

Witold HORST

Instytut Elektrotechniki Przemysłowej
Politechnika Poznańska**PRZESUWANIE ŹRÓDEŁ PRĄDU W LINII DŁUGIEJ RG I WYKORZYSTANIE TEJ PROCEDURY
W MODELOWANIU ZJAWISK W UKŁADACH JEDNOWYMIAROWYCH**

Streszczenie. Opis matematyczny wielu zagadnień technicznych zawiera się w równaniach aktywnej linii długiej. Fakt ten pozwala na ich rozwiązywanie z bezpośrednim wykorzystaniem aparatu matematycznego stosowanego w teorii linii długiej, zwłaszcza w ujęciu dwójnikowym. Metoda ta, zgodnie z twierdzeniem o dwójniku zastępczym, pozwala na ukazanie wpływu warunków brzegowych, wymuszeń źródłowych oraz parametrów układu na zjawiska w dowolnym miejscu układu fizycznego.

W pracy przedstawiono możliwość rozwinięcia tej metody poprzez wykorzystanie procedury przesuwania wzdłuż linii długiej skupionych i rozłożonych wymuszeń prądowych. Wprowadzona procedura pozwala na znaczne uproszczenie konstruowania obwodowego modelu zjawisk, a tym samym ułatwia rozwiązywanie jednowymiarowych zagadnień brzegowych. Możliwości wykorzystania omawianej procedury prezentują zamieszczone przykłady.

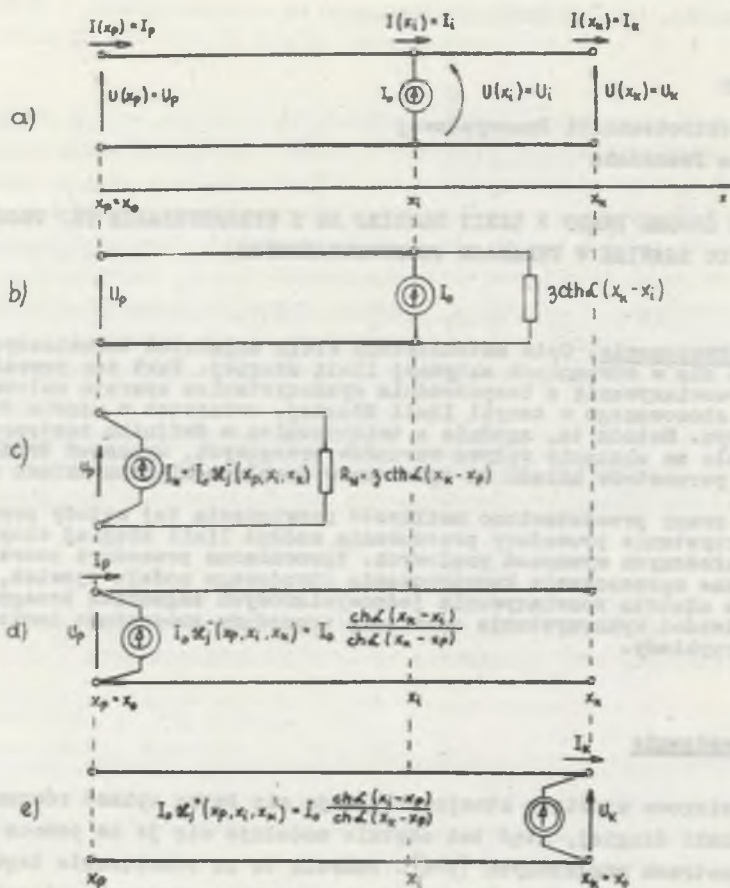
1. Wprowadzenie

Jednowymiarowe zjawiska stacjonarne dają się łatwo opisać równaniami aktywnej linii długiej, stąd też chętnie modeluje się je za pomocą układów o parametrach rozłożonych [1-6]. Pozwala to na rozwiązanie tego typu zagadnień z wykorzystaniem metod matematycznych stosowanych w teorii linii długiej.

