalu oraz wyznaczyć impedancję cewki.

3. Układ równań całkowych

Metodę obliczeń układu z rys. 1 i innych o bardziej dowolnym kształcie prezentuje się szczegółowo w pracach [10], [11], [12], [13]. Układ fizyczny z rys. 1 zastępujemy modelem matematycznym, w którym cewkę opisuje się powierzchnią S_c (rys. 2), z określoną gęstością powierzchniową prądu $\bar{\iota} = \bar{\iota}_\varphi \mathbf{1}_\varphi$, a rdzeń opisuje się obszarem V_m ograniczonym powierzchnią S_w o równaniu $\rho = r_w$ we współrzędnych cylindrycznych ρ, φ, z.
Powierzchnie S_c i S_w są klasy C_2. Składowa $\bar{\iota}_\varphi$ gęstości prądu cewki $\bar{\iota} = \bar{\iota}_\varphi \mathbf{1}_\varphi$ klasy C_0 jest funkcją zmiennej z.

Z prac [10], [11], [12], [13] wynika, że pole elektromagnetyczne można obliczyć w całej przestrzeni po rozwiązaniu układu równań całkowych zapisanych na linii prostej L_w pokazanej na rys. 2 (tworząca powierzchni walcowej S_w). Układ równań całkowych ma następującą postać ([12], [13]):

$$A_\varphi(P) - \int_{L_w} A_\varphi(T) K_G^1(P,T)\, d\phi(T) - \int_{L_w} \mu_w B_z(T) K_z^1(P,\bar{T})\, d\phi(T) = 0 \qquad (1)$$



Rys. 2. Model matematyczny układu cewka - walec przewodzący

Rys. 2. Mathematical model of the system coil - conductive cylinder

$$A_\varphi(P)+\int_{L_w} A_\varphi(T)K_G^2(P,T)d\vartheta(T)+\int_{L_w} B_z(T)K_z^2(P,T)\,d\vartheta(T) = W(P) \qquad (2)$$

gdzie:

ϑ - nieujemna miara zbioru L_w, $P\in L_w$, $T\in L_w$,

$A(P) = A_\varphi(P)\,\mathbf{1}_\varphi$ - potencjał wektorowy określony w punkcie P,

$B_z(P) = B_z(P)\,\mathbf{1}_z$ - granica jednostronna wartości składowej stycznej indukcji elektromagnetycznej określona w punkcie P przy zbliżaniu się punktu obliczeń do prostej L_w od strony przestrzeni powietrznej,

μ_w - przenikalność magnetyczna względna rdzenia magnetycznego (stała),

$$\bar{W}(P) = W(P)\mathbf{1}_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi}\iint_{S_c^2}\tau(Y_0)\,\frac{d\vartheta_s(Y_0)}{r(P,Y_0)} - \qquad (3)$$

- podwójna wartość potencjału wektorowego pochodzącego od gęstości prądu τ cewki a obliczonego w punkcie $P\in L_w$,

ϑ_s - miara powierzchni S_c,

K_G^1, K_z^1, K_G^2, K_z^2 - jądra równań całkowych o następującej postaci:

$$K_G^1(P,T) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial v}{\partial t}\sin\varphi - \frac{\partial v}{\partial n}\cos\varphi\right] d\vartheta_\varphi(\varphi) \tag{4}$$

$$K_z^1(P,T) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\cos\varphi\, d\vartheta_\varphi(\varphi) \tag{5}$$

$$v = \frac{1}{r(P,T)}\, e^{-jkr(P,T)}, \quad k = \sqrt{-j\omega\mu_o\mu_w\gamma} \tag{6}$$

μ_o - przenikalność magnetyczna próżni

γ - konduktywność metalu,

$$K_G^2(P,T) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\right)\sin\varphi - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\cos\varphi\right] d\vartheta_\varphi(\varphi) \tag{7}$$

$$K_z^2(P,T) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi}{r}\, d\vartheta_\varphi(\varphi) \tag{8}$$

ϑ_φ - miara zbioru współrzędnej φ na powierzchni metalu,

$t(T) = 1_\varphi$, wersor współrzędnej φ,

$n(T) = 1_\rho$, wersor współrzędnej ρ.

