

Adam RÓŻYCKI

ANALITYCZNE WYZNACZANIE PRZEBIEGÓW TEMPERATURY  
W MASZYNIE ELEKTRYCZNEJ PRZY ZMIENNYM OBCIĄŻENIU

**Streszczenie.** Badania nad przeciążalnością maszyn elektrycznych i poszukiwanie nowego zabezpieczenia przeciążeniowego, działającego na zasadzie symulacji cyfrowej zjawisk cieplnych, wymagało opracowania analitycznej metody wyznaczania przebiegów cieplnych przy zmiennym obciążeniu silnika. Wyznaczono charakterystykę  $\psi(t)$  dla kilku wybranych przypadków wymuszeń strat w uzwojeniu maszyny elektrycznej, traktowanej jako układ jednego węzła cieplnego. Wyznaczono również ściśle metodą analityczną charakterystykę nagrzewania maszyny elektrycznej, dla której przyjęto cieplny schemat zastępczy składający się z dwu węzłów cieplnych. Założono liniowe wymuszenie strat mocy w węzłach. Wyniki obliczeniowe sprawdzono z pomiarami na modelu fizycznym uzwojenia.

### 1. Wstęp

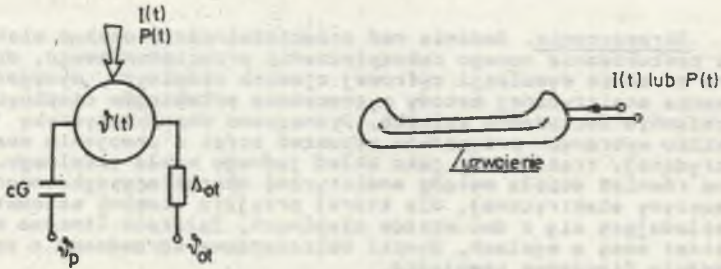
Maszyny elektryczne a zwłaszcza silniki złożonych układów napędowych stosunkowo rzadko pracują przy stałym obciążeniu w stanie cieplnie ustalonym. W warunkach eksploatacyjnych obciążenie silnika może się zmieniać nieregularnie, co ma miejsce np. podczas rozruchu, przeciążeń, hamowania itp. W tych przypadkach silnik pracuje w stanie cieplnie nieustalonym i niezbędne jest wyznaczenie wartości temperatur, które w pewnych odcinkach czasu mogą przekraczać wartości dopuszczalne. Na ogół, najbardziej narażone cieplnie są uzwojenia w których wydzielająca się moc strat może spowodować znaczne skrócenie żywotności izolacji, a nawet doprowadzić do uszkodzenia silnika.

Śledzenie zmian temperatury uzwojeń w takt zmian obciążenia może być przydatne już przy doborze silnika podczas projektowania układu napędowego. W uproszczonych obliczeniach traktuje się wtedy silnik, jako ciało jednorodne o skupionym źródle ciepła, przy znanych wartościach pojemności cieplnej  $cG$  oraz przewodności cieplnej  $\Lambda_{ot}$  dla ruchu ciepła z silnika do otoczenia, o znanej temperaturze  $\psi_{ot}$ . Można również silnik lub wybrany jego fragment zastąpić schematem cieplnym składającym się z dwu węzłów cieplnych, w których wydzielająca się moc strat podana jest zależnością analityczną  $P(t)$ . Moc strat można również obliczyć z zadanych wymuszeń prądowych  $I(t)$  jako  $P(t) = I^2(t)R_{gr}$  lub  $P(t) = I^2(t)R_0[1 + \alpha\psi(t)]$ .

Czasowy przebieg temperatury otrzymuje się wtedy jako wynik rozwiązania jednego ( $n = 1$ ) lub dwu ( $n = 2$ ) równań różniczkowych, opisujących stan cieplnie nieustalony w wybranych węzłach silnika elektrycznego.

## 2. Nagrzewanie silnika elektrycznego traktowanego jako jeden węzeł cieplny

Dla silnika elektrycznego lub wybranego węzła cieplnego, np. uzwojenia obowiązuje cieplny schemat zastępczy przedstawiony na rys. 1. W węźle tym



Rys. 1. Ciepły schemat zastępczy maszyny elektrycznej składający się z jednego węzła cieplnego

Fig. 1. Equivalent thermal diagram of the electric machine consisting of one thermal centre

może wydzielać się stała moc strat  $P = \text{const}$  (wykres I rys. 2), moc strat zależna od zmian rezystancji uzwojeń z temperaturą  $P(t) = P_0 [1 + \alpha \psi(t)]$ , gdzie  $P_0 = I^2 R_0$  przy  $I = \text{const}$  (wykres II rys. 2) lub moc strat  $P(t) = I^2(t) R_{\delta r}$  wynikająca z czasowego przebiegu prądu określonego funkcją  $I(t)$  (wykresy III-XII rys. 2). Wykresy (III-X rys. 2) obowiązują również dla narzuconych wymuszeń strat mocy  $P(t)$  w węźle cieplnym maszyny.

Dla maszyny elektrycznej zastępowanej układem jednego ciała obowiązuje zgodnie z rys. 1 prawo zachowania energii:

