

Stefan MAKOSZ

OBLICZANIE PŁYT NA MODELU ZASTĘPCZEGO RUSZTU

Streszczenie. W artykule przedstawiono sposób obliczania płyt o zarysie prostokątnym, wykonanych z materiału liniowo-sprężystego na zastępczym modelu rusztowym. Potrzebne obliczenia przeprowadzono na Odrze 1204. Otrzymane wartości wielkości wewnętrznych i ugięć zestawiono w tablicach i porównano ze znanymi rozwiązaniami z literatury.

1. WSTĘP

Znanych jest wiele sposobów rozwiązywania problemu obliczania cienkich płyt. Tylko w nielicznych przypadkach jest możliwe określenie rozwiązania ścisłego, spełniającego równanie różniczkowe płyty oraz warunki brzegowe określone przez obciążenie i sposób podparcia. Większość metod obliczania płyt prowadzi do rozwiązań przybliżonych.

W niniejszej pracy omówiono sposób obliczania płyt o zarysie prostokątnym, wykonanych z materiału liniowo-sprężystego na modelu zastępczego rusztu prętowego. Potrzebne obliczenia przeprowadzono na Odrze 1204 korzystając z programu rusztowego RUN 7G pakietu PROBUS.

Zastosowany sposób analizy płyt na modelu rusztowym ma tę dogodność, że pozwala na stosunkowo proste obliczenia płyt poddanych wymuszeniom kinematycznym występującym w przypadkach np. lokalizacji ustrojów płytowo-słupowych na terenach podlegających wpływom eksploatacji górniczej. Zagadnienie analizy oddziaływania tego rodzaju wpływu na płyty stropowe będzie tematem niezależnej pracy.

2. SPOSÓB OKREŚLANIA PRAMETRÓW GEOMETRYCZNYCH ZASTĘPCZEGO MODELU RUSZTOWEGO

Podstawy zagadnienia analizy statycznej prostokątnych płyt na zastępczym modelu płaskiego rusztu zostały przedstawione w pracy [2]. Rozwiązanie szczegółowe tego zagadnienia zostało częściowo przeprowadzone w pracy [5]. Autorzy tego opracowania przedstawili sposób określania charakterystyk geometrycznych rusztu zastępczego dla płyty izotropowej oraz dla płyty ortotropowej. Do rozważań przyjęto ruszt płaski o jednakowej szerokości i wysokości przekrojów poprzecznych belek rusztowych ułożonych wzdłuż

kierunków osi x i y , a ponadto przy aproksymacji płyty izotropowej założono siatkę prętów o oczkach kwadratowych.

W niniejszej pracy przedstawiono model obliczeniowy płyty prostokątnej w postaci płaskiego rusztu prętowego przy zastosowaniu siatki rusztu o oczkach prostokątnych oraz o prętach, których wymiary poprzeczne są zróżnicowane. Za podstawowe kryterium aproksymacji płyty rusztem płaskim przyjęto odpowiednią zgodność odkształceń obu tych ustrojów.

Równanie różniczkowe powierzchni odkształconej płyty ortotropowej ma postać [3]:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 D_1 + 2 D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q, \quad (1a)$$

gdzie:

$$D_x = \frac{E'_x h^3}{12}; \quad D_y = \frac{E'_y \cdot h^3}{12}; \quad D_1 = \frac{E'' h^3}{12}; \quad D_{xy} = \frac{Gh^3}{12}. \quad (1b)$$

Dla płyty izotropowej

$$E'_x = E'_y = \frac{E}{1 - \nu^2}; \quad E'' = \frac{\nu \cdot E}{1 - \nu^2}; \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (1c)$$

gdzie:

E, ν - stałe sprężystości materiału.