Równania (1)-(2) są układem dwu równań całkowych skalarnych o niewiadomych funkcjach zespolonych $A_\varphi(T)$ i $B_z(T)$, których dziedziną jest zbiór L_w.

Wartość składowej stycznej indukcji elektromagnetycznej na powierzchni metalu $B_m(T)$, określoną jako granicę jednostronną przy zbliżaniu się punktu obliczeń do powierzchni od strony objętości metalu można obliczyć z równania:

$$B_m(T) - \mu_w B_z(T) = 0. \tag{9}$$

Wymiary cewki na rys. 2 opisane są krotnością parametru Δ, który jest jednocześnie skokiem zwoju na rys. 1. Prosta L_w powinna mieć długość rdzenia.

Do obliczeń obcinamy jej długość do wartości 12Δ, popełniając przy tym pewien błąd.

4. Potencjał wektorowy w powietrzu

Potencjał wektorowy w całej przestrzeni powietrznej wyznacza się z następującego wzoru całkowego ([10], [13]):

$$A_\varphi(X) = -\frac{1}{2}\int_{L_w} A_\varphi(T)K_G^2(X,T)d\vartheta(T) - \frac{1}{2}\int_{L_w} B_z(T)K_z^2(X,T)d\vartheta(T) + \frac{1}{2}W(X) \tag{10}$$

gdzie:

X - punkt półpłaszczyzny $\varphi = 0$,

$T \in L_w$

K_G^2 - funkcja (7),

K_z^2 - funkcja (8),

$W(X)$ - wartość funkcji (3) w punkcie X,

$A(X) = A_\varphi(X)1_\varphi$ - potencjał wektorowy w przestrzeni,

$A_\varphi(T), B_z(T)$ - rozwiązania układu równań (1) i (2).

Indukcję elektromagnetyczną i pole elektryczne w przestrzeni oblicza się ze wzorów:

$$B = \nabla \times A \tag{11}$$

$$E = -j\omega A . \tag{12}$$

5. Straty mocy czynnej w walcu przewodzącym

Do obliczeń na maszynie cyfrowej wykorzystano układ z rys. 1 o następujących wymiarach: $r_w = 0{,}636$ m, $r_c = 0{,}664$ m, $\emptyset = 0{,}016$ m, $\Delta = 0{,}022$ m. Cewkę zasila się prądem do 200 A o częstotliwości 2 kHz. Rys. 1 przedstawia proces technologiczny odpuszczania spoiny kotła wysokociśnieniowego prądami średniej częstotliwości. Istotną rzeczą w tym zjawisku jest uzyskanie równomierności rozkładu natężenia pola magnetycznego na całej powierzchni nagrzewanej, dlatego po obu stronach cewki w pewnej od niej odległości dołożono po jednym zwoju. W fazie projektowania takiej cewki należy dokładnie określić wartość jej impedancji, ze względu na potrzebę dopasowania układu do istniejącego generatora i parametrów grzania walca

przewodzącego. Rdzeń nagrzewany jest do temperatury 600°C (poniżej punktu Curie dla stali). Ściany kotła mają grubość 5 cm i są wykonane ze stali austenitycznej ferromagnetycznej. Grubość ściany kotła jest większa kilkadziesiąt razy od głębokości wnikania fali elektromagnetycznej δ. W tym przypadku łatwo udowodnić, że rozkład pola elektromagnetycznego wewnątrz metalu jest identyczny z rozkładem fali płaskiej.
Straty mocy czynnej w rdzeniu (rys. 1, 2) oblicza się stosując prawo Joule'a do rurki z prądem i całkując po powierzchni prostokąta przekroju rdzenia $0 \leq \rho \leq r_w$, $-l_w/2 \leq z \leq l_w/2$ (rys. 2):

$$P = \int_0^{r_w} \int_{-l_w/2}^{l_w/2} \pi \rho \gamma \omega^2 A_\varphi \overset{*}{A}_\varphi d\rho dz \tag{13}$$

gdzie:

A_φ - składowa potencjału wektorowego w objętości V_m metalu, liczba zespolona,

$\overset{*}{A}_\varphi$ - wielkość sprzężona,

r_w - promień rdzenia (rys. 1, 2),

l_w - długość odcinka L_w (rys. 2).

