

Andrzej ORDYS,
Konrad WOJCIECHOWSKI

METODY WYZNACZANIA POLA PRĘDKOŚCI
NA PODSTAWIE SEKWENCJI OBRAZÓW^{x)}

Streszczenie. W pracy przedstawione są metody określenia pola prędkości na podstawie obserwacji sekwencji obrazów. Metody te można podzielić na dwie grupy: pierwsza, w której wymagana jest znajomość wektora prędkości w pewnych punktach obrazu i druga, która zawiera metody przybliżone, lecz nie wymagające znajomości wektora prędkości w żadnym punkcie obrazu.

Podaje się wzory, które umożliwiają łatwą implementację metod na maszynie cyfrowej.

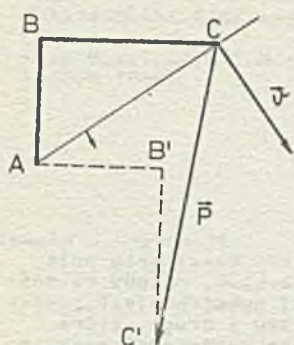
1. Wstęp

Idea wykorzystania pola prędkości dla detekcji parametrów ruchu obserwatora na podstawie widzianych przez niego obrazów jest szeroko rozwijana w ostatnich latach. Wymienić tu można prace: [1], [5], [6], [7], [8], [9], [12], [13], [14], [15], [19]. Numeryczne wyznaczenie pola prędkości możliwe jest dzięki postępowi w dziedzinie informatyki, wiąże się ze wzrostem szybkości działania i pojemności pamięci maszyn cyfrowych, a także z większą ich dostępnością.

Przez pole prędkości rozumiemy przyporządkowanie każdemu punktowi obrazu wektora prędkości tego punktu. Realizuje się to przez zapamiętanie dwóch (lub więcej) obrazów tej samej sceny przesuniętych w czasie. Ponieważ obserwator porusza się, więc obiekty znajdujące się na scenie będą na kolejnych obrazach przemieszczone. Pomiar tego przemieszczenia oraz znajomość czasu między kolejnymi obserwacjami sceny służą do wyznaczenia pola prędkości. Należy zauważyć, że wektor prędkości może być określony w ten sposób tylko dla bardzo małych przemieszczeń. W przypadku dużych przemieszczeń metoda wprowadzałaby znaczny błąd. Ilustruje to rys. 1.

x) Praca finansowana z Centralnego Programu Badań Podstawowych CPBP 02.13 "Układy ze sztuczną inteligencją do maszyn roboczych i pojazdów".

Niech kąt ABC obraca się ze stałą prędkością kątową ω i odpowiadającą jej prędkością liniową \vec{v} względem punktu A oraz niech dwoma kolejnymi obrazami będą A B C, A B' C'.



Rys. 1. Ilustracja różnicy między kierunkiem wektora prędkości, a kierunkiem wektora przemieszczenia

Fig. 1. Illustration of the difference between the direction of the velocity and displacement vectors

Ogólnie widać różnicę kierunku między wektorem prędkości \vec{v} i wektorem przemieszczenia \vec{r} . Zatem dla dowolnego przedziału czasu Δt , w którym wykonane są kolejne obserwacje, można mówić odpowiednio o polach prędkości i polach przemieszczeń i ogólnie są one różne. Jeżeli $\Delta t \rightarrow 0$, to kierunki wektorów odpowiednich pól dążą do siebie i znajomość pola przemieszczeń może być podstawą do określenia pola prędkości.

W praktyce nie jest możliwe określenie pola prędkości dla wszystkich punktów obrazu. Aby przemieszczenie punktu na kolejnych obrazach było widoczne, musi on odróżniać się od punktów sąsiednich, musi być jaśniejszy lub ciemniejszy. Występuje to tylko dla punktów leżących na konturze obserwowanego obiektu lub w miejscach zmiany faktury powierzchni. W praktyce pole prędkości określane jest dla tych właśnie punktów.

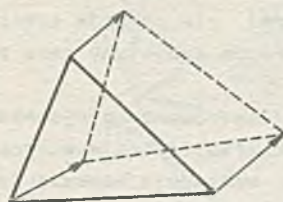
2. Niejednoznaczność określenia pola prędkości na podstawie obserwacji ciągu obrazów

Rysunek 2 jest ilustracją trudności, na jakie napotyka się przy określeniu pola prędkości na podstawie obserwacji przemieszczenia. Linia na rysunku przemieszcza się do położenia zaznaczonego linią przerywaną. Można zauważyć, że rysunek nie dostarcza informacji o przesunięciu, a w konsekwencji prędkości w kierunku równoległym do linii w danym punkcie. Informację taką można by uzyskać, gdyby linia posiadała charakterystyczne wklęsłości lub wypukłości możliwe do zidentyfikowania, tak jak przykładowe kontury na rysunkach 3 i 4. Na rysunku 3 zbadanie przemieszczeń wierzchołków trójkąta pozwala określić wartość i kierunek wektora prędkości w każdym punkcie konturu. Wymaga to jednak podania odpowiedniości wierzchołków na obrazie początkowym i obrazie przesuniętym. Dla bardziej skomplikowanych figur może to być niewykonalne. Poza tym w praktyce rzadko spotyka się obrazy o tak ostro zaznaczonych wierzchołkach. Bardziej realna jest sytuacja taka jak na rysunku 4. W tym przypadku podstawową rzeczą jest odszukanie charakterystycznych punktów (wypukłości) krzywej. Może to być związane z trudnościami obliczeniowymi i obarczone błędami.