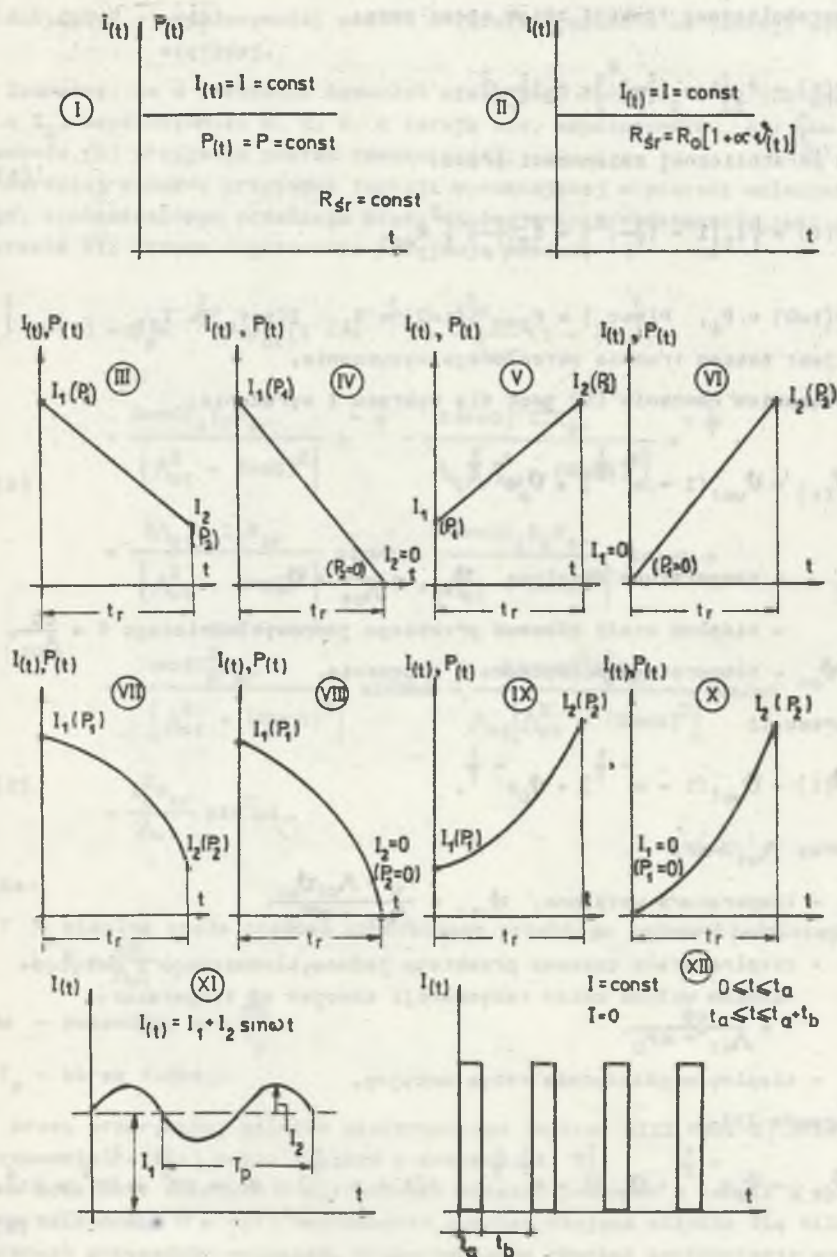
$$cG d\psi(t) + \Lambda_{ot} [\psi(t) - \psi_{ot}] dt = P(t) dt, \quad (1)$$

gdzie funkcja wymuszająca  $P(t)$  dla liniowych zmian strat mocy przyjmuje postać:

$$P(t) = P_1 \left[ 1 - \left( \frac{t}{\tau_r} \right) \right] + P_2 \left( \frac{t}{\tau_r} \right)$$

lub dla liniowej zmienności prądu:

$$P(t) = \left\{ I_1 \left[ 1 - \left( \frac{t}{\tau_r} \right) \right] + I_2 \left( \frac{t}{\tau_r} \right) \right\}^2 R_{\delta r}, \quad (2)$$



Rys. 2. Różne przypadki wymuszeń  $I(t)$  bądź  $P(t)$  w maszynie elektrycznej względnie w wybranym węzle maszyny elektrycznej

Fig. 2. Various cases of constraints of  $I(t)$  or  $P(t)$  in the electric machine or in a chosen centre of the electric machine

a dla parabolicznej funkcji zmian strat mocy:

$$P(t) = P_1 \left[ 1 - \left( \frac{t}{t_r} \right)^2 \right] + P_2 \left( \frac{t}{t_r} \right)^2$$

lub dla parabolicznej zmienności prądu:

$$P(t) = \left\{ I_1 \left[ 1 - \left( \frac{t}{t_r} \right)^2 \right] + I_2 \left( \frac{t}{t_r} \right)^2 \right\}^2 R_{\acute{s}r}, \quad (3)$$

gdzie  $P(t=0) = P_1$ ,  $P(t=t_r) = P_2$ ,  $I(t=0) = I_1$ ,  $I(t=t_r) = I_2$ ,

a  $t_r$  jest czasem trwania określonego wymuszenia.

Rozwiązaniem równania (1) jest dla wykresu I wyrażenie:

$$\psi(t) = \psi_{ust} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) + \psi_p e^{-\frac{t}{T}}, \quad (4)$$

gdzie:

$\psi_{ust}$  - temperatura ustalona,  $\psi_{ust} = \frac{P}{\Lambda_{ot}} + \psi_{ot}$ ,

$T$  - cieplna stała czasowa przebiegu jednowykładniczego  $T = \frac{cG}{\Lambda_{ot}}$ ,

$\psi_p$ ,  $\psi_{ot}$  - temperatura początkowa i otoczenia.

Dla wykresu II

$$\psi(t) = \psi_{ust} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) + \psi_p e^{-\frac{t}{T}}, \quad (5)$$

gdzie przy  $\Lambda_{ot} > \alpha P_0$

$\psi_{ust}$  - temperatura ustalona,  $\psi_{ust} = \frac{P_0 + \Lambda_{ot} \psi_{ot}}{\Lambda_{ot} - \alpha P_0}$ ,

$T$  - cieplna stała czasowa przebiegu jednowykładniczego z uwzględnieniem wpływu zmian rezystancji uzwojeń od temperatury

$$T = \frac{cG}{\Lambda_{ot} - \alpha P_0},$$

$\alpha$  - cieplny współczynnik rezystancyjny.

Dla wykresów III-X

$$\psi(t) = \psi_p e^{-\frac{t}{T}} + \psi_{ot} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) + A \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4, \quad (6)$$

gdzie:

$T$  - cieplna stała czasowa cząstkowego przebiegu jednowykładniczego,

$$T = \frac{cG}{\Lambda_{ot}},$$

A, B, C, D, E - współczynniki podane w tabeli I zależne od funkcji wymuszającej.

Zauważmy, że w przypadku wymuszeń stałą mocą strat  $P_1 = P_2$  lub gdy  $I_1 = I_2$ , współczynniki B, C, D, E zerują się, współczynnik  $A = \frac{P}{\Lambda_{ot}}$  i równanie (6) przyjmuje postać równania (4).

Bardziej złożony przypadek funkcji wymuszającej w postaci wolnozmiennego, sinusoidalnego przebiegu prądu w uzwojeniu przedstawiony jest na wykresie XI. Krzywa nagrzewania przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \vartheta(t) = & \vartheta_p e^{-\frac{t}{T}} + \vartheta_{ot} (1 - e^{-\frac{t}{T}}) + \frac{I_1^2 R_{\acute{s}r}}{\Lambda_{ot}} (1 - e^{-\frac{t}{T}}) + \\ & + \frac{2\omega c G I_1 I_2 R_{\acute{s}r}}{[\Lambda_{ot}^2 + (\omega c G)^2]} e^{-\frac{t}{T}} - \frac{2(\omega c G)^2 I_2^2 R_{\acute{s}r}}{\Lambda_{ot} [\Lambda_{ot}^2 + (2\omega c G)^2]} e^{-\frac{t}{T}} + \\ & + \frac{2\Lambda_{ot} I_1 I_2 R_{\acute{s}r}}{[\Lambda_{ot}^2 + (\omega c G)^2]} \sin \omega t - \frac{2\omega c G I_1 I_2 R_{\acute{s}r}}{[\Lambda_{ot}^2 + (\omega c G)^2]} \cos \omega t + \\ & - \frac{\omega c G I_2^2 R_{\acute{s}r}}{[\Lambda_{ot}^2 + (2\omega c G)^2]} \sin 2\omega t + \frac{2(\omega c G)^2 I_2^2 R_{\acute{s}r}}{\Lambda_{ot} [\Lambda_{ot}^2 + (2\omega c G)^2]} \cos 2\omega t \\ & + \frac{I_2^2 R_{\acute{s}r}}{\Lambda_{ot}} \sin^2 \omega t, \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie:

T - cieplna stała czasowa cząstkowego przebiegu jednowykładniczego,

$$T = \frac{cG}{\Lambda_{ot}},$$

$\omega$  - pulsacja,  $\omega = \frac{2\pi}{T_p}$ ,

$T_p$  - okres funkcji.