Potencjał wektorowy dla fali płaskiej określa się wewnątrz metalu wzorem:

$$A_\varphi(\rho, z) = A_\varphi(T) e^{-\frac{1+i}{\delta}(r_w - \rho)} \tag{14}$$

gdzie:

$A_\varphi(T)$ - składowa potencjału wektorowego na prostej L_w, rozwiązanie równań (1), (2),

$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu \gamma \omega}}$ - głębokość wnikania fali elektromagnetycznej.

W przypadku ogólnym zależność (14), tzn. rozkład potencjału wektorowego w metalu, oblicza się z odpowiedniego wzoru całkowego [10, s. 110], [13, s. 135], po rozwiązaniu układu równań całkowych (1) i (2). Uwzględniając wzór (14) można wykonać całkowanie względem zmiennej ρ we wzorze (13). Otrzymuje się wyrażenie na moc czynną traconą w rdzeniu stalowym w postaci całki po prostej L_w (rys. 2):

$$P = 0{,}5\pi\gamma\omega^2 r_w \delta \int_{-l_w/2}^{l_w/2} A_\varphi(T) A_\varphi^*(T) dz \tag{15}$$

gdzie:

$A_\varphi(T)$ - składowa potencjału wektorowego określona na powierzchni metalu.

Całkę występującą we wzorze (15) można obliczyć dopiero po rozwiązaniu równań całkowych (1), (2). Całka ta jest funkcją gęstości prądu cewki $\tau = \tau_\varphi 1_\varphi$, tak samo zresztą jak i funkcja $A_\varphi(T)$:

$$\int_{-l_w/2}^{l_w/2} A_\varphi(T) A_\varphi^*(T) dz = k_1 \tau_\varphi^2 \tag{16}$$

k_1 - współczynnik rzeczywisty obliczony za pomocą maszyny cyfrowej,

$$\tau_\varphi = \frac{im}{l_c} \tag{17}$$

i - prąd cewki (rys. 1),

m = 7 - ilość zwojów cewki (rys. 1),

$l_c = 7\Delta$ - długość cewki, tzn. suma szerokości pasków powierzchni S_c (rys. 2) odwzorowujących cewkę.

Uwzględniając wyrażenia (15), (16), (17), uzyskuje się ostateczną postać wzoru na moc czynną traconą w walcu przewodzącym:

$$P = 0{,}5\pi\gamma\omega^2 r_w \delta k_1 \frac{m^2}{l_c^2} i^2 . \tag{18}$$

Wyrażenie (18) przepisujemy jako iloczyn części rzeczywistej impedancji cewki i kwadratu prądu cewki:

$$P = R_c' i^2 \tag{19}$$

gdzie:

$$R_c' = 0{,}5\pi\gamma\omega^2 r_w \delta \left(\frac{m}{l_c}\right)^2 k_1 .$$

Po rozwiązaniu równań całkowych (1), (2) zapisanych na powierzchni metalu można obliczyć opór czynny impedancji cewki wg wzoru (19).