2. Przesuwanie skupionych źródeł prądu w linii długiej

Niech dana będzie jednorodna (o impedancji charakterystycznej Z_0 i stałej przenoszenia α) linia długa (rys. 1a) w miejscu x_1 ($x_p < x_1 < x_k$), której załączono skupione źródło prądu I_a . Ze względu na zjawiska w linii dla $x < x_1$ można jej odcinek $< x_1, x_k >$ zastąpić (rys. 1b) jego rezystancją wejściową. Jeśli dla otrzymanego obwodu, opisanego równaniami:

$$\begin{bmatrix} U_p \\ I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \alpha (x_1 - x_p) & \frac{1}{Z_0} \operatorname{sh} \alpha (x_1 - x_p) \\ \frac{1}{Z_0} \operatorname{sh} \alpha (x_1 - x_p) & \operatorname{ch} \alpha (x_1 - x_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$$



Rys. 1. Ilustracja kolejnych etapów a, b, c, d, przesuwania (w kierunku malejącego x) źródła prądu I_0 oraz (e) - obwód z rys. a po przetranspozycji źródła do punktu obserwacji $x_0 = x_k$, tj. w kierunku rosnącego x

Fig. 1. Sequence of consecutive phases a, b, c, d, of displacement of the current source I_0 (in the direction of decreasing x), and (e) the circuit from the fig. a after transposing the source to the observation point $x_0 = x_k$ (ie. in the direction of increasing x)

gdzie:

$$U_1 = (I_1 + I_0) \cdot 3 \operatorname{cth} \Delta (x_k - x_1),$$

zastosować twierdzenie Nortona, otrzymamy dwójnik zastępczy podany na rys. 10, gdzie:

$$I_N = I_0 \mathcal{K}_j^-(x_p, x_1, x_k) = I_0 \frac{\operatorname{ch} \alpha(x_k - x_p)}{\operatorname{ch} \alpha(x_k - x_1)}, \quad R_N = \frac{1}{2} \operatorname{cth} \alpha(x_k - x_p).$$

Dwójnik ten przedstawić można w postaci równoważnego obwodu o parametrach rozłożonych (rys. 1d), który różni się od obwodu z rys. 1a zmianą lokalizacji źródła prądu I_0 . Zatem wpływ źródła I_0 włączonego w miejscu x_1 na zjawiska w miejscu obserwacji $x_0 = x_p$ jest identyczny jak źródła $I_0 \mathcal{K}_j^-(x_p, x_1, x_k)$ załączonego w miejscu x_p .

Przekładnia $\mathcal{K}_j^-$ uwiadamia sposób oddziaływania źródła I_0 na wielkości w wybranym miejscu x_0 transponując je jak gdyby do tego miejsca (indeks "-" informuje o przesuwaniu źródła w kierunku ujemnym osi x). Identyczne wyrażenie na $\mathcal{K}_j^-$ znaleźć można w pracy [5].

Postępując podobnie, wyznaczyć można przekładnię $\mathcal{K}_2^-$ również dla linii (przy zaciskach x_k) w stanie zwarcia: $\mathcal{K}_2^-$ oraz dla linii nieskończenie długiej: $\mathcal{K}_0^-$. W wyniku otrzymamy:

$$\mathcal{K}_j^-(x_p, x_1, x_k) = \frac{\operatorname{ch} \alpha(x_k - x_1)}{\operatorname{ch} \alpha(x_k - x_p)}$$

$$\mathcal{K}_0^-(x_p, x_1) = e^{-\alpha(x_1 - x_p)}$$

$$\mathcal{K}_2^-(x_p, x_1, x_k) = \frac{\operatorname{sh} \alpha(x_k - x_1)}{\operatorname{sh} \alpha(x_k - x_p)}$$

Jeśli za punkt obserwacji przyjmiemy $x_0 = x_k$ (rys. 1e), tzn. będzie miał miejsce przypadek przesuwania źródła w kierunku dodatnim osi x , to wyrażenia opisujące przekładnie w odpowiednich stanach pracy linii (przy zaciskach x_p) przyjmą postać:

$$\mathcal{K}_j^+(x_p, x_1, x_k) = \frac{\operatorname{ch} \alpha(x_1 - x_p)}{\operatorname{ch} \alpha(x_k - x_p)}$$

$$\mathcal{K}_0^+(x_1, x_k) = e^{-\alpha(x_k - x_1)}$$

$$\mathcal{K}_2^+(x_p, x_1, x_k) = \frac{\operatorname{sh} \alpha(x_1 - x_p)}{\operatorname{sh} \alpha(x_k - x_p)}$$

3. Przesuwanie wymuszeń rozłożonych

Wykorzystując uzyskane dotychczas zależności oraz zasadę superpozycji można znaleźć wyrażenia pozwalające na określenie sposobu oddziaływania rozłożonych poprzecznie źródeł prądu (linia aktywna). Operacja ta jest równoważna wyłączeniu źródeł poza układ.