Równanie różniczkowe powierzchni odkształconej płaskiego rusztu utworzonego przez ortogonalny układ prętów, równoległych do osi x i y ma postać [2], [4]:

$$\frac{B_1}{a_1} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(\frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{B_2}{a_2} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q, \quad (2)$$

gdzie: B_1 i B_2 oznaczają sztywności na zginanie prętowych elementów rusztu, c_1 i c_2 zaś ich sztywności na skręcanie. Indeks "1" przypisuje się prętom równoległym do osi x , indeks "2" zaś równoległym do osi y . Rozstaw prętów równoległych do osi x oznaczono przez a_1 , równoległych do osi y przez a_2 .

Przyrównując odpowiednie współczynniki równań różniczkowych (1a) i (2), otrzymuje się układ trzech równań:

$$D_x \cdot a_1 = B_1, \quad (3a)$$

$$D_y \cdot a_2 = B_2 \quad (3b)$$

$$2(D_1 + 2 D_{xy}) = \frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} \quad (3c)$$

Przy założeniu prostokątnych przekrojów poprzecznych dla prętów rusztu, B_1 i B_2 oraz c_1 i c_2 określone są w następujący sposób:

$$B_1 = E \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12}, \quad B_2 = E \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12}, \quad (4a)$$

$$c_1 = G \cdot \beta \left(\frac{b_1}{h_1}\right) \cdot h_1^4 \quad \text{dla } b > h, \quad (4b)$$

$$c_2 = G \cdot \beta \left(\frac{b_2}{h_2}\right) \cdot h_2^4$$

oraz

$$c_1 = G \cdot \beta \left(\frac{h_1}{b_1}\right) \cdot b_1^4 \quad \text{dla } h > b, \quad (4c)$$

$$c_2 = G \cdot \beta \left(\frac{h_2}{b_2}\right) \cdot b_2^4$$

gdzie:

h - wysokość prętów rusztu,

b - szerokość przekroju prętów rusztu,

β - współczynnik zależny od stosunku dłuższego boku przekroju poprzecznego do krótszego.

Rozwiązując układ równań (3), uwzględniając wyrażenia (4), otrzymujemy równanie rozwiązujące zagadnienie aproksymacji płyty płaskim rusztem.

Dla płyty ortotropowej:

$$\frac{E}{6G}(D_1 + 2D_{xy}) = D_x \frac{\beta \left(\frac{h_1}{b_1}\right)}{\left(\frac{b_1}{h_1}\right)^3} + D_y \frac{\beta \left(\frac{h_2}{b_2}\right)}{\left(\frac{b_2}{h_2}\right)^3} \quad \text{dla } \frac{h}{b} > 1 \quad (5)$$

$$\frac{E}{6G}(D_1 + 2D_{xy}) = D_x \frac{\beta(\frac{b_1}{h_1})}{\frac{b_1}{h_1}} + D_y \frac{\beta(\frac{b_2}{h_2})}{\frac{b_2}{h_2}} \quad \text{dla } \frac{h}{b} < 1. \quad (5a)$$

Dla płyty izotropowej:

$$\frac{E}{6G} = \frac{\beta(\frac{h_1}{b_1})}{\frac{h_1}{b_1}} + \frac{\beta(\frac{h_2}{b_2})}{\frac{h_2}{b_2}} \quad \text{dla } \frac{h}{b} > 1. \quad (6)$$

$$\frac{E}{6G} = \frac{\beta(\frac{b_1}{h_1})}{\frac{b_1}{h_1}} + \frac{\beta(\frac{b_2}{h_2})}{\frac{b_2}{h_2}} \quad \text{dla } \frac{h}{b} < 1. \quad (6a)$$

Z równań (5) i (6) metodą prób można wyznaczyć stosunki $\frac{b_1}{h_1}$ i $\frac{b_2}{h_2}$.