6. Impedancja cewki

Strumień indukcji elektromagnetycznej skojarzony z jednym zwojem jest równy całce krzywoliniowej ze średniej wartości potencjału wektorowego w objętości zwoju, liczonej po osi zwoju. Potencjał wektorowy obliczony ze wzoru (10) jest funkcją o wartości modułu stałej przy zmianie współrzędnej kątowej φ [13].
W związku z powyższym strumień indukcji elektromagnetycznej skojarzony ze zwojem nr n cewki (rys. 2) wynosi:

$$\Phi_n = 2\pi r_c \frac{1}{\Delta} \int_{l_n}^{l_n+\Delta} A_\varphi(T)\,d\vartheta_c(T) \tag{20}$$

gdzie:

ϑ_c - miara zbioru $l_{c1} \cap l_{c2} \cap l_{c3}$,

$T \in l_{c1} \cap l_{c2} \cap l_{c3}$,

r_c - promień cewki,

$A_\varphi(T)$ - składowa potencjału wektorowego (10) liczona w punktach powierzchni cewki S_c.

Jak już wcześniej wspomniano, zwój cewki (rys. 1) zastępujemy modelem matematycznym w postaci paska powierzchni o szerokości Δ (rys. 2).

Całka występująca we wzorze (20) jest liczona wzdłuż odcinka l_{c1}, l_{c2} lub l_{c3} od zmiennej $z = l_n$ do $z = l_n + \Delta$.
Dodając wyrażenia Φ_n (20) dla numerów zwoju od 1 do 7 otrzymujemy wartość całkowitego strumienia indukcji elektromagnetycznej Φ skojarzonego z cewką:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{7} \Phi_n = \frac{2\pi r_c}{\Delta} \int_{l_{c3} \cap l_{c1} \cap l_{c2}} A_\varphi(T)\,dz. \tag{21}$$

Składowa $A_\varphi(T)$ (10) potencjału wektorowego obliczona za pomocą komputera jest funkcją składowej wektora gęstości prądu cewki $\tilde{\tau}_\varphi$ (17).

Strumień skojarzony Φ (21) można więc zapisać w następującej postaci:

$$\Phi = \frac{2\pi r_c}{\Delta} k_2 \tilde{\tau}_\varphi \tag{22}$$

gdzie:

k_2 - współczynnik zespolony obliczony za pomocą maszyny cyfrowej.

Uwzględniając wzory (17), (22) oraz wartość napięcia na cewce:

$$U = j\omega\Phi \tag{23}$$

możemy wyrazić napięcie cewki U w funkcji prądu i:

$$U = j\omega \frac{2\pi r_c}{\Delta} k_2 \frac{n}{l_c} i \, . \tag{24}$$

Ze wzoru (24) oblicza się impedancję układu cewka - walec przewodzący:

$$Z_o = R_o'' + j X_o = \frac{2\pi\omega r_c n}{\Delta l_c} j k_2 \tag{25}$$

Rezystancje R_o''(25) i R_o'(19) oznaczają tę samą wielkość fizyczną. Różnica między liczbami R_o' i R_o'' jest miarą dokładności obliczeń. Należy dodać, że rezystancję R_o'(19) wolno liczyć za pomocą wzorów (14)-(19), jedynie wtedy, gdy pole elektromagnetyczne w metalu można traktować jako falę płaską w ośrodku przewodzącym. W artykule nie uwzględnia się rezystancji przewodu lub rurki z której jest wykonana cewka.

7. Przybliżone rozwiązanie układu równań całkowych

Układ równań całkowych (1), (2) rozwiązuje się poprzez:

a) dyskretyzację odcinka L_w (podział na 2t części):

$$\vartheta(L_w) = \sum_{n=1}^{2t} \vartheta(l_i) \tag{26}$$

gdzie:

$\vartheta(l_i) = h$ dla $i = 1,2,\ldots,2t$,

b) zastąpienie funkcji $A_\varphi(T)$, $B_z(T)$ w równaniach (1), (2) wektorami $\{a_i\}$, $\{b_i\}$, $i = 1,2,\ldots,t$, tzn. w punktach odcinka l_i zastępuje się funkcje $A_\varphi(T)$ i $B_z(T)$ liczbami a_i, b_i,

b) zamianę całek równań (1), (2) na sumy skończone:

$$S_k = \int_{L_k} x_i K(P_k,T_i) d\vartheta(T_i) = \sum_{i=1}^{2t} x_i \int_{l_i} K(P_k,T_i) d\vartheta(T_i) \tag{27}$$

gdzie:

x_i – składowe wektorów $\{a_i\}$ lub $\{b_i\}$,

$K(P_k, T_i)$ – jądra K_G^1, K_G^2, K_z^1 lub K_z^2 równań (1), (2).