Dla pracy przerywanej silnika elektrycznego (wykres XIII rys. 2) przebieg nagrzewania  $\vartheta = f(t)$  można znaleźć w pracach [1, 2].

Na podstawie ścisłych analitycznych wyrażeń podanych w tabeli I wyznaczono zależności  $\vartheta = f(t)$  nagrzewania uzwojeń stojana silnika dla kilku wybranych przypadków wymuszeń. Przeprowadzono również konfrontację wyników obliczeniowych z pomiarami na modelu fizycznym uzwojenia stojana silnika indukcyjnego. Zasilanie uzwojeń prądem stałym pozwoliło na dokonanie, stosunkowo prostymi środkami, dowolnych wymuszeń strat mocy w uzwojeniu według zadanego czasowego przebiegu prądu obciążenia i wyznaczenie

Tabela I

Zależności do obliczenia współczynników A, B, C, D, E  
dla różnych wymuszeń strat

## Wykresy III-VI

$$P(t) = P_1 \left[ 1 - \left( \frac{t}{t_r} \right) \right] + P_2 \left( \frac{t}{t_r} \right) \quad A = \frac{P_1}{\Lambda_{ot}} \left[ 1 + \left( \frac{P_1 - P_2}{P_1} \right) \left( \frac{T}{t_r} \right) \right] \quad B = - \frac{(P_1 - P_2)}{\Lambda_{ot} t_r}$$

$$I(t) = I_1 \left[ 1 - \left( \frac{t}{t_r} \right) \right] + I_2 \left( \frac{t}{t_r} \right) \quad A = \frac{I_1^2 R_{sr}}{\Lambda_{ot}} \left[ 1 + 2 \left( \frac{I_1 - I_2}{I_1} \right) \left( \frac{T}{t_r} \right) + 2 \left( \frac{I_1 - I_2}{I_1} \right)^2 \left( \frac{T}{t_r} \right)^2 \right]$$

$$B = - \frac{2 I_1^2 R_{sr}}{\Lambda_{ot} t_r} \left[ \left( \frac{I_1 - I_2}{I_1} \right) + \left( \frac{I_1 - I_2}{I_1} \right)^2 \left( \frac{T}{t_r} \right) \right]$$

$$C = \frac{(I_1 - I_2)^2 R_{sr}}{\Lambda_{ot} t_r^2}$$

## Wykresy VII-X

$$P(t) = P_1 \left[ 1 - \left( \frac{t}{t_r} \right)^2 \right] + P_2 \left( \frac{t}{t_r} \right)^2 \quad A = \frac{P_1}{\Lambda_{ot}} \left[ 1 - 2 \left( \frac{P_1 - P_2}{P_1} \right) \left( \frac{T}{t_r} \right)^2 \right]$$

$$B = \frac{2(P_1 - P_2)}{\Lambda_{ot} t_r} \left( \frac{T}{t_r} \right) \quad C = \frac{(P_1 - P_2)}{\Lambda_{ot} t_r^2}$$

$$I(t) = I_1 \left[ 1 - \left( \frac{t}{t_r} \right)^2 \right] + I_2 \left( \frac{t}{t_r} \right)^2 \quad A = \frac{I_1^2 R_{sr}}{\Lambda_{ot}} \left[ 1 + 24 \left( \frac{I_1 - I_2}{I_1} \right)^2 \left( \frac{T}{t_r} \right)^4 - 4 \left( \frac{I_1 - I_2}{I_1} \right) \left( \frac{T}{t_r} \right)^2 \right]$$

$$B = \frac{-4(I_1 - I_2)^2 R_{sr}}{\Lambda_{ot} t_r} \left[ 6 \left( \frac{T}{t_r} \right)^3 - \left( \frac{I_1 - I_2}{I_1 - I_2} \right) \left( \frac{T}{t_r} \right) \right]$$

$$C = \frac{2(I_1 - I_2)^2 R_{sr}}{\Lambda_{ot} t_r^2} \left[ 6 \left( \frac{T}{t_r} \right)^2 - \left( \frac{I_1 - I_2}{I_1 - I_2} \right) \left( \frac{T}{t_r} \right) \right]$$

$$D = - \frac{4(I_1 - I_2)^2 R_{sr}}{\Lambda_{ot} t_r^3} \left( \frac{T}{t_r} \right)^3$$

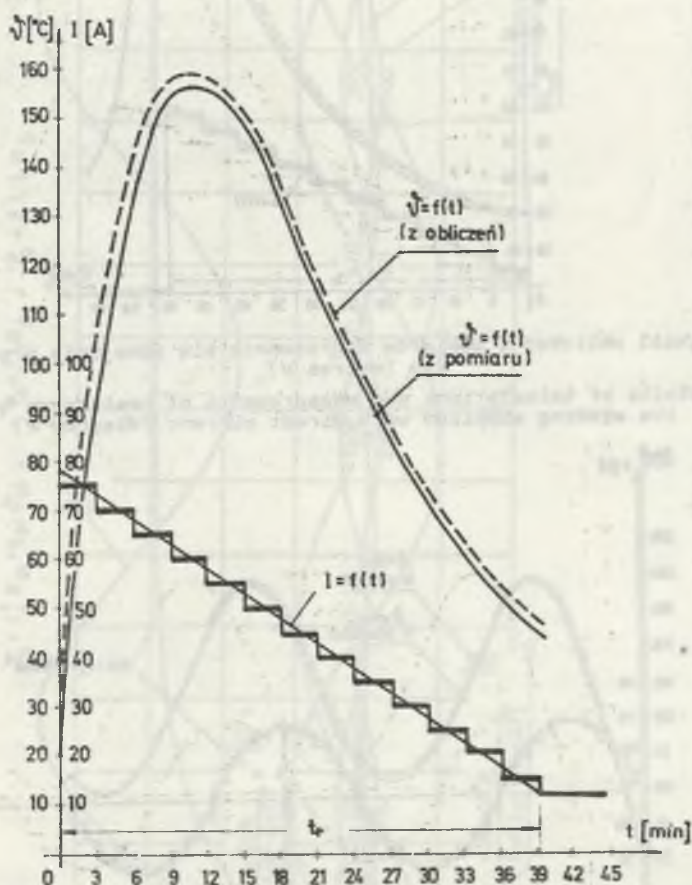
$$E = \frac{(I_1 - I_2)^2 R_{sr}}{\Lambda_{ot} t_r^4}$$

$$\text{gdzie } T = \frac{c\theta}{\Lambda_{ot}}$$

temperatury uzwojenia przez ciągły pomiar temperatury czujnikami termoelektrycznymi.