W dalszej kolejności można obliczyć wymiary przekroju poprzecznego prętów jednego i drugiego kierunku:

$$h_1 = \sqrt[4]{\frac{12D_x \cdot a_1}{E \cdot \frac{b_1}{h_1}}} \quad (7)$$

$$b_1 = \frac{b_1}{h_1} \cdot h_1$$

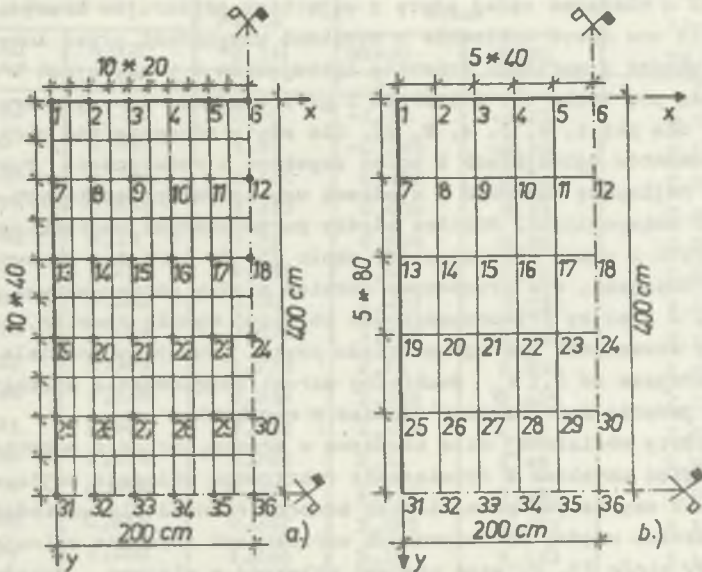
W podobny sposób oblicza się h_2 i b_2 .

3. PRZYKŁADY OBLICZEŃ

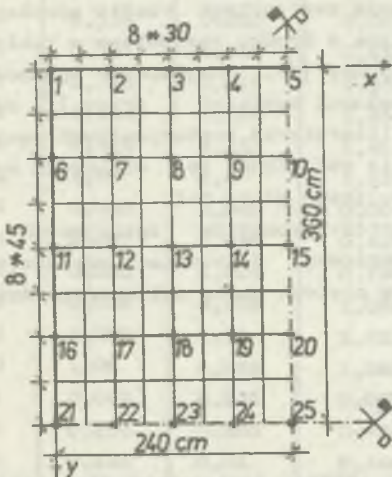
W przypadku analizowania ustroju ciągłego na modelu dyskretnym, jak to ma miejsce w niniejszej pracy, dokładność uzyskiwanych wyników zależy od stopnia zagęszczenia przyjętego ustroju zastępczego, czyli od gęstości siatki rusztu jak również od tego, czy obciążenie ma charakter ciągły, czy też nieciągły. Dla zbadania efektywności zastępczego modelu rusztowego przeanalizowano przypadek prostokątnej płyty podpartej punktowo w narożach, obciążonej równomiernie lub centralnie umieszczoną siłą skupioną. Zastos-

wano przy tym dla płyty równomiernie obciążonej dwie różne gęstości siatki prętów rusztu.

W rozważaniach przyjęto płyty izotropowe o grubości 20 cm i module sprężystości $E = 18 \text{ GPa}$. Obliczenia przeprowadzono dla następujących przypadków.



Rys. 1. Ruszt zastępczy dla płyty P-1 obciążonej równomiernie $q = 10 \text{ kN/m}^2$
 a) siatka prętów o oczkach $40 \times 20 \text{ cm}$, b) siatka prętów o oczkach $80 \times 40 \text{ cm}$



Rys. 2. Ruszt zastępczy dla płyty P-2 obciążonej siłą skupioną w środku $P = 10 \text{ kN}$. Siatka prętów o oczkach $45 \times 30 \text{ cm}$

1. Płyta P-1 o wymiarach $8,0 \times 4,0 \text{ m}$, obciążona równomiernie na całej powierzchni.

Aproksymacje płyty przeprowadzono przy zastosowaniu dwóch wariantów rusztu zastępczego:

- a) siatka prętów o oczkach $40 \times 20 \text{ cm}$ (rys. 1a),
- b) siatka prętów o oczkach $80 \times 40 \text{ cm}$ (rys. 1b).