W punkcie b) wektory $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$ mają wymiar dwukrotnie mniejszy niż liczba podziału odcinka L_w, bowiem rozkład pola elektromagnetycznego w układzie z rys. 1, 2 jest symetryczny względem płaszczyzny $z = 0$ i funkcje A_φ, B_z dyskretyzuje się dla zmiennej $z > 0$.
Błąd dyskretyzacji można zmniejszyć poprzez aproksymację funkcji A_φ, B_z np. wzorem interpolacyjnym Legendre'a i zastosowanie do całek kwadratur Gaussa-Legendre'a [1], [6]. Innym sposobem zmniejszenia globalnego błędu obcięcia, tzn. zamiany całki sumą skończoną, będzie podział prostej L_w na większą liczbę odcinków, pod warunkiem że nie przekroczymy pamięci maszyny cyfrowej.
Całki w równaniu (27) liczy się wykorzystując wzory (4), (5), (7), (8). Można je wyrazić analitycznie poprzez funkcje eliptyczne $E(k)$, $K(k)$, $\pi(\alpha, n, k)$ [2], [7], [8]. Analityczne wyznaczenie tych całek lub numeryczne ich obliczenie jest zagadnieniem obszernym i wymaga oddzielnego opracowania.

Podstawiając do równań (1) i (2) w miejsce całek sumy (27) i porządkując współczynniki przy składowych wektorów $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$ otrzymuje się układ 2t równań liniowych o współczynnikach zespolonych z 2t niewiadomymi (zapisany w formie równania macierzowego):

$$AX = B \tag{28}$$

gdzie:

X – macierz jednokolumnowa szukanych wartości a_i, b_i, $i = 1,2...,t$, stopnia 2t,

B – macierz jednokolumnowa współczynników wolnych (elementy od 1 do t równają się zeru, a pozostałe są równe wartościom składowej W(P) potencjału W(P) (3) liczonego w punktach P_k L_w, $k = 1,2,...,t$).

Elementami macierzy kwadratowej A (28) stopnia 2t są sumy współczynników postaci:

$$a_{ki} = \int_{L_i} K(P_k, T_i)\,d\varphi(T_i) \tag{29}$$

gdzie:

$P_k \in L_k$, $T_i \in L_i$ $\quad k = 1,2,...,t$
$\quad i = 1,2,...,2t.$

Jak widać ze wzoru (27), w całkach równań (1), (2) dyskretyzuje się funkcje A_φ i B_z, a nie całe wyrażenie podcałkowe, przez co znacząco zwiększa się dokładność obliczeń.
Poprzez rozwiązanie układu równań (28) wyznacza się macierz X wektorów $\{a_i\}$, $\{b_i\}$. Następnie ze wzoru (10), oblicza się potencjał wektorowy w przestrzeni, rezystancję R_o' (19) oraz impedancję Z_o (25). Całki w wyrażeniu (10) zamienia się sumami skończonymi (27), analogicznie jak w przypadku równań (1) i (2).

8. Przykład obliczeniowy

Do obliczeń na maszynie cyfrowej przyjęto układ taki jak na rys. 2 z wymiarami określonymi w punkcie 5 pracy. Rdzeń cewki jest ferromagnetykiem, tzn. nie spełnia założeń metody równań całkowych [10]-[13] (ośrodek nieliniowy). Pomimo to przyjmujemy do obliczeń taki przypadek ze względu na jego duże znaczenie praktyczne. Popełniony przy tym błąd obliczeń jest pomijalnie mały dla niedużych prądów cewki. Z kolei dla dużych prądów metoda jest stosunkowo nieskomplikowanym i dokładnym sposobem oszacowania wielkości i rozkładu przestrzennego pola elektromagnetycznego wokół układu cewka - walec przewodzący.