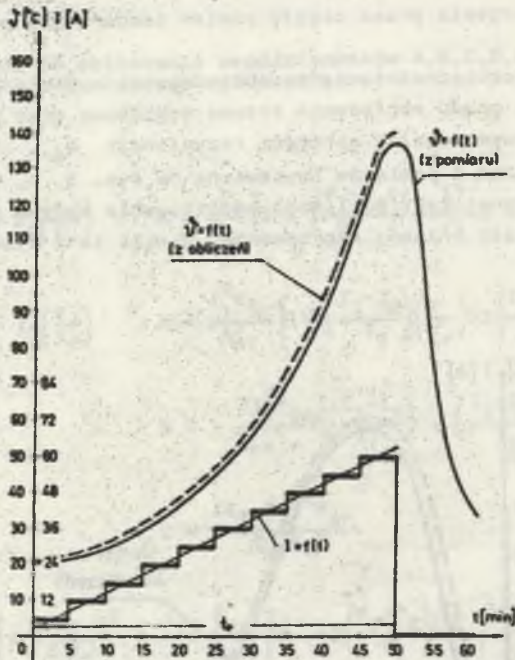
Niewielkie rozbieżności między obliczeniami a pomiarami były spowodowane aproksymacją prądu obciążenia krzywą schodkową oraz przyjęciem we wzorach obliczeniowych stałej wartości rezystancji  $R_{\delta r}$ .

Wyniki obliczeń i pomiarów zestawiono na rys. 3, 4, 5. Zaletą ścisłej metody analitycznej jest możliwość analizowania wpływu wymuszeń mocy na ostateczny kształt krzywej nagrzewania. Wyniki to z wykresu rys. 6.



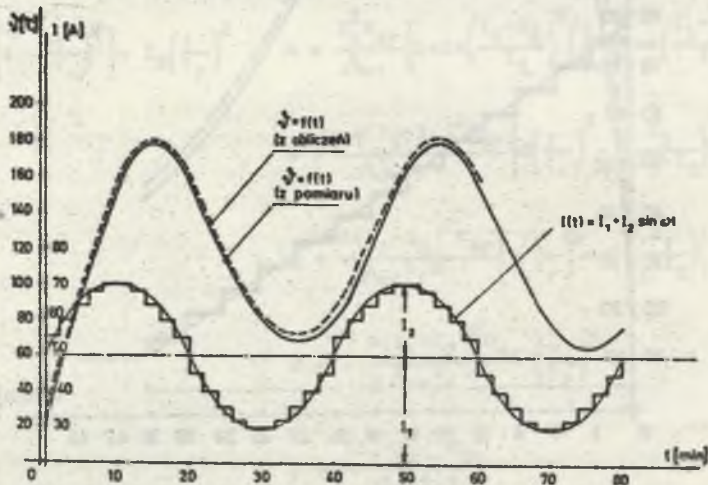
Rys. 3. Wyniki pomiarów i obliczeń nagrzewania się uzwojenia prądem stałym (wykres III)

Fig. 3. Results of measurements and calculations of resistance heating of the winding supplied with direct current (diagram III)



Rys. 4. Wyniki obliczeń i pomiarów nagrzewania się uzwojenia prądem stałym (wykres V)

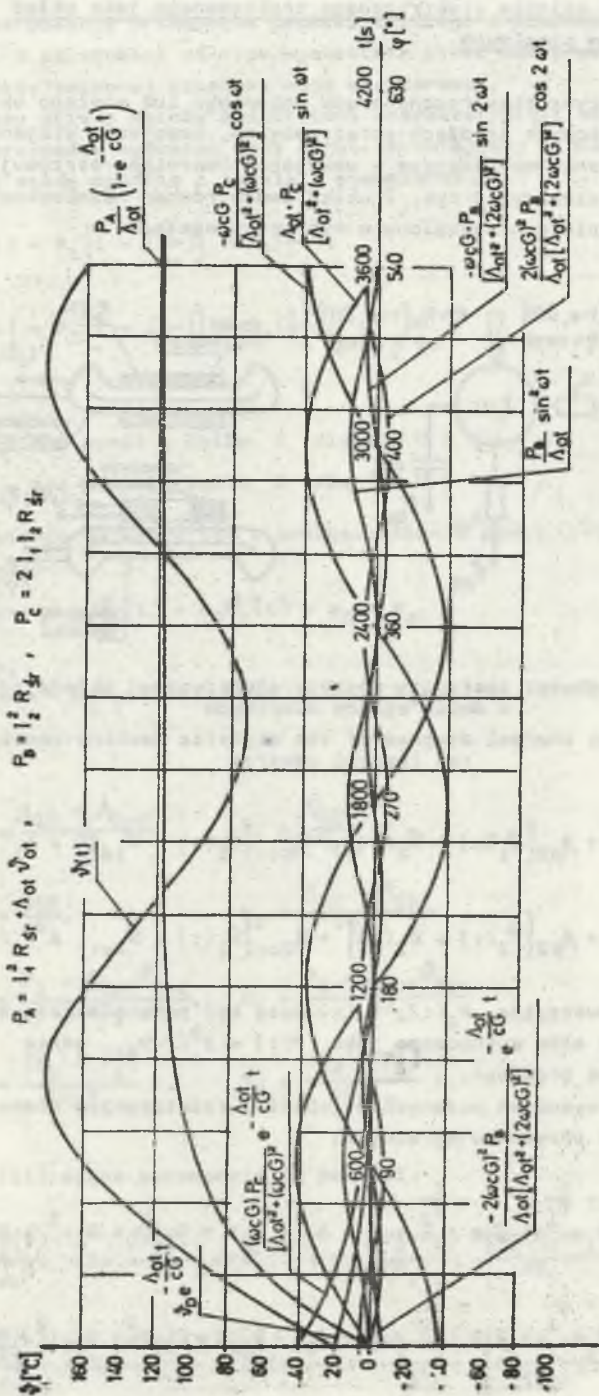
Fig. 4. Results of calculations and measurements of resistance heating of the winding supplied with direct current (diagram V)



Rys. 5. Wyniki obliczeń i pomiarów nagrzewania się uzwojenia zasilanego wolnozmiennym prądem  $I(t)$  (wykres XI)