Niech dana będzie jednorodna linia długa aktywna (JLDA) zwarta na początku i rozwarta na końcu z rozłożonymi równomiernie z gęstością $J(x) = J_0 = \text{const}$ źródłami prądu (rys. 2a). Wtedy I_z oraz I_j z rys. 2b dane będą (patrz również [4]) zależnościami:

od strony odcinka zwartego

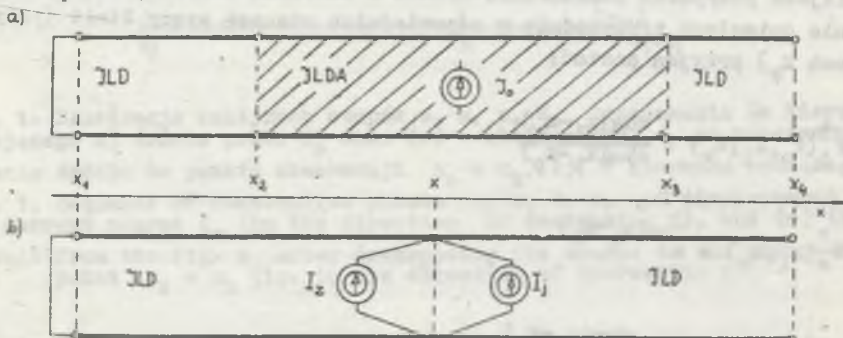
$$I_z = \int_{x_1}^x \mathcal{K}_z^+(x_1, \xi, x) J(\xi) d\xi = \int_{x_2}^x \frac{\text{sh}\alpha(\xi - x_1)}{\text{sh}\alpha(x - x_1)} J_0 d\xi = \frac{J_0}{\alpha \text{sh}\alpha(x - x_1)} \cdot$$

$$\cdot [\text{ch}\alpha(x - x_1) - \text{ch}\alpha(x_2 - x_1)]$$

od strony rozwartego krańca linii

$$I_j = \int_x^{x_4} \mathcal{K}_j^-(x, \eta, x_4) J(\eta) d\eta = \int_x^{x_3} \frac{\text{ch}\alpha(x_4 - \eta)}{\text{ch}\alpha(x_4 - x)} J_0 d\eta =$$

$$= \frac{J_0}{\alpha \text{ch}\alpha(x_4 - x)} [\text{sh}\alpha(x_4 - x) - \text{sh}\alpha(x_4 - x_3)]$$



Rys. 2. Wyłączanie rozłożonych źródeł prądu poza układ:

(a) - układ aktywny, (b) - układ z wyłączonymi źródłami (JLDA - jednorodna linia długa aktywna, JLD - jednorodna linia długa pasywna)

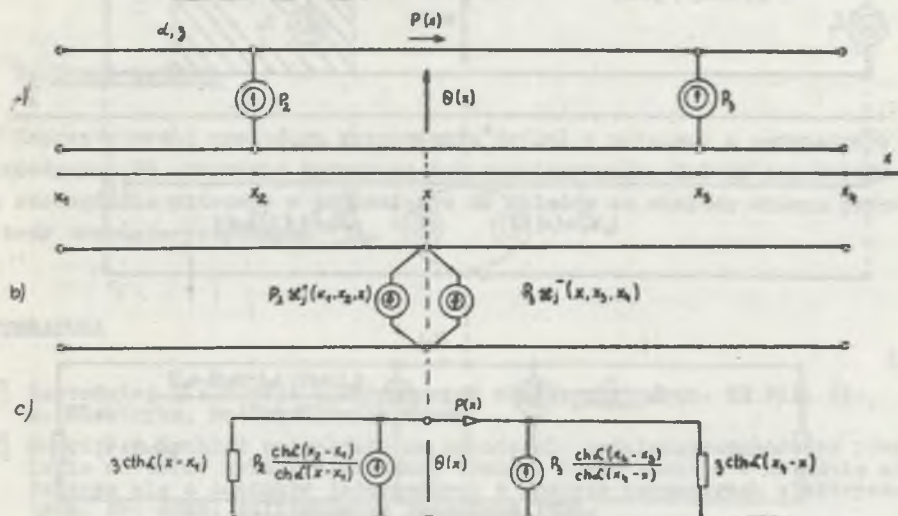
Fig. 2. Exclusion of distributed current sources out of the system

(a) - active system, (b) - system with excluded sources (JLDA - uniform active long line, JLD - uniform passive long line)

4. Przykłady

Przykład 1

Wyznaczyć rozkład temperatury $\Theta(x)$ dla $x_2 < x < x_3$ w jednorodnym układzie termokinetycznym [1] pokazanym na rys. 3a.