Rys. 2. Obserwacja przemieszczenia konturu nie dostarcza informacji o składowej ruchu wzdłuż konturu

Fig. 2. Displacement observation along the contour gives no information about the motion component along the contour



Rys. 3. Przypadek, gdy możliwe jest odtworzenie pełnego wektora prędkości

Fig. 3. The case when reconstruction of the entire velocity vector is possible

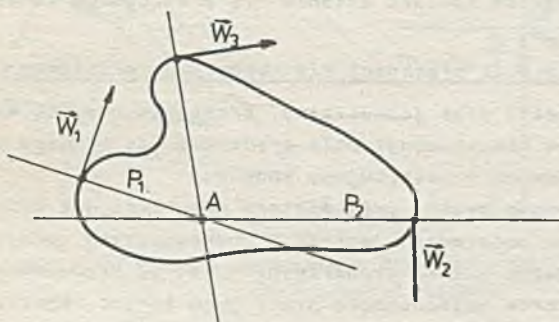


Rys. 4. Jeśli krzywa posiada charakterystyczne punkty, które mogą zostać odszukane na obrazie przesuniętym, to wektor prędkości w tych punktach może zostać odtworzony

Fig. 4. If the curve has characteristic points which may be found in the moved image than the velocity vector in these points may be reconstructed

Jeśli da się określić kierunek wektora prędkości w co najmniej dwóch punktach obrazu, wówczas kierunek wektora prędkości w dowolnym punkcie może zostać określony poprzez wykonanie następującej konstrukcji (patrz rys. 5).

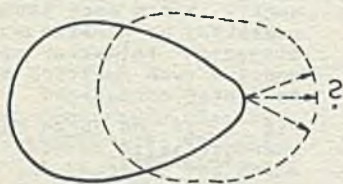
Prowadzimy prostopadłe do znanych kierunków wektorów prędkości \vec{w}_1 , \vec{w}_2 . Są to linie p_1 i p_2 . Punkt przecięcia się p_1 i p_2 określa środek obrotu obrazu. Łącząc dowolny punkt konturu z punktem A i prowadząc prostopadłą w punkcie przecięcia się z konturem uzyskujemy kierunek wektora prędkości w tym punkcie. Długość wektora prędkości wynika z wielkości przemieszczenia danego punktu (dla małych przemieszczeń).



Rys. 5. Określanie kierunku wektora prędkości w dowolnym punkcie obrazu
Fig. 5. Definition of the direction of the image velocity vector in a point of the image

Zasadniczym problemem jest tutaj określenie pełnego wektora prędkości w wybranych punktach konturu. Może to się udać jedynie dla bardzo szczególnych przypadków (linie łamane). Dla obrazów takich jak na rysunkach 4 i 5 poszukiwanie lokalnych ekstremów krzywizny może być obarczone dużym błędem.

Można dodać, że metoda zilustrowana na rysunkach 3, 4, 5 nie nadaje się do przypadku, gdy scena ma charakter trójwymiarowy, natomiast obserwowany jest jej dwuwymiarowy obraz. Następuje wówczas deformacja kształtów obserwowanych obiektów (rys. 6).



Rys. 6. Deformacja kształtu uniemożliwia określenie odpowiedniości punktów na przesuniętych obrazach

Fig. 6. Deformation of the shape unenables a definition of the points in moved image

W celu bardziej poglądowego przedstawienia podanych dalej wyników zostaną wprowadzone na obrazie dwa układy współrzędnych. Jeden z nich związany będzie z ramką obrazu i określony przez wersory w osiach x i y . Drugi związany będzie z bieżącym punktem konturu s i określony przez wersory: prostopadły do konturu w punkcie s - oznaczany przez $\vec{n}(s)$ oraz równoległy do konturu w punkcie s - oznaczany przez $\vec{r}(s)$. Odpowiednio składowe wektora prędkości w kierunku prostopadłym i równoległym do konturu oznaczać będziemy przez $v^n(s)$ oraz $v^r(s)$. Każda z nich posiada składowe w kierunkach osi x i y , np. $v_x^n(s)$ $v_y^n(s)$. Oznaczenia te zilustrowano na rysunku 7.

Układ odniesienia związany z ramką obrazu jest stały. Układ odniesienia związany z punktem konturu zmienia się przy obiegu konturu.