Prosta L_w została podzielona na $2t = 36$ odcinków l_i, każdy o długości $a = \Delta/3 = 7{,}33$ mm. Otrzymano równanie (28) z macierzą A kwadratową zespoloną stopnia $n = 36$.

Układ z rys. 2 został obliczony dla 3 przypadków:

a) $\mu_w = 600$, $f = 2$ kHz,

b) $\mu_w = 3500$, $f = 2$ kHz,

c) $\mu_w = 600$, $f = 5$ kHz.

Wyniki zestawiono w tabeli 1

Tabela 1

Lp.		$\mu_w = 600$ $f = 2$ kHz	$\mu_w = 3500$ $f = 2$ kHz	$\mu_w = 600$ $f = 5$ kHz
1	R_o' [Ω]	0,361097	0,5501418	0,6520577
2	R_o'' [Ω]	0,363259	0,5535332	0,65572
3	X_o [Ω]	0,8675827	1,411771	1,73346
4	A [m]	3,89-2,4	7,17-4,73	2,7-1,57
5	B	56,4-34,8	43,1-28,4	61,9-36,0

Rozbieżność rzędu 0,5% między rezystancją R_o' a R_o'' wynika z przystosowania programu do obliczeń na minikomputerze (znaczne obcięcie prostej L_w i duża wartość odcinka h).
W wierszach 4 i 5 tabeli 1 podano wartości modułów $|A_1|$, $|A_{18}|$, $|B_1|$, $|B_{18}|$ równe składowej potencjału wektorowego i składowej stycznej indukcji elektromagnetycznej w środku odcinka L_w (A_1, B_1) i na jego końcu (A_{18}, B_{18}) w ten sposób, że liczby A i B oznaczają następujące wielkości:

$$A = \frac{100}{\mu_o \tilde{\iota}_\varphi} \left[|A_1| - |A_{18}|\right] \quad [m] \tag{30}$$

$$B = \frac{100}{\mu_o \tilde{\iota}_\varphi} \left[|B_1| - |B_{18}|\right] \tag{31}$$

Dokładne obliczenie prądu cewki nie jest zagadnieniem łatwym ze względu na nieliniowość charakterystyki magnesowania rdzenia (dla dużych prądów). Problem ten wymaga oddzielnego opracowania.
W sposób przybliżony prąd (i) cewki oblicza się w następującej kolejności (μ_w = 600, f = 2 kHz):

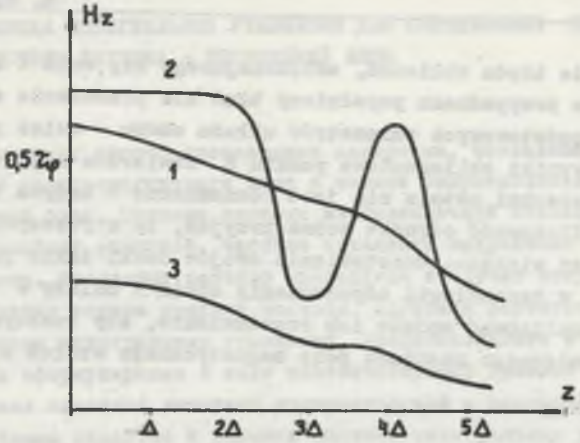
a) z charakterystyki magnesowania rdzenia stalowego dla przenikalności względnej μ_w = 600 wynika średnia wartość natężenia pola megnetycznego na powierzchni metalu $H_{śr} = 4200 \frac{A}{m}$,
b) natężenie pola magnetycznego na powierzchni metalu zmienia się od wartości $H_{max} = 0,564\,\tilde{\iota}_\varphi$ do $H_{min} = 0,348\,\tilde{\iota}_\varphi$ (tabela 1, wiersz 5), tzn. średnia wartość natężenia pola magnetycznego na powierzchni metalu wynosi:

$$H_{śr} = \frac{1}{2}(H_{max} + H_{min}) = 0,456\,\tilde{\iota}_\varphi \tag{32}$$