Fig. 5. Results of calculations and measurements of resistance heating of the winding supplied with slow - alternating current  $I(t)$  (diagram XI)

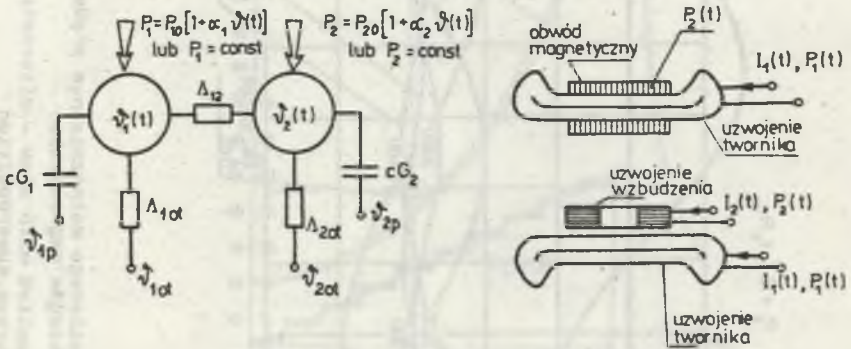




Rys. 6. Wypadkowy przebieg nagrzewania  $\psi(t)$  uzwojenia zealowanego wolnozmiennym prądem superpozycji częstotliwości przebiegów nagrzewania  
 Fig. 5. Resultant course of heating  $\psi(t)$  of the winding supplied with slow - alternating current  $I(t)$  as a result of partial heating courses superposition

### 3. Nagrzewanie silnika elektrycznego traktowanego jako układ dwóch węzłów cieplnych

Zastępując maszynę elektryczną prądu zmiennego lub stałego układem dwóch ciał o skupionych źródłach strat mocy np. uzwojenie stojana-żelazo stojana lub uzwojenie wzbudzające - uzwojenie twornika, otrzymujemy zgodnie ze schematem cieplnym z rys. 7 układ dwóch równań różniczkowych, opisujących stan cieplnie nieustalony w wybranych węzłach:



Rys. 7. Ciepły schemat zastępczy maszyny elektrycznej składający się z dwóch węzłów cieplnych

Fig. 7. Equivalent thermal diagram of the electric machine consisting of two thermal centres

$$cG_1 \frac{d\vartheta_1(t)}{dt} + \Lambda_{12}[\vartheta_1(t) - \vartheta_2(t)] + \Lambda_{10t}[\vartheta_1(t) - \vartheta_{10t}] = P_1(t) \quad (8)$$

$$cG_2 \frac{d\vartheta_2(t)}{dt} + \Lambda_{12}[\vartheta_2(t) - \vartheta_1(t)] + \Lambda_{20t}[\vartheta_2(t) - \vartheta_{20t}] = P_2(t)$$

gdzie funkcja wymuszająca  $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$  może być podana określonym wyrażeniem analitycznym albo wyznaczona jako  $P(t) = I^2(t)R_{sr}$ , gdzie  $I(t)$  jest znanym wymuszeniem prądowym.

Dla przypadku wymuszeń podanych w tabeli I rozwiązaniem równań (8) są w najogólniejszym przypadku wyrażenia:

$$\vartheta_1(t) = C_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + C_2 e^{-\frac{t}{T_2}} + \frac{s}{r} + A_I + B_I t + C_I t^2 + D_I t^3 + E_I t^4$$

$$\vartheta_2(t) = C_3 e^{-\frac{t}{T_1}} + C_4 e^{-\frac{t}{T_2}} + \frac{w}{r} + A_{II} + B_{II} t + C_{II} t^2 + D_{II} t^3 + E_{II} t^4 \quad (9)$$

będące superpozycją przebiegów dwuwykładniczego i wielomianu stopnia czwartego. W zależności od typu wymuszenia strat lub prądu pewne współczynniki przy zmiennej czasowej mogą się zerować.

Wyznamy ścisłą metodą analityczną charakterystyki nagrzewania  $\vartheta_1(t)$ ,  $\vartheta_2(t)$  w przypadku wymuszeń mocy strat narastającej liniowo z czasem. Obowiązują wtedy zgodnie z tabelą I wymuszenia:

$$P_1(t) = P_1 \left[ 1 - \left( \frac{t}{t_r} \right) \right] + P_2 \left( \frac{t}{t_r} \right),$$

$$P_2(t) = P_3 \left[ 1 - \left( \frac{t}{t_r} \right) \right] + P_4 \left( \frac{t}{t_r} \right),$$
(10)

gdzie:

$P_1, P_2$  - moc strat w węźle 1 dla  $t = 0$  i  $t = t_r$ ,

$P_3, P_4$  - moc strat w węźle 2 dla  $t = 0$  i  $t = t_r$ .

Po podstawieniu do wzoru (8) i przekształceniu mamy:

$$\frac{d\vartheta_1(t)}{dt} + a_1 \vartheta_1(t) - a_2 \vartheta_2(t) = a_3 + a_4,$$

$$\frac{d\vartheta_2(t)}{dt} - b_1 \vartheta_1(t) + b_2 \vartheta_2(t) = b_3 + b_4,$$
(11)

gdzie:

$$a_1 = \frac{\Lambda_{12} + \Lambda_{10t}}{cG_1}, \quad b_1 = \frac{\Lambda_{12}}{cG_2},$$

$$a_2 = \frac{\Lambda_{12}}{cG_1}, \quad b_2 = \frac{\Lambda_{12} + \Lambda_{20t}}{cG_2},$$

$$a_3 = \frac{P_1 + \Lambda_{10t} \vartheta_{10t}}{cG_1}, \quad b_3 = \frac{P_3 + \Lambda_{20t} \vartheta_{20t}}{cG_2},$$

$$a_4 = \frac{(P_2 - P_1)}{cG_1 t_r} t, \quad b_4 = \frac{(P_4 - P_3)}{cG_2 t_r} t.$$

Równanie (11) można sprowadzić do postaci:

$$\frac{d^2 \vartheta_1(t)}{dt^2} + 2p \frac{d\vartheta_1(t)}{dt} + r \vartheta_1(t) = w + \frac{(P_2 - P_1)}{cG_1 t_r} + \left[ \frac{b_2(P_2 - P_1)}{cG_1} + \frac{a_2(P_4 - P_3)}{cG_2} \right] \frac{t}{t_r}$$

$$\frac{d^2 \vartheta_2(t)}{dt^2} + 2p \frac{d\vartheta_2(t)}{dt} + r \vartheta_2(t) = w + \frac{(P_4 - P_3)}{cG_2 t_r} + \left[ \frac{b_1(P_2 - P_1)}{cG_2} + \frac{a_1(P_4 - P_3)}{cG_2} \right] \frac{t}{t_r}$$
(12)