3.1. Określenie pola prędkości dla ruchu prostoliniowego

Jeśli ruch obiektu jest jednostajny, prostoliniowy, to wektor prędkości tego ruchu, a w konsekwencji pole prędkości dla każdego punktu obrazu może zostać wyznaczone w następujący sposób:

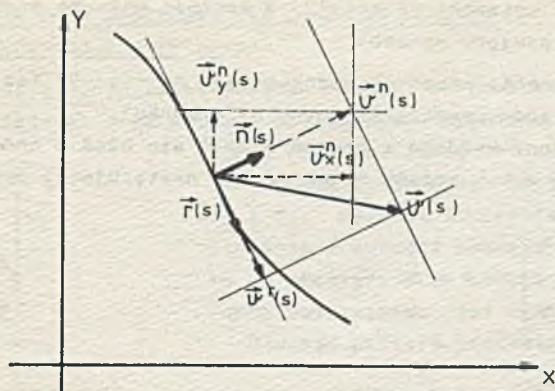
Określamy składowe prostopadłe wektora prędkości dla każdej z linii konturu obiektu na podstawie obserwacji przesuniętych obrazów. Wektory te zaczepiamy w początku układu współrzędnych x , y . Prowadzimy prostopadłą do każdego z wektorów przechodzącą przez jego koniec. Nietrudno zauważyć, że te prostopadłe przeczną się w jednym punkcie. Punkt ten wyznacza wektor prędkości obiektu. Idea metody została przedstawiona na rysunku 8. Wynikami są z prostych zależności geometrycznych.

3. Metody określenia pola prędkości dla różnych rodzajów ruchów

W celu bardziej poglądowego przedstawienia podanych dalej wyników zostaną wprowadzone na obrazie dwa układy współrzędnych. Jeden z nich związany będzie z ramką obrazu i określony przez wersory w osiach x i y . Drugi związany będzie z bieżącym punktem konturu s i określony przez wersory: prostopadły do konturu w punkcie s - oznaczany przez $\vec{n}(s)$ oraz równoległy do konturu w punkcie s - oznaczany przez $\vec{r}(s)$. Odpowiednio składowe

wektora prędkości w kierunku prostopadłym i równoległym do konturu oznaczać będziemy przez $v^n(s)$ oraz $v^r(s)$. Każda z nich posiada składowe w kierunkach osi x i y , np. $v_x^n(s)$ $v_y^n(s)$. Oznaczenia te zilustrowano na rysunku 7.

Układ odniesienia związany z ramką obrazu jest stały. Układ odniesienia związany z punktem konturu zmienia się przy obiegu konturu.

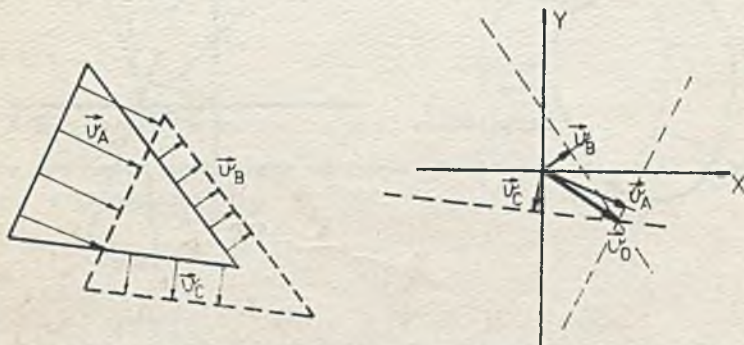


Rys. 7. Rozkład wektora prędkości na składową prostopadłą do konturu obiektu $\vec{v}^n(s)$ oraz składową równoległą do konturu obiektu $\vec{v}^r(s)$

Fig. 7. Distribution of the velocity vector into a component perpendicular to the contour $\vec{v}^n(s)$ and component parallel to the contour $\vec{v}^r(s)$

Dla obiektów rzeczywistych, dla których kontur składa się z krzywych, konstrukcja opisana na rys. 8 nie daje jednego punktu przecięcia (rys. 9). Wynika to z następujących faktów:

- nie jest dokładnie znana długość składowej prostopadłej wektora prędkości,
- mogą występować błędy przy liczeniu kierunku prostopadłego do konturu.



Rys. 8. Ilustracja sposobu określenia prędkości obiektu poruszającego się ruchem prostoliniowym

Fig. 8. Illustration of the way of the assignment of the plant velocity in the case of the straight line motion

Dla sytuacji opisanej na rysunku 9 wartość wektora prędkości może być oceniona w następujący sposób:

- Pisze się równania prostych zaznaczonych na rys. 9b (są to proste prostopadłe do wektorów prędkości danych na rysunku).
- Do prawej strony każdego z równań dodaje się błąd o charakterze losowym. Otrzymuje się w ten sposób układ równań następującej postaci:

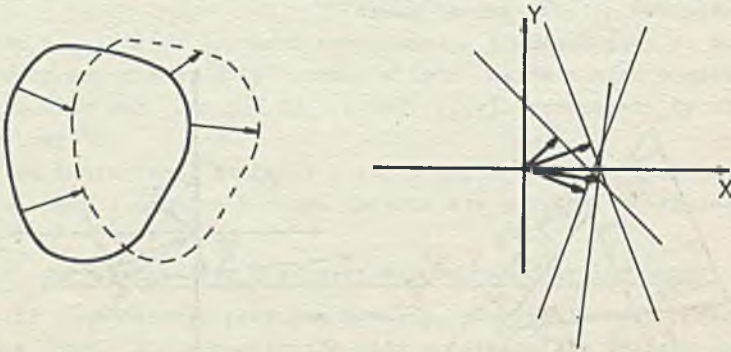
$$[a \quad b] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c + e, \quad (1)$$

gdzie:

- a, b - wektory współczynników przy x i y ,
 - c - wektor wyrazów wolnych,
 - e - wektor błędów.
- Dokonuje się oceny wektora $(x, y) = \hat{v}$ metodą najmniejszych kwadratów:

$$\hat{v} = ([a \ b]^T [a \ b])^{-1} [a \ b]^T c \quad (2)$$

Różne metody obliczania pola prędkości dla ruchu prostoliniowego opisane są w pracach: [8], [17], [1], [16].



Rys. 9. Niejednoznaczność określania wektora prędkości dla konturu składającego się z krzywych

Fig. 9. Nonuniqueness of the velocity vector definition for the contour composed of curves

3.2. Określenie pola prędkości dla złożenia ruchów: prostoliniowego i obrotowego

Rozważmy sytuację, gdy obiekt podlega ruchowi obrotowemu wokół początku układu współrzędnych oraz ruchowi postępowemu. Prędkość w ruchu obrotowym oznaczmy przez ω , natomiast prędkość ruchu postępowego posiada składowe f_x i f_y . Rysunek 10 przedstawia sposób liczenia prędkości pewnego wybranego punktu s konturu przy założeniu, że prędkość ruchu postępowego jest równa zero.

Długość wektora prędkości wynosi:

$$v = \omega \cdot r$$

Długości składowych są równe:

$$v_x = v \sin \alpha$$

$$v_y = v \cos \alpha$$

$$v_x = \omega \cdot r \cdot \sin \alpha = \omega \cdot y$$

$$v_y = \omega \cdot r \cdot \cos \alpha = \omega \cdot x$$

Wynika stąd, że:

$$\vec{v}_x = -\omega \cdot y \cdot \vec{n}_y$$

$$\vec{v}_y = \omega \cdot x \cdot \vec{n}_x,$$

gdzie: \vec{n}_x, \vec{n}_y wektory w osiach x i y odpowiednio.

Składowa prędkości pochodząca od ruchu obrotowego dana jest wzorem (dla punktu s konturu):

$$\vec{v}(s) = \omega \begin{bmatrix} -y(s) \\ x(s) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Po dodaniu składowej pochodzącej od ruchu prostoliniowego otrzymujemy:

$$\vec{v}(s) = \omega \begin{bmatrix} -y(s) \\ x(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \quad (4)$$

Na rysunku 5 pokazano metodę określania kierunku wektora prędkości w dowolnym punkcie konturu w przypadku, gdy kierunek ten jest znany w dwóch punktach konturu. Równanie (4) pozwala na obliczenie parametrów ruchu - ω , f_x , f_y , a w konsekwencji wektora prędkości w dowolnym punkcie konturu, jeśli wektor prędkości znany jest w co najmniej dwóch punktach. Rozważmy przypadek, gdy znamy wartość wektora prędkości w m punktach konturu. Podobnie jak było to robione dla ruchu prostoliniowego wprowadzimy do równań błąd związany z niedokładnością wyznaczenia wektora prędkości. Otrzymamy układ równań:

$$\begin{aligned} e_1 + v(s_1) &= \omega \begin{bmatrix} -y(s_1) \\ x(s_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \\ \vdots & \\ e_m + v(s_m) &= \omega \begin{bmatrix} -y(s_m) \\ x(s_m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

Równania te można przekształcić do następującej postaci:

$$\begin{bmatrix} v_x(s_1) \\ v_y(s_1) \\ v_x(s_2) \\ v_y(s_2) \\ \vdots \\ v_x(s_m) \\ v_y(s_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(s_1) & 1 & 0 \\ x(s_1) & 0 & 1 \\ -y(s_2) & 1 & 0 \\ x(s_2) & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(s_m) & 1 & 0 \\ x(s_m) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ f_x \\ f_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_1 x \\ e_1 y \\ e_2 x \\ e_2 y \\ \vdots \\ e_{mx} \\ e_{my} \end{bmatrix} \quad (6)$$

lub w skróconym zapisie:

$$V = A \cdot \begin{bmatrix} \omega \\ f_x \\ f_y \end{bmatrix} - E \quad (7)$$

Ocena parametrów ruchu metodą najmniejszych kwadratów daje wynik:

$$\begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ \hat{f}_x \\ \hat{f}_y \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T V \quad (8)$$

Po rozpisaniu otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ \hat{f}_x \\ \hat{f}_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m [x(s_i)^2 + y(s_i)^2] & : & - \sum_{i=1}^m y(s_i) & : & \sum_{i=1}^m x(s_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^m y(s_i) & : & m & : & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^m x(s_i) & : & 0 & : & m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}^{-1} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m v_y(s_i) x(s_i) - v_x(s_i) y(s_i) \\ \sum_{i=1}^m v_x(s_i) \\ \sum_{i=1}^m v_y(s_i) \end{bmatrix}$$

Ciekawą własność pola prędkości dla tego przypadku polega na tym, że zbiór wektorów prędkości zaczepionych w początku układu współrzędnych utworzy krzywą o kształcie identycznym jak kontur obiektu, obróconą względem konturu obiektu o 90° i zmniejszoną ω razy. Własność ta wynika natychmiast z równania (4).