2. Płyta P-2 o wymiarach $7,2 \times 4,8 \text{ m}$, obciążoną jednostkową siłą skupioną w środku.

Aproksymację płyty przeprowadzono na ruszcie zastępczym o oczkach $45 \times 30 \text{ cm}$ (rys. 2).

Otrzymane wartości momentów zginających i ugięć dla płyt prostokątnych otrzymanych w wyniku rozwiązania zastępczych układów rusztowych zestawiono w tablicach 1, 2, 3. Dla oceny dokładności uzyskanych wyników porównywano je z rozwiązaniami znanymi z literatury [1], [3].

Analiza otrzymanych wartości momentów zginających i ugięć pozwala stwierdzić, że w obciążeniu całej płyty z wyjątkiem przekrojów krawędziowych zgadzają się one dosyć dokładnie z wynikami uzyskanymi przez innych autorów. Jeżeli chodzi o wartości momentów zginających w przekrojach krawędziowych, to różnią się tylko te, o których z góry wiadomo, że mają wartość zerową (np. M_y dla pkt 1, 2, 3, 4, 5, 6). Dla płyty równomiernie obciążonej wartości momentów zginających i ugięć uzyskane z rozwiązania rusztowego osiągają najlepszą zgodność z wynikami uzyskanymi przez innych autorów dla wartości maksymalnych. Różnice między porównywanymi wartościami momentów zginających i ugięć wynoszą wtedy około 2%. Im wartości momentów zginających są mniejsze, tym procentowe różnice między porównywanymi wynikami są większe. Z analizy przeprowadzonych obliczeń wynika również, że nie ma potrzeby stosowania gęstego podziału płyty, gdyż przy podziale płyty na oczka mniejsze od $0,1 L_y$ dwukrotny wzrost zagęszczenia siatki prętów spowodował jedynie 2-procentowe różnice w wynikach.

Dla płyty obciążonej siłą skupioną w środku, wartości momentów zginających i ugięć uzyskane z rozwiązania rusztowego osiągają najlepszą zgodność z wynikami uzyskanymi przez innych autorów również dla wartości maksymalnych. Różnice między porównywanymi wartościami momentów zginających wynoszą wtedy około 3%. Wyjątek stanowi przekrój w miejscu działania siły, gdzie momenty zginające M_x i M_y różnią się od wartości z pracy [1] średnio o 25%.

Momenty skręcające uzyskane z rozwiązania zastępczego rusztu aproksymującego płytę P-2 obciążonego siłą skupioną w środku zestawiono w tablicy 4 wraz z porównywalnymi wartościami z pracy [1]. Najlepszą zgodność momentów skręcających uzyskano z porównywalnymi wynikami z pracy [1] dla wartości maksymalnych. Z uwagi na brak w literaturze porównywalnych wyników momentów skręcających dla płyty P-1 nie obliczano tej wielkości wewnętrznej dla zastępczego rusztu aproksymującego płytę P-1.

W oparciu o wykazaną pełną zgodność wartości momentów zginających i skręcających otrzymanych z rozwiązania rusztowego z wynikami uzyskanymi przez innych autorów [1] siły poprzeczne w płytach można obliczać ze wzoru:

$$q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}; \quad q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}.$$

Wykazana w niniejszej pracy przydatność ustroju zastępczego dla analizy płyt izotropowych bądź ortotropowych pozwoli autorowi na przeprowadzenie w dalszej kolejności badań analitycznych nad wyznaczeniem sztywności

Tablica 1

Wartości momentów zginających dla płyty P-1 i ruszt zastępczego
obciążonych równomiernie $q = 10 \text{ kN/m}^2$