Tabela II

Zależności do obliczenia współczynników  $A_I, A_{II}, B_I, B_{II}, C_1, C_2, C_3, C_4$  dla liniowych wymuszeń mocy strat  $P_1(t), P_2(t)$  zgodnie z wykresem na rys. 8

$$A_I = \frac{(P_2 - P_1)}{cG_1 r^2 t_r} (r - 2pb_2) - \frac{2(P_4 - P_3)pa_2}{cG_2 r^2 t_r}$$

$$A_{II} = -\frac{2(P_2 - P_1)pb_1}{cG_1 r^2 t_r} + \frac{(P_4 - P_3)}{cG_2 r^2 t_r} (r - 2pa_1)$$

$$B_I = \frac{(P_2 - P_1)b_2}{cG_1 r t_r} + \frac{(P_4 - P_3)a_2}{cG_2 r t_r}$$

$$B_{II} = \frac{(P_2 - P_1)b_1}{cG_1 r t_r} + \frac{(P_4 - P_3)a_1}{cG_2 r t_r}$$

$$C_1 = C_{11} \psi_{1p} + C_{12} \psi_{2p} + C_{13} + C_{14} + C_{15}$$

$$C_2 = C_{21} \psi_{1p} + C_{22} \psi_{2p} + C_{23} + C_{24} + C_{25}$$

$$C_3 = C_{31} \psi_{1p} + C_{32} \psi_{2p} + C_{33} + C_{34} + C_{35}$$

$$C_4 = C_{41} \psi_{1p} + C_{42} \psi_{2p} + C_{43} + C_{44} + C_{45}$$

$$C_{11} = \frac{a_1 - k_2}{k_1 - k_2} \quad C_{12} = -\frac{a_2}{k_1 - k_2} \quad C_{13} = \frac{-(a_3 - k_2 \frac{s}{r})}{k_1 - k_2} \quad C_{21} = \frac{a_1 - k_1}{k_1 - k_2}$$

$$C_{22} = \frac{a_2}{k_1 - k_2} \quad C_{23} = \frac{a_3 - k_1 \frac{s}{r}}{k_1 - k_2} \quad C_{31} = -\frac{b_1}{k_1 - k_2} \quad C_{32} = \frac{b_2 - k_2}{k_1 - k_2}$$

$$C_{33} = -\frac{(b_3 - k_2 \frac{w}{r})}{k_1 - k_2} \quad C_{41} = \frac{b_1}{k_1 - k_2} \quad C_{42} = -\frac{(b_2 - k_1)}{k_1 - k_2} \quad C_{43} = \frac{b_3 - k_1 \frac{w}{r}}{k_1 - k_2}$$

$$C_{14} = \frac{(P_2 - P_1)}{(k_1 - k_2)cG_1 r^2 t_r} [(k_2 + b_2)r - 2k_2 pb_2] \quad C_{15} = \frac{(P_4 - P_3)a_2}{(k_1 - k_2)cG_2 r^2 t_r} (r - 2k_2 p)$$

$$C_{24} = \frac{-(P_2 - P_1)}{(k_1 - k_2)cG_1 r^2 t_r} [(k_1 + b_2)r - 2k_1 pb_2] \quad C_{25} = \frac{-(P_4 - P_3)a_2}{(k_1 - k_2)cG_2 r^2 t_r} (r - 2k_1 p)$$

$$C_{34} = \frac{(P_2 - P_1)b_1}{(k_1 - k_2)cG_1 r^2 t_r} (r - 2k_2 p) \quad C_{35} = \frac{(P_4 - P_3)}{(k_1 - k_2)cG_2 r^2 t_r} [(k_2 + a_1)r - 2k_2 pa_1]$$

$$C_{44} = -\frac{(P_2 - P_1)b_1}{(k_1 - k_2)cG_1 r^2 t_r} (r - 2k_1 p) \quad C_{45} = -\frac{(P_4 - P_3)}{(k_1 - k_2)cG_2 r^2 t_r} [(k_1 + a_1)r - 2k_1 pa_1]$$

gdzie:  $K_1 = \frac{1}{T_1}; \quad K_2 = \frac{1}{T_2}$

gdzie:

$$2p = a_1 + b_2, \quad r = a_1 b_2 - a_2 b_1, \quad s = a_2 b_3 + a_3 b_2, \quad w = a_1 b_3 + a_3 b_1.$$

Rozwiązaniem równań (12) są wyrażenia:

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= C_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + C_2 e^{-\frac{t}{T_2}} + \frac{s}{r} + A_I + B_I t, \\ \psi_2(t) &= C_3 e^{-\frac{t}{T_1}} + C_4 e^{-\frac{t}{T_2}} + \frac{w}{r} + A_{II} + B_{II} t, \end{aligned} \quad (13)$$

z których wynika, że wypadkowa krzywa nagrzewania jest sumą cząstkowych nagrzeń, opisanych równaniem dwuwykładniczym o cieplnych stałych czasowych  $T_1 = \frac{1}{p+q}$ ,  $T_2 = \frac{1}{p-q}$ , gdzie  $q = \sqrt{p^2 - r}$  oraz liniowym równaniem algebraicznym stopnia pierwszego względem czasu. W tabeli II zestawiono zależności dla wyznaczenia współczynników temperaturowych  $C_1 \dots C_4$  oraz  $A_I \dots B_{II}$ .

Zauważmy, że w przypadku wymuszeń stałą mocą strat  $P_1(t) = \text{const}$ ,  $P_2(t) = \text{const}$  ostatnie dwa człony równania (13), tj.  $A_I$ ,  $A_{II}$ ,  $B_I$ ,  $B_{II}$  są równe zero, gdyż  $P_2 = P_1$ ,  $P_4 = P_3$ . Zerują się również współczynniki temperaturowe  $C_{14}, C_{24} \dots C_{44}, C_{45}$ . Otrzymuje się wtedy znane dwuwykładnicze równanie nagrzewania:

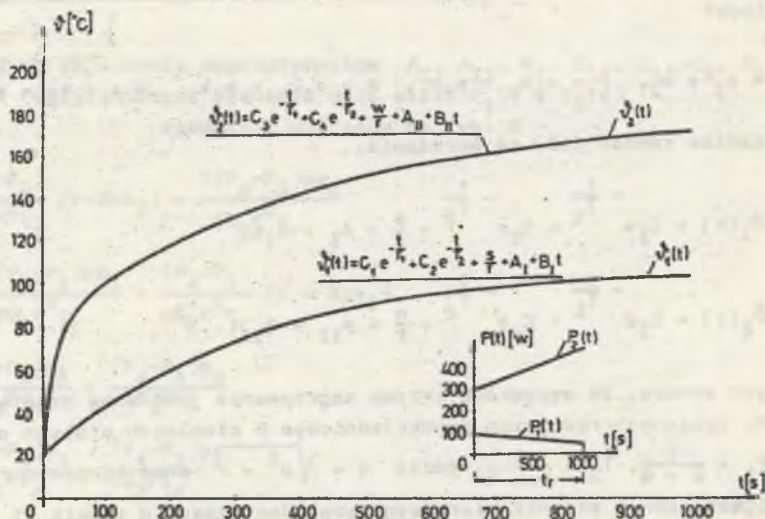
$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= C_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + C_2 e^{-\frac{t}{T_2}} + \psi_{1\text{ust}}, \\ \psi_2(t) &= C_3 e^{-\frac{t}{T_1}} + C_4 e^{-\frac{t}{T_2}} + \psi_{2\text{ust}} \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie:

$$\psi_{1\text{ust}} = \frac{s}{r}, \quad \psi_{2\text{ust}} = \frac{w}{r}.$$

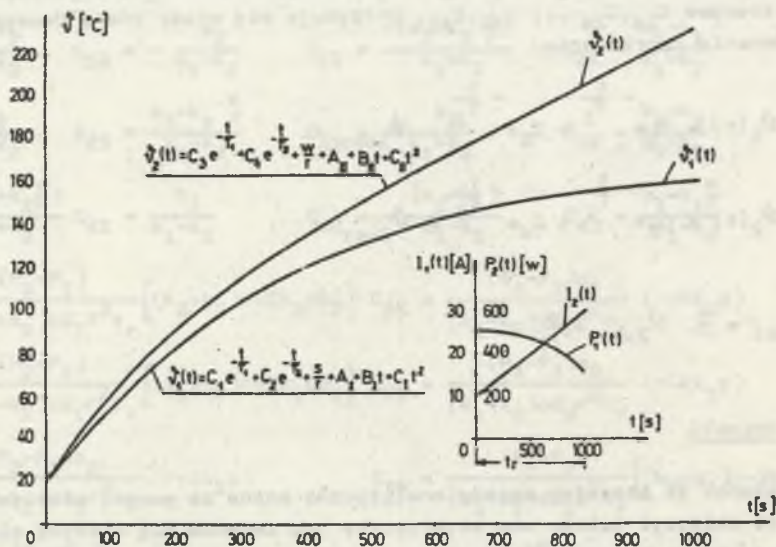
#### 4. Wnioski

Wykazano, że stosując metodę analityczną można za pomocą prostych zależności obliczyć ściśle charakterystykę nagrzewania się maszyny elektrycznej, zastąpioną jednym lub dwoma, skupionymi zmieniającymi się w czasie, źródłami strat ciepła. zilustrowano to dla układu dwóch węzłów cieplnych na rys. 8, 9, 10, 11. Możliwe jest również otrzymanie charakterystyk nagrzewania podczas cyklu pracy maszyny elektrycznej, złożonego z dowolnej liczby okresów, w których maszyna pracuje przy zmiennym obciążeniu określonym funkcjami  $P(t)$  lub  $I(t)$ . Przypadki takie zostały poda-



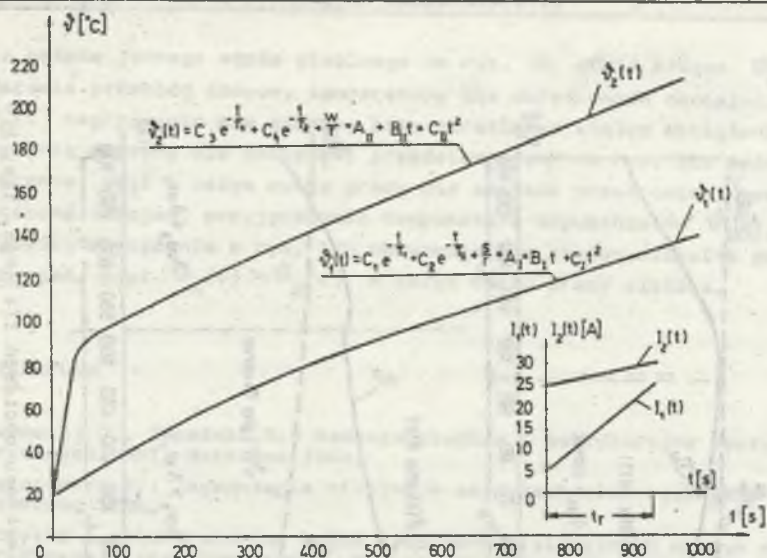
Rys. 8. Wypadkowy przebieg nagrzewania się maszyny elektrycznej składającej się z dwóch węzłów cieplnych przy wymuszeniu mocy strat wg wykresu (III, V)

Fig. 8. Resultant course of heating of the electric machine consisting of two thermal centres under power losses constraint according to the diagram (III, V)



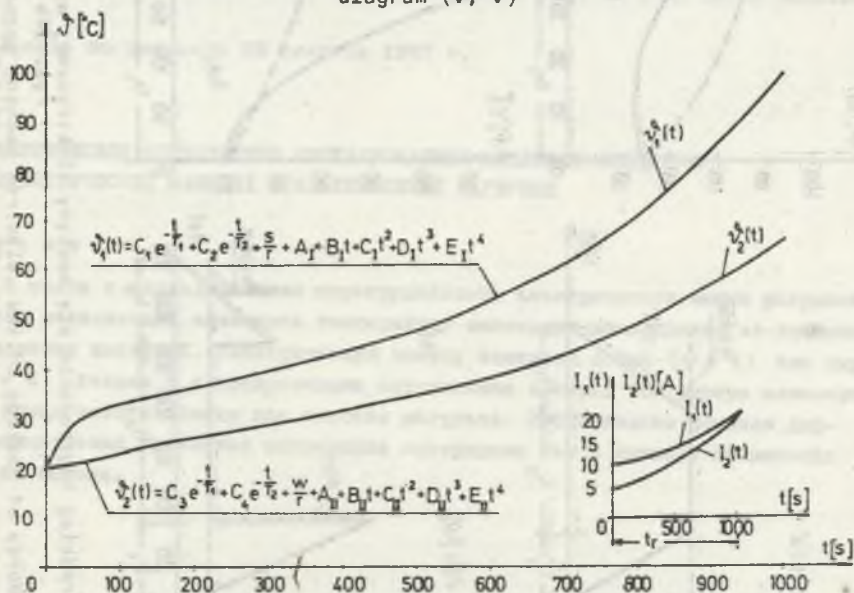
Rys. 9. Wypadkowy przebieg nagrzewania się maszyny elektrycznej składającej się z dwóch węzłów cieplnych przy wymuszeniu mocy strat wg wykresu (VII, V)

Fig. 9. Resultant course of heating of the electric machine consisting of two thermal centres under power losses constraint according to the diagram (VII, V)