3.3. Określenie pola przemieszczeń dla złożenia ruchów obrotowego i prostoliniowego

Niech : $\begin{bmatrix} x_1(s) \\ y_1(s) \end{bmatrix}$ oznacza kontur obiektu przed przemieszczeniem,

$\begin{bmatrix} x_2(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix}$ niech oznacza kontur obiektu przemieszczonego.

Zmienna s przebiega wszystkie punkty konturu.

Założmy, że kontur obraca się o kąt φ oraz przesuwą o wektor $(1_x, 1_y)$.

Zachodzi wówczas:

$$\begin{bmatrix} x_2(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(s) \\ y_1(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \end{bmatrix} \quad (10)$$

Przemieszczenie konturu jest dane wzorem:

$$d(s) = \begin{bmatrix} d_x(s) \\ d_y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1(s) \\ y_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi - 1 & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(s) \\ y_1(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \end{bmatrix} \quad (11)$$

Można pokazać, że kontur $d(s)$ wynika z obrotu i przeskalowania konturu

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ y_1(s) \end{bmatrix} \quad \text{Współczynnik skalowania wynosi:}$$

$$k = \sqrt{2(1 - \cos \varphi)} \quad (12)$$

Kąt obrotu α dany jest wzorem:

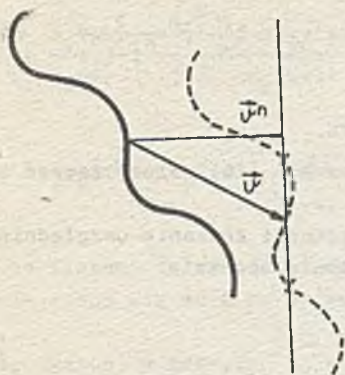
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - 1} = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \quad (13)$$

Jest to własność analogiczna do własności pola prędkości przedstawionej wyżej. Metody określenia pola prędkości dla ruchu będącego złożeniem ruchu obrotowego i postępowego można znaleźć w pracach: [6], [13], [4], [2], [3], [18], [17].

3.4. Założenie o gładkości pola prędkości

Metody określenia pola prędkości omówione dotychczas wymagały znajomości wektora prędkości w pewnych punktach konturu. Jeśli znana jest składowa prostopadła wektora prędkości, to można określić wektor prędkości tak jak zostało to pokazane na rysunku 11. Jeśli założymy niewielkie przesunięcie między obrazami i odstęp czasu między odczytywaniem obrazów przyjmiemy za jednostkowy, to z łatwością zauważymy, że wektor prędkości musi kończyć się w jednym z miejsc, w których linia prostopadła do \vec{v}^n przecina przesunięty kontur obiektu. Rysunek 11 sugeruje także, że składowa prostopadła wektora prędkości nie wynika z wydzielenia odległości między konturami na kierunku prostopadłym przez Δt .

Błąd jaki można popełnić w taki sposób jest pokazany, w przejaskrawiony sposób, na rys. 12.



Rys. 11. Znajomość składowej prostopadłej wektora prędkości pozwala znaleźć wektor prędkości

Fig. 11. Knowledge of the perpendicular component of the velocity vector enables to find the velocity vector



Rys. 12. Długość składowej prostopadłej wektora prędkości nie może być wyznaczona przez pomiar długości wektora \vec{v}^p

Fig. 12. The length of the perpendicular component of the velocity cannot be assigned by the measurement of the vector length \vec{v}^p

Istnieją pewne inne metody określania składowej prostopadłej wektora prędkości, np. opisana w pracy [11]. Wszystkie one jednak są metodami przybliżonymi i obowiązują jedynie dla niewielkich przesunięć. Poza tym, nawet zakładając, że \vec{v}^n jest wyznaczone dostatecznie dokładnie, nie możemy określić składowej równoległej \vec{v}^r wektora prędkości ze względu na niejednoznaczność pokazaną na rys. 2. Jednoznaczność pola prędkości można uzyskać po wprowadzeniu dodatkowego żądania. Żądaniem takim jest, aby wariancja prędkości wzdłuż konturu była minimalna. Oznacza to minimalizację następującego wskaźnika jakości:

$$Q = \int \left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \right|^2 ds = \int \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial s} \right)^2 \right] ds \quad (15)$$

Zakłada się więc znajomość składowej prostopadłej wektora prędkości v^n i dobiera się składową równoległą v^r w ten sposób, by zminimalizować wskaźnik (15). Nie jest to metoda dokładna, jednak wyniki uzyskiwane za jej pomocą mogą być wystarczające dla wielu zastosowań. Ponieważ godzimy się na przybliżenia wynikające z tej metody, mniej istotną sprawą staje się dokładność określenia składowej prostopadłej wektora prędkości, jeśli tylko ostateczny rezultat jest zadowalający.