	M_x [kNm]			M_y [kNm]		
	Ruszt		Płyta wg [1]	Ruszt		Płyta wg [1]
	80x40	40x20		80x40	40x20	
1	2	3	4	5	6	7
1	-1,493	-1,765	0,00	-3,52	-4,23	0,00
2	2,50	2,513	1,93	-0,248	-0,25	0,00
3	3,455	3,293	2,859	0,493	0,345	0,00
4	3,975	3,838	3,453	0,608	0,31	0,00
5	4,266	4,15	3,79	0,608	0,30	0,00
6	4,363	4,25	3,893	0,6	0,29	0,00
7	0,269	0,163	0,00	4,443	4,035	3,648
8	0,978	1,026	0,979	3,313	3,238	3,147
9	1,922	1,931	1,778	2,78	2,835	2,862
10	2,563	2,539	2,334	2,558	2,625	2,715
11	2,921	2,883	2,659	2,468	2,52	2,630
12	3,036	2,993	2,765	2,44	2,49	2,605
13	0,2	0,095	0,00	6,165	5,935	5,816
14	0,589	0,615	0,667	5,565	5,453	5,379
15	1,177	1,208	1,234	5,19	5,143	5,147
16	1,643	1,659	1,659	4,933	4,923	5,296
17	1,934	1,936	1,922	4,783	4,79	4,874
18	2,033	2,03	1,85	4,738	4,745	4,846
19	0,134	0,065	0,00	7,50	7,295	7,349
20	0,397	0,416	0,510	7,088	6,965	6,931
21	0,795	0,819	0,939	6,831	6,748	6,747
22	1,114	1,134	1,264	6,643	6,58	6,606
23	1,319	1,333	1,467	6,525	6,475	6,518
24	1,39	1,4	1,536	6,488	6,44	6,488
25	0,099	0,048	0,00	8,32	8,12	8,275
26	0,297	0,316	0,432	8,014	7,868	7,859
27	0,595	0,621	0,790	7,823	7,703	7,702
28	0,839	0,859	1,061	7,681	7,573	7,584
29	1,002	1,01	1,229	7,586	7,488	7,509
30	1,06	1,063	1,285	7,553	7,46	7,483
31	0,088	0,045	0,00	8,6	8,4	8,573
32	0,264	0,285	0,408	8,325	8,17	8,168
33	0,529	0,56	0,746	8,158	8,02	8,021
34	0,746	0,775	0,998	8,046	7,905	7,909
35	0,9	0,91	1,155	7,985	7,825	7,84
36	1,0	0,955	1,208	7,975	7,8	7,816

Tablica 2

Wartości ugięć dla płyty P-1 i rusztu zastępczego
obciążonych równomiernie $q = 10 \text{ kN/m}^2$

	w [m]				w [m]		
	Ruszt		Płyta wg [1]		Ruszt		Płyta wg [1]
	80x40	40x20			80x40	40x20	
1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,00	0,00	0,00	19	0,03818	0,03784	0,0386
2	0,00201	0,00202	0,00178	20	0,03874	0,03840	0,03858
3	0,00374	0,00371	0,00334	21	0,03925	0,03892	0,03866
4	0,00504	0,00499	0,00452	22	0,03965	0,03932	0,03874
5	0,00585	0,00579	0,00527	23	0,03991	0,03958	0,03883
6	0,00612	0,00606	0,00552	24	0,040	0,03967	0,03887
7	0,015	0,01488	0,01508	25	0,04454	0,04412	0,04507
8	0,01627	0,01615	0,01601	26	0,04496	0,04455	0,04484
9	0,01741	0,01729	0,01688	27	0,04534	0,04494	0,04476
10	0,01831	0,01818	0,01757	28	0,04565	0,04525	0,04472
11	0,01888	0,01874	0,01802	29	0,04586	0,04545	0,04472
12	0,01908	0,01893	0,01817	30	0,04591	0,04552	0,04472
13	0,02809	0,02785	0,02833	31	0,04671	0,04627	0,04727
14	0,02891	0,02867	0,02868	32	0,04709	0,04666	0,047
15	0,02965	0,02942	0,02906	33	0,04743	0,04701	0,04685
16	0,03024	0,03001	0,02939	34	0,04771	0,04729	0,04677
17	0,03062	0,03039	0,02962	35	0,04789	0,04746	0,04675
18	0,03075	0,03052	0,0297	36	0,04795	0,04753	0,04673