Rys. 3. Rozważany w przykładzie 1 układ termokinetyczny w postaci równoważnej [1] linii długiej o parametrach α [1/m] i z [°K/W] (a), oraz etapy jego przekształcania (b, c), gdzie: $\Theta(x)$ - przyrost temperatury [°K]; P_2, P_3 - skupione źródła mocy cieplnej [W].

Fig. 3. Thermokinetic system considered in the example 1 in the form of equivalent [1] long line of the parameters α [1/m] and z [°K/W] (a), and the phases of its transforming (b, c) where $\Theta(x)$ - the increase of temperature [°K], P_2, P_3 - lumped sources of thermal - power [W].

Rozwiązanie 1

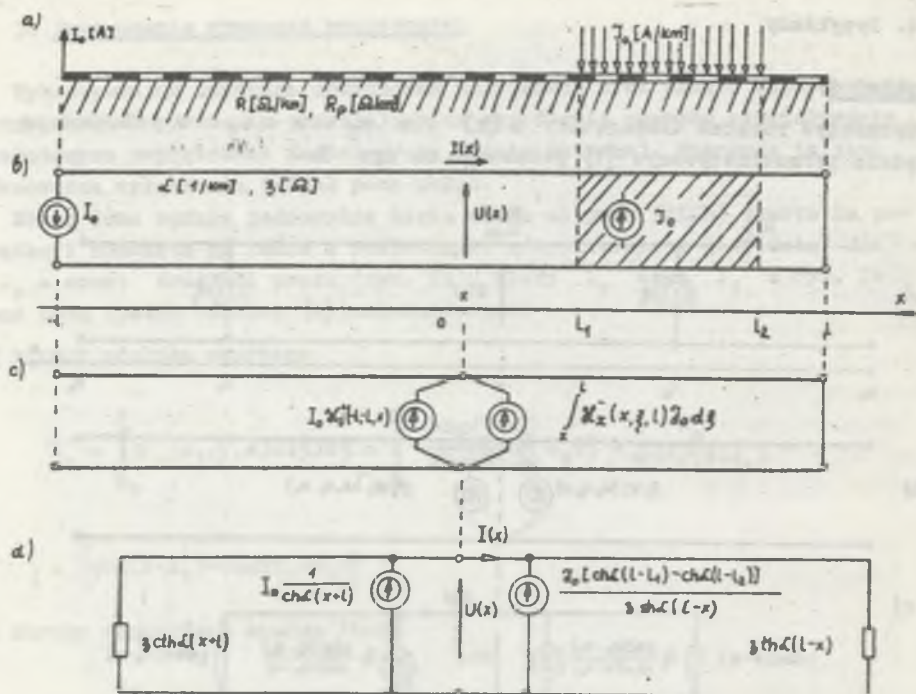
Po zastosowaniu procedury przesuwania źródeł otrzymany równoważny (za względu na zjawiska w miejscu x) układ podany na rys. 3b.

Po zastąpieniu odcinków linii ich impedancjami wejściowymi otrzymamy obwód (rys. 3c), skąd:

$$\Theta(x) = \frac{P_2 \text{ch} \alpha(x_2-x_1) \text{ch} \alpha(x_4-x) + P_3 \text{ch} \alpha(x_4-x_3) \text{ch} \alpha(x-x_1)}{\text{sh} \alpha(x_4-x_1)}$$

Przykład 2

Na rys. 4a przedstawiono rozpyły prądu w szynach pewnej trakcji elektrycznej prądu stałego (o jednostkowej rezystancji wzdłużnej szyn R i następnej rezystancji przejścia szyny-ziemia R_p).



Rys. 4. Odcinek układu szyny-ziemia pewnej trakcji elektrycznej ze stacją powrotną (dla $x = -1$) oraz z równomiernym dla $l_1 < x < l_2$ okładem prądowym J_0 a), jego model w postaci linii długiej b), jego postać po przetransponowaniu wymuszeń prądowych do miejsca x c) oraz równoważny schemat obwodowy o parametrach skupionych d)

Fig. 4. Section of the rails - earth system of direct - current electric traction with returning point (for $x = -1$) and with uniform electric load (current density J_0) for $l_1 < x < l_2$ (a), its model as RG long line (b), its form after transforming current sources to the place x (c), and its equivalent diagram with lumped parameters (d)

Znaleźć wyrażenia opisujące prąd $I(x)$ w szynach oraz potencjał $\varphi(x)$ szyn względem ziemi dalekiej dla $-1 < x < l_1$.