Problem określenia pola prędkości o minimalnej wariancji można łatwo rozwiązać po jego przeformułowaniu do postaci dyskretnej.

Niech i będzie numerem punktu konturu. Załóżmy, że kontur jest zamknięty i składa się z n punktów. Przyjmijmy, że $i = 0$ oraz $i = n$ oznaczają ten sam punkt. Wskaźnik jakości przyjmie postać:

$$I = \sum_{i=1}^n \left\{ [v_x(i) - v_x(i-1)]^2 + [v_y(i) - v_y(i-1)]^2 \right\} \frac{1}{d_{i-1,i}} \quad (16)$$

$d_{i,j}$ oznacza odległość punktów i, j konturu.

Jeśli kontur jest otwarty, to sumowanie we wzorze (16) należy zacząć od $i=2$.

Znajomość składowej prostopadłej wektora prędkości zostanie uwzględniona w następujący sposób:

$$(\nabla(i) \cdot \vec{n}(i)) - v^n(i) = 0 \quad (17)$$

$$v_x(i) n_x(i) + v_y(i) n_y(i) - v^n(i) = 0$$

Ze wzoru (17) można wyznaczyć v_x lub v_y :

$$v_x(i) = \frac{v^n(i) - v_y(i) n_y(i)}{n_x(i)} \quad (18)$$

$$v_y(i) = \frac{v^n(i) - v_x(i) n_x(i)}{n_y(i)} \quad (19)$$

Wzór (18) będzie używany dla punktów konturu, w których $n_x \neq 0$, natomiast dla punktów, w których $n_x = 0$, zostanie zastosowany wzór (19). Odpowiednio (18) lub (19) zostanie podstawione do (16). Załóżmy, że $n_x \neq 0$ dla każdego i . Podstawiamy więc (18) do (16).

$$I = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\frac{v^n(i) - v_y(i) n_y(i)}{n_x(i)} - \frac{v^n(i-1) - v_y(i-1) n_y(i-1)}{n_x(i-1)} \right]^2 + [v_y(i) - v_y(i-1)]^2 \right\} \frac{1}{d_{i-1,i}} \quad (20)$$

Minimum zostanie osiągnięte w punkcie zerowania się pochodnej:

$$\frac{\partial I}{\partial v_y(i)} = 0$$

$$-\frac{n_y(i)}{n_x(i)} \left[\frac{v^n(i) - v_y(i) n_y(i)}{n_x(i)} - \frac{v^n(i-1) - v_y(i-1) n_y(i-1)}{n_x(i-1)} \right] \frac{1}{d_{i-1,i}} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{n_Y(i)}{n_X(i)} \left[\frac{v^n(i+1) - v_Y(i+1) n_Y(i+1)}{n_X(i+1)} - \frac{v^n(i) - v_Y(i) n_Y(i)}{n_X(i)} \right] \frac{1}{d_{1,i+1}} + \\
 & + \left[v_Y(i) - v_Y(i-1) \right] \frac{1}{d_{1-1,i}} - \left[v_Y(i+1) - v_Y(i) \right] \frac{1}{d_{1,i+1}} = 0 \quad (21)
 \end{aligned}$$

Jest to liniowa zależność między $v_Y(i-1)$, $v_Y(i)$ oraz $v_Y(i+1)$. Dla 1 zmieniającego się od 1 do n otrzymujemy układ n równań o n niewiadomych.

W punktach, w których $n_X = 0$, należy podstawić do (16) wzór (19). Prowadzi to do analogicznych wzorów: np. dla $n_X(j) = 0$, $n_X(j-1) \neq 0$, $n_X(j+1) \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{d_{1-1,i}} \left[v_X(j) - \frac{v_n(j-1) - v_Y(j-1) n_Y(j-1)}{n_X(j-1)} \right] - \\
 & - \frac{1}{d_{1,i+1}} \left[\frac{v^n(j+1) - v_Y(j+1) n_Y(j+1)}{n_X(j+1)} - v_X(j) \right] = 0 \quad (22)
 \end{aligned}$$

Występujące we wzorach (21), (22) wartości $n^n(i)$ są z założenia znane.

Ilorazy $\frac{n_Y(i)}{n_X(i)}$ posiadają bardzo prostą interpretację.