Tablica 3

Wartości momentów zginających i skręcających
dla płyty P-2 i rusztu zastępczego obciążonych siłą skupioną
w środku $P = 10,0$ kN

	M_x [kNm]		M_y [kNm]		M_{xy} [kNm]	
	Ruszt	Płyta wg [1]	Ruszt	Płyta wg [1]	Ruszt	Płyta wg [1]
1	2	3	4	5	6	7
1	0,0644	0	0,115	0,00	0,125	0,087
2	0,1	0,0862	0,0117	0,00	0,0	-
3	0,1378	0,1336	0,01	0,00	0,00	-
4	0,1617	0,1606	0,0083	0,00	0,0	-
5	0,17	0,1698	0,0042	0,00	0,0	-
6	0,0078	0,00	0,1417	0,1292	0,0	-
7	0,0547	0,055	0,1058	0,1059	0,046	0,051
8	0,1014	0,1005	0,0879	0,0893	0,029	0,033
9	0,1314	0,1314	0,0771	0,0784	0,013	0,015
10	0,1417	0,1432	0,0733	0,074	0,0	-
11	0,005	0,00	0,2275	0,2209	0,0	-
12	0,0381	0,039	0,2038	0,2029	0,018	0,018
13	0,0808	0,0802	0,1850	0,1856	0,007	0,007
14	0,1172	0,117	0,1688	0,1703	0,002	0,003
15	0,1328	0,1361	0,1608	0,1616	0,0	-
16	0,0017	0,00	0,30	0,2996	0,0	-
17	0,0225	0,0246	0,2913	0,2914	0,002	0,003
18	0,0631	0,0644	0,2854	0,2832	0,023	0,015
19	0,1214	0,1174	0,2717	0,2723	0,021	0,024
20	0,16	0,1682	0,255	0,2571	0,0	-
21	0,00	0,00	0,3317	0,3415	0,0	-
22	0,01222	0,0101	0,3333	0,3457	0,0	-
23	0,0439	0,0428	0,3467	0,3628	0,0	-
24	0,0956	0,1079	0,3942	0,3991	0,0	-
25	0,3478	0,2688	0,5367	0,4438	0,0	-

płyt stropowych ustrojów płytowo-słupowych, narażonych na działanie wpływu krzywizny górniczej. Ustroje płytowo-słupowe będzie można analizować przy wykorzystaniu programów komputerowych służących do obliczania przestrzennych ustrojów prętowych.

LITERATURA

- [1] Ajdukiewicz A., Starosolski W.: Żelbetowe ustroje płytowo-słupowe. PWN, Warszawa 1981.
- [2] Huber M.T.: Pisma tom II. PWN, Warszawa 1956.
- [3] Stiglat K., Wippel H.: Platten. Berlin-München-Düsseldorf 1973.
- [4] Timoshenko S., Wołnowsky-Kreger S.: Teoria płyt i powłok. Arkady, Warszawa 1962.
- [5] Założenia do programu EMC: Obliczanie budynków mieszkalnych na wpływ eksploatacji górniczej. Instytut Konstrukcji Budowlanych, Politechnika Śląska, Gliwice 1972.

ЗАДАЧА РАСЧЕТА ПАНЕЛЕЙ ПРИ ЗАМЕНЯЮЩЕЙ МОДЕЛИ РЕШЕТКИ

Резюме

В статье представлены расчёты плит прямоугольной формы из линейно-упругих материалов на заменяющей модели жёсткого роотверка.

Все необходимые расчёты были произведены на вычислительной машине Одра 1204. Полученные значения внутренних величин и прогибов даются в таблицах и сравниваются с существующими в технической литературе расчётами.

CALCUTIONS OF PLATES USING A SUBSTITUTIONAL GRATE MODEL

Summary

In this paper a calculation method for rectangular, linear-resilience concrete plates is described. This method uses a substitutional grate model. All calculations are made using "Odra 1204" computer. Calculations of internal variables and deflections are specified and compared with others solutions known from literature.