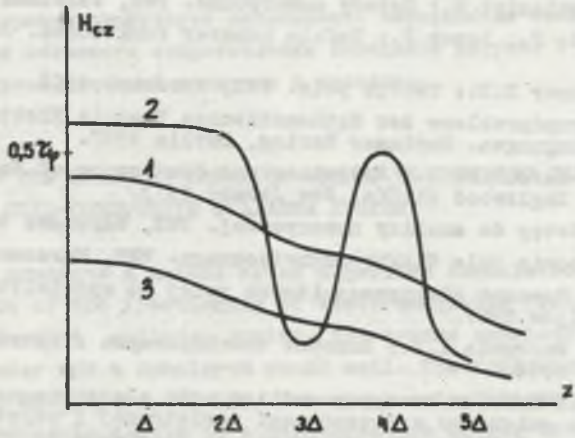
c) uwzględniając wzory (17), (32) oblicza się prąd (i) cewki:

$$i = \frac{H_{śr}\, l_c}{0,456\ m} = \frac{4200 \cdot 0,154}{0,456 \cdot 7} = 202\ A.$$

Rozkład składowej w kierunku osi (z) natężenia pola magnetycznego dla μ_w = 600, f = 2 kHz przedstawiają rys. 3 i 4 (w funkcji zmiennej z). Na obu rysunkach krzywe 1 dotyczą pola przy powierzchni metalu (ρ = 0,637 rys. 2), krzywe 2 przedstawiają rozkład pola w pobliżu cewki (ρ = 0,663), natomiast krzywe 3 podają rozkład pola poza cewką (ρ = 0,694).
Natężenie pola magnetycznego wyrażono w krotności składowej gęstości prądu cewki $\tilde{\iota}_\varphi$. Rys. 3 przedstawia pole sumaryczne rdzenia i cewki, a rys. 4 tylko pole pochodzące od prądu cewki.



Rys. 3. Składowa osiowa natężenia pola magnetycznego w układzie rys. 2
Fig. 3. Axial component of magnetic field strength in a system from fig. 2



Rys. 4. Składowa osiowa natężenia pola magnetycznego pochodząca od prądu cewki (rys. 2)
Fig. 4. Axial component of magnetic field strenght resulting from the coil current

9. Podsumowanie

Sposób wyznaczania parametrów elektromagnetycznych układu cewka - walec przewodzący dla przebiegów sinusoidalnie zmiennych opracowano na podstawie metody równań całkowych zakładającej, że rdzeń cewki jest ośrodkiem izotropowym, jednorodnym i liniowym. Przy takich założeniach uzyskane wyniki są dokładne. Przyjęcie w układzie z rys. 2 rdzenia ferromagnetyczne-

go powoduje powstanie błędu obliczeń, zwiększającego się wraz z amplitudą prądu cewki. W wielu przypadkach popełniony błąd nie przesłania zalet metody w wyznaczaniu podstawowych parametrów układu cewka - walec przewodzący. Analizując np. wyniki obliczeniowe punktu 8 stwierdza się, że pole magnetyczne na powierzchni metalu nie jest równomierne - krzywa 1 rys. 3, a uwzględniając nieliniowość ośrodka można przyjąć, że w rzeczywistości nierównomierność jest większa. Rozstawienie zwojów cewki takie jak na rys. 1 jest typowe w technologii odpuszczania spoin i należy w tym przypadku od nowa przeanalizować sposób ich rozstawienia, aby rzeczywiście uzyskać efekt równomiernego rozkładu pola magnetycznego wzdłuż szczeliny powietrznej.

LITERATURA

[1] Björck A., Dahlquist G.: Metody numeryczne. PWN, Warszawa 1983.

[2] Janke E., Emde F., Losch F.: Tafeln hoherer Funktionen. Stuttgart 1960.

[3] Moon P., Spencer D.E.: Teoria pola. PWN, Warszawa 1966.