Jest to tangens kąta nachylenia normalnej do konturu. Ilustruje to rysunek 13. Wreszcie $d_{1,i+1}$ - odległość sąsiednich punktów konturu, przy założeniu równomiernego rozkładu pixeli na obrazie, może wynosić 1 lub $\sqrt{2}$. Problem optymalizacji można rozwiązać także w inny sposób. Rozpiszmy w tym celu wzór na pochodną wektora prędkości:

$$\frac{\partial \vec{v}(s)}{\partial s} = \frac{\partial v^r(s)}{\partial s} \vec{r}(s) + \frac{\partial r(s)}{\partial s} \vec{n}(s) + v^r(s) \frac{\partial \vec{r}(s)}{\partial s} + v^n(s) \frac{\partial \vec{n}(s)}{\partial s} \quad (23)$$

Wskaźnik jakości Q jest całką z iloczynu skalarnego $\frac{\partial \vec{v}(s)}{\partial s}$ przez siebie. Podstawiając (23) do wyrażenia pod całką otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \right|^2 &= \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \right) = \left(\frac{\partial v^r}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^n}{\partial s} \right)^2 + (v^r)^2 \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right) + \\
 &+ (v^n)^2 \left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial s} \right) + 2 \frac{\partial v^n}{\partial s} v^r \left(\vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \frac{\partial v^r}{\partial s} v^n \left(\vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial s} \right) + 2 \frac{\partial v^n}{\partial s} v^r \left(\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right) + \\
 & + 2 \frac{\partial v^n}{\partial s} v^n \left(\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial s} \right)
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\text{Zauważmy, że } \left(\vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial s} \right) = - \left(\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right) \tag{25}$$

Dowód jest natychmiastowy:

$$\left(\vec{r} \cdot \vec{n} \right) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial s} \left(\vec{r} \cdot \vec{n} \right) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \cdot \vec{n} \right) + \left(\vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial s} \right) = 0$$

Stąd otrzymuje się (25) □

W podobny sposób wykazuje się, że:

$$\left(\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial s} \right) = \left(\vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right) = 0 \tag{26}$$

Wyrażenie (24) uprości się do postaci:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \right|^2 & = \left(\frac{\partial v^r}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^n}{\partial s} \right)^2 + 2 \left[v^r \frac{\partial v^n}{\partial s} - v^n \frac{\partial v^r}{\partial s} \right] \left(\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right) + \\
 & + (v^n)^2 \left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial s} \right) + (v^r)^2 \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right)
 \end{aligned}$$

Teraz można dokonać dyskretyzacji wakażnika jakości, co prowadzi do wzoru:

$$\begin{aligned}
 I & = \sum_{i=1}^n \left[a_1 v^r(i)^2 + b_1 v^r(i-1) v^r(i) + c_1 v^r(i-1)^2 + \right. \\
 & \left. + d_1 v^r(i) + e_1 v^r(i-1) + f_1 \right]
 \end{aligned} \tag{27}$$

Współczynniki $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1$ są funkcjami numeru punktu i

oraz znanych wielkości $v^n(i), (\vec{n}(i) \cdot \frac{\partial \vec{r}(i)}{\partial s}), \left(\frac{\partial \vec{n}(i)}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{n}(i)}{\partial s} \right), \left(\frac{\partial \vec{r}(i)}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{r}(i)}{\partial s} \right)$,

Zróżniczkowanie I podług $v^r(i)$ dla $i = 1, \dots, n$ i przyrównanie pochodnej do zera daje układ n równań liniowych, które stanowią warunek konieczny minimum.

W obu omówionych metodach zakłada się, że znana jest składowa prostopadła wektora prędkości. Można założyć, że składowa ta nie jest znana dokładnie (wskutek błędów pomiaru) i narzucanie jej wartości nie jest celowe. Wówczas do wskaźnika jakości wprowadzamy funkcję kary za niespełnienie równania na składową prostopadłą wektora prędkości. Równanie przyjmie postać:

$$I = \int \left\{ \left| \frac{\partial v}{\partial s} \right|^2 + \varrho \left[(\vec{v} \cdot \vec{n}) - v^n \right]^2 \right\} ds$$

v^n oznacza wartość, która aproksymuje składową prostopadłą wektora prędkości i która jest znana, ϱ jest współczynnikiem kary. Obliczenie wektora prędkości polega, tak jak poprzednio, na:

- zdyskretyzowaniu wskaźnika jakości,
- zróżniczkowaniu otrzymanego wyrażenia podług nieznanymi wartości prędkości,
- przyrównaniu pochodnych do zera,
- rozwiązaniu otrzymanego układu równań liniowych.

Zauważmy, że o ile w metodach omawianych wyżej rozwiązywało się układ n równań o n niewiadomych, to ta metoda prowadzi do układu $2n$ równań, gdyż nieznanymi są zarówno składowa równoległa, jak i prostopadła wektora prędkości.

Idea budowy pola prędkości o minimalnej wariancji pochodzi z pracy Horna i Schuncka (1981) i była dalej rozwijana przez Hildreth (1983).

4. Zakończenie

W pracy podano metody wyznaczania pola prędkości dla różnych rodzajów ruchu obiektu względem płaskiej sceny. Pole prędkości dla całego konturu obiektu może być obliczone w łatwy sposób, jeśli znane są wektory prędkości w co najmniej dwóch punktach obrazu. Informację taką można uzyskać przez porównanie na obrazie pierwotnym i obrazie przesuniętym położenia pewnych charakterystycznych punktów konturu, jeśli obraz takie punkty posiada. Punktami charakterystycznymi mogą być punkty załamania konturu lub punkty, w których krzywizna osiąga maksimum.