Rozwiązanie 2

Rozważany układ przedstawić można [2, 3] w postaci linii długiej o parametrach jednostkowych $\alpha = \sqrt{R/R_p}$ i $\beta = \sqrt{R \cdot R_p}$ jak na rys. 4b. Po przetransponowaniu wymuszeń do miejsca obserwacji x (rys. 4c) oraz zastąpieniu odcinków linii ich rezystancjami wejściowymi otrzymamy obwód ukazany na rys. 4d, skąd (patrz również [6]) uzyskamy:

$$I(x) = \frac{A \cdot \operatorname{sh} \alpha(x+1) - I_0 \operatorname{ch} \alpha(1-x)}{\operatorname{ch} 2 \alpha l}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} 2\alpha l} [A \cdot \operatorname{ch} \alpha(x+1) - I_0 \operatorname{sh} \alpha(1-x)]$$

gdzie:

$$A = \operatorname{const} = \frac{J_0}{\alpha} [\operatorname{ch} \alpha(1-l_2) - \operatorname{ch} \alpha(1-l_1)]$$

5. Uwagi końcowe

Zaprezentowana procedura przesuwania źródeł w układach o parametrach rozłożonych RG znacznie upraszcza ich rozwiązywanie. Zalety tej metody są szczególnie widoczne w odniesieniu do układów ze skokową zmianą parametrów charakterystycznych [3].

LITERATURA

- [1] Bartodziej G.: Modele elektrycznych złączy stykowych. ZN Pol. Śl., s. Elektryka, z. 80, Gliwice 82.
- [2] Horst W.: Rozkład potencjału na urządzeniu podziemnym położonym równolegle do torów zelektryfikowanej trakcji prądu stałego w układzie składającym się z odcinków jednorodnych o różnych parametrach elektrycznych. Pr. dokt. Politechnika Poznańska 1980.
- [3] Horst W.: Wykorzystanie procedury elektrycznej zmiany długości linii RG w tworzeniu obwodowego modelu zjawisk w fizycznych układach jednowymiarowych. Poznań 1985 (maszynopis).
- [4] Różański L.: Obwody elektryczne jako modele niektórych zagadnień brzegowych dla fizycznych układów jednowymiarowych. Politechnika Poznańska, S. Rozprawy, Nr 62, Poznań 1974.
- [5] Sibila J.: Określenie rozkładu potencjałów na dwóch metalowych urządzeniach podziemnych położonych równolegle do torów trakcji elektrycznej. Praca doktorska Politechnika Poznańska 1975.
- [6] Strizewski J.W.: Teoria i rachunek drenażowej i katodowej zabezpieczenia magistralnych truboprowadów ot korrozji bluzhdajuszczimi tokami. Moskwa 1963.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Gerard Bartodziej

Wpłynęło do redakcji dn. 15 czerwca 1986 r.

ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ИСТОЧНИКОВ ТОКА ВДОЛЬ ДЛИННОЙ ЛИНИИ RG И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭТОЙ ПРОЦЕДУРЫ В МОДЕЛИРОВАНИИ ЯВЛЕНИЯ В ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМАХ

Р е з ю м е

Математическое описание многих технических проблем заключается в уравнениях активной длинной линии. Это позволяет использовать в их решении математический аппарат применяемый в теории длинной линии, особенно в двухполюсниковом подходе. Этот метод, согласно с теоремой эквивалентного двухполюсника, даёт возможность указать влияние краевых условий, источников тока и параметров цепи на явления в любом месте физической системы.

В настоящей работе представлена возможность развития этого метода используя процедуру перемещения, вдоль длинной линии, сосредоточенных и распределённых источников тока. Эта процедура позволяет на значительное упрощение конструирования цепной модели явлений. Возможности использования введённой процедуры представляют помещённые примеры.

DISPLACEMENT OF CURRENT SOURCES IN RG - TRANSMISSION LINES AND ITS APPLICATION TO MODELING PHENOMENA IN ONE - DIMENSIONAL SYSTEMS

S u m m a r y

Mathematical description of many technical problems are given by the equations of the active long line. One can notice that these problems can be solved by using the theory of long lines especially active two-terminal networks approach. That method, corresponding to the equivalent two-terminal theory, enables to show the influence of boundary conditions, input signals and system parameters on the described phenomenon at any point of the system.

The paper presents the possibility to extend the above method by making use of the displacement of distributed and lumped current sources along the RG-line. This simplifies the construction of the network model, and the solution of one-dimensional boundary problems. The possible applications are illustrated by several examples.