[4] Müller C.: Grundprobleme der Mathematischen Theorie Elektromagnetischer Schwingungen. Springer Verlag, Berlin 1957.

[5] Felsen L.B., Marcuvitz N.: Radiation and Scattering of Waves, Prentice Hall. Englewood Cliffs, New Jersey 1973.

[6] Ralston A.: Wstęp do analizy numerycznej. PWN, Warszawa 1983.

[7] Sikora R.: Teoria pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1977.

[8] Tozoni O.V.: Rasczot elektromagnitnych polej na wyczislitielnych maszinach. Kijów 1967.

[9] Tozoni O.V., Maergoiz I.D.: Rasczot trechmiernych elektromagnitnych polej. Kijów 1974.

[10] Wilczyński E.: Problem brzegowy analizy pola elektromagnetycznego sinusoidalnie zmiennego w przestrzeni powietrznej i objętości metalu. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Elektryka nr 75, 1981.

[11] Wilczyński E.: Potencjał wektorowy na granicy środowiska powietrza i przewodnika metalowego, dyskusja poprawności postawionego problemu brzegowego. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Elektryka nr 75, 1981.

[12] Wilczyński E.: Zagadnienie istnienia rozwiązania problemu brzegowego analizy pola elektromagnetycznego w przestrzeni powietrznej i objętości metalu. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Elektryka nr 75, 1981.

[13] Wilczyński E.: Problem brzegowy obliczania pola elektromagnetycznego w układzie: bryła metalu - gaz. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Elektryka nr 88, 1984.

[14] Zienkiewicz O.C.: Metoda elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1972.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Stanisław K. Krzemiński

Wpłynęło do redakcji dn. 15 kwietnia 1986 r.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ КАТУШКА - ПРОВОДЯЩИЙ БЛОК

Р е з ю м е

В работе показан способ составления алгоритма, позволяющего расчитать распределение электромагнитного поля и полное сопротивление системы катушка - проводящий блок. Система состоит из безконечной стальной балки и катушки с однослойной обмоткой. Частота питающего напряжения не может превышать 100 кгц. Численные расчёты проводятся в случае отпуска шва котла высокого давления токами средней частоты. Алгоритм расчётов составлен на основании метода интегральных уравнений, представленного в работах [10], [11], [12], [13]. Метод сформулирован в виде соответствующей краевой проблемы, принимая, что металл является линейной изотропической и однородной средой. Решение этой проблемы сводится к решению системы интегральных уравнений по образующей поверхности балки металла. Используя соответствующие интегральные формулы, расчитывается электромагнитное поле во всём пространства, потери активной мощности в металле а также полное сопротивление катушки. Во время реализации программы существует возможность верификации точности расчётов, путем сравнения активного сопротивления импеданса катушки с сопротивлением, вызванным потерями активной мощности в металле.

APPLICATION OF THE INTEGRAL EQUATION METHOD TO DEFINING ELECTROMAGNETIC PARAMETERS OF COIL-CONDUCTIVE CYLINDER SYSTEM

This paper presents a method of an algorithm formulation which enables the calculation of the fractioning of electromagnetic field and impedance of a coil-conductive cylinder system. The system consists of an infinite steel cylinder and a monolayer wound coil. The frequency of the supply voltage should not exceed 100 kHz. Numerical calculations are made for the case of tempering a weld in a high-pressure boiler by medium frequency current. The algorithm of calculations has been carried out on the basis of the integral equation method presented in the following works [10], [11], [12], [13]. The method has been formulated as a suitable boundary problem with the assumption that a metal is a linear, isotropic and homogeneous medium. The solution of this problem resolves itself into solving the system of integral equations on the creatiwe of the cylindrical surface of the metal. Then using adequate integral formulas, electromagnetic fields in the whole space, active power losses in the metal and a coil impedance are computed. During the program realization there is a possibility to verify the exactness of calculations by comparing the effective resistance of the coil impedance with the reasistance resulting from the active power losses in the metal.