Metoda polegająca na poszukiwaniu pola prędkości o minimalnej wariancji (największej gładkości) nie wymaga wcześniejszej znajomości wektora prędkości w żadnym punkcie konturu. Jest ona z założenia metodą przybliżoną. Metoda ta może być stosowana do przypadku ruchu względem trójwymiarowej sceny obserwowanej na płaskim obrazie.

Pole prędkości może zostać wykorzystane jako informacja wejściowa dla algorytmu sterowania poruszającym się obiektem. Znajomość pola prędkości pozwala odtworzyć parametry ruchu, a więc stan obiektu. Szczegóły opisane są w [20]. Znajomość stanu obiektu jest podstawą do zastosowania klasycznych algorytmów teorii sterowania.

Możliwe jest także inne podejście do problemu, polegające na budowie algorytmów sterowania obiektem na podstawie całego pola prędkości, bez przechodzenia przez pośredni etap stanu. Będzie to przedmiotem dalszych badań.

Podziękowania

Autorzy pragną podziękować drowi inż. A. Świerniakowi za rzeczowe dyskusje.

LITERATURA

- [1] Adelson E.H., Movshon J.A.: The Perception of Coherent Motion in Two-dimensional Patterns, Proc. of the ACM Interdisciplinary Workshop on Motion: Representation and Perception, Toronto (1983)
- [2] Aggarwal J.K., Duda R.O.: Computer Analysis of Moving Polygonal Images. IEEE Transaction on Computers c-24, (1975)
- [3] Barnard S.T., Thompson W.B.: Disparity Analysis of Images. IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2 (1980)
- [4] Chow W.K., Aggarwal J.K.: Computer Analysis of Planar Curvilinear Moving Images. IEEE Transactions on Computers, c 26.
- [5] Clatworthy J.L., Frisby J.P.: Real and Apparent Movement: Evidence for Unitary Mechanism. Perception 2. (1973)
- [6] Davis L., Wu Z., Sun H.: Contour-based Motion Estimation. Proc. of the ARPA Image Understanding Workshop, Arlington, VA. (1982)
- [7] Van Doorn S.J., Koenderink J.J.: Visibility of Movement Gradients. Biological Cybernetics 44. (1982)
- [8] Fennema C.I., Thompson W.B.: Velocity Determination in Scenes Containing Several Moving Objects. Computer Graphics and Image Processing 9. (1979)
- [9] Hildreth E.C.: The Integration of Motion Information Along Contours. Proc. of the IEEE Workshop on Computer Vision, Rindge NH. (1982)
- [10] Hildreth E.C.: The Measurement of Visual Motion. Ph. D, Thesis. Massachusetts Institute of Technology. (1982)
- [11] Horn B.K.P., Schunck B.G.: Determining Optical Flow. Artificial Intelligence, 17. (1981)
- [12] Longuet-Higgins H.C., Prazdny K.: The Interpretation of Moving Retinal Images. Proc. of the Royal Society of London B.208. (1981)
- [13] Nagel H.H.: On Change Detection and Displacement Vector Estimation in Image Sequences. Pattern Recognition Letters 1. (1982)
- [14] Prazdny K.: On the Information in Optical Flows. Computer Vision, Graphics and Image Processing 22. (1983)
- [15] Reichardt W., Poggio T.: Figure-ground Discrimination by Relative movement in the Visual System of the Fly. Biological Cybernetics 35. (1979)
- [16] Schunck B.G.: Motion Segmentation and Estimation. Ph.D thesis Massachusetts Institute of Technology. (1983)
- [17] Thompson W.B., Barnard S.T.: Lower-level Estimation and Interpretation of Visual Motion. IEEE Computer. (1981).

- [18] Ullman S.: The Interpretation of Visual Motion MIT. Press Cambridge and London (1979).
- [19] Ullman S.: Analysis of Visual Motion by Biological and computer Systems, IEEE Computer. (1981)
- [20] Polański A.: Algorytm wyznaczania parametrów ruchu na podstawie pola przemieszczeń. Praca przygotowana do druku.

Recenzent: Doc.dr inż. Bogdan Woźczak

Wpłynęło do Redakcji 2.01.1987 r.

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ СКОРОСТИ НА ОСНОВЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Р е з ю м е

В статье представлены методы определения поля скорости на основе наблюдения ряда образов. Методы эти подразделяют на две группы: первый метод нуждается в знании вектора скорости в некоторых точках образа и второй внимающий приближенные методы, но не требующий знания вектора скорости в никакой точке образа.

METHODS OF ASSIGNMENT OF THE VELOCITY FIELD BASING ON THE SEQUENCE OF IMAGES

S u m m a r y

Methods of velocity field assignment on the base of the observation of the sequence of images are presented. Two groups of methods are considered: in the first one the knowledge of the velocity vector in some points of the image is needed, in the second one the methods are approximate but the velocity vector should not be known in any point of the image. Formulae which enable numerical implementations of the methods on the computer are presented.