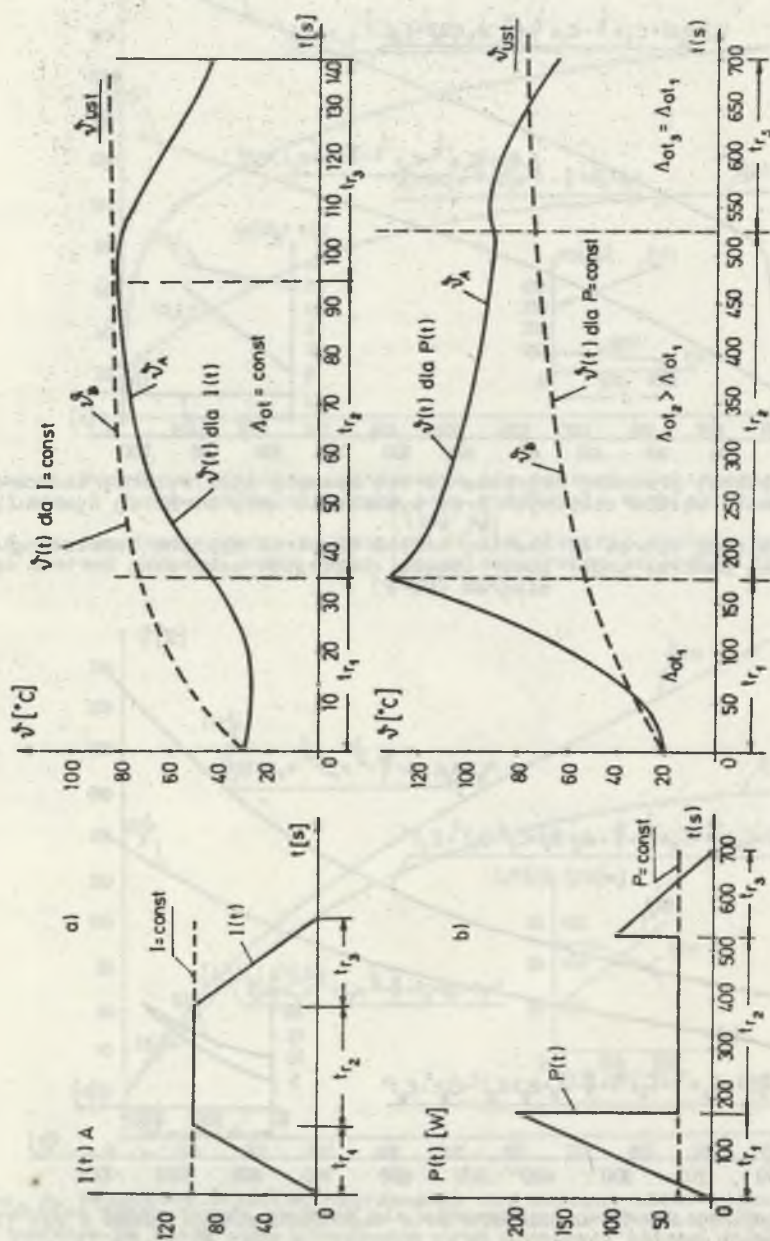
Rys. 10. Wypadkowy przebieg nagrzewania się maszyny elektrycznej składającej się z dwóch węzłów cieplnych przy wymuszeniu mocy strat wg wykresu (V, V)

Fig. 10. Resultant course of heating of the electric machine consisting of two thermal centres under power losses constraint according to the diagram (V, V)



Rys. 11. Wypadkowy przebieg nagrzewania się maszyny elektrycznej składającej się z dwóch węzłów cieplnych przy wymuszeniu mocy strat wg wykresu (IX, IX)

Fig. 11. Resultant course of heating of the electric machine consisting of two thermal centres under power losses constraint according to the diagram (IX, IX)



Rys. 12. Przebieg nagrzewania się maszyny elektrycznej wg zadanego wykresu obciążen  $I(t)$  rys. 12a,  $P(t)$  rys. 12b

Fig. 12. Course of heating of the electric machine according to the given load diagram  $I(t)$  Fig. 12a,  $P(t)$  Fig. 12b



ne dla układu jednego węzła cieplnego na rys. 12, gdzie krzywa  $\psi_A(t)$  przedstawia przebieg czasowy temperatury dla określonych obciążeń, a krzywa  $\psi_B(t)$  nagrzewanie się maszyny przy określonym stałym obciążeniu. Nagrzewanie maszyny dla obciążeń, przedstawionych na rys. 12a można uznać za poprawne, gdyż w całym cyklu pracy nie została przekroczona temperatura ustalona uzwojeń, przyjęta jako temperatura dopuszczalna  $\psi_{Bust}$ . W przypadku obciążenia z rys. 12b obserwuje się niedopuszczalne przegrzanie uzwojeń, gdyż  $\psi_A(t) > \psi_B(t)$  w całym cyklu pracy silnika.

## LITERATURA

- [1] Mukosiej J., Zapaśnik R.: Badania cieplne i wentylacyjne maszyn elektrycznych. WNT, Warszawa 1964.
- [2] Pełczewski W.: Zagadnienia cieplne w maszynach elektrycznych. PWT, Warszawa 1956.
- [3] Różycki A.: Laboratorium badań cieplno-wentylacyjnych maszyn elektrycznych i transformatorów. Skrypt Uczelniany Nr 1222, Politechnika Śląska im. W. Pstrowskiego w Gliwicach, Gliwice 1986.

Recenzent: Doc. dr inż. Jerzy Hickiewicz

Wpłynęło do Redakcji 15 czerwca 1987 r.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ  
В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИНАХ ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ НАГРУЗКЕ

## Р е з ю м е

В связи с исследованиями перегружаемости электрических машин разработан метод позволяющий вычислить температуру вызванную меняющимися во времени тепловыми потерями. Электрическую машину замещено одним ( $n = 1$ ) или двумя ( $n = 2$ ) телами с сосредоточными источниками потерь. Эти потери изменяются во время работы машины как токовая нагрузка. Представлено решение дифференциальных уравнений нагревания однородных тел и примеры применения этого метода.

# ANALYTICAL DETERMINATION OF TEMPERATURE TRANSIENTS IN ELECTRIC MACHINE UNDER VARIABLE LOAD

## Summary

Investigations on overload capacity of the electric machines and searching for a new overload protection operating by the principle of digital simulation of thermal phenomena have required to develop analytical determination method of thermal transients under variable load of the motor.

The characteristic  $\vartheta(t)$  has been determined for several chosen cases of constrained losses in the winding of the electric machine treated as a system of one thermal centre.

By means of the exact analytical method a characteristic of the electric machine heating has been also determined and equivalent thermal diagram consisting of two thermal centres has been applied to this characteristic.

A linear constraint of power losses in the centres has been assumed. Calculation results have been compared with measurements carried out on a physical model of the winding.