

Tadeusz STAROŃ

Politechnika Wrocławska

PRÓBA UJĘCIA ZACHODZĄCYCH DEFORMACJI W NARUSZONYM GÓROTWORZE
WEDŁUG MODELU SPRĘŻYSTO-LEPKO-PLASTYCZNEGO

Streszczenie. W artykule dokonano przeglądu stosowanych modeli mechanicznych do opisywania zachodzących deformacji w wyniku wyeksploatowania określonej objętości pokładu. Analiza tych modeli wykazała, że do opisywania zachodzących zjawisk w naruszonej górotworze najbardziej zbliżonych do rzeczywistych warunków jest przyjęcie modelu sprężysto-lepko-plastycznego. Podano podstawy teoretyczne dla wybranego modelu Bingham'a oraz algorytm rozwiązania problemów brzegowych. Na przykładzie podano zastosowanie praktyczne tego modelu. W zakończeniu artykułu przytoczono wnioski.

1. Wstęp

Schodzenie z eksploatacją górniczą na coraz większe głębokości - o mniej korzystnych niż na głębokościach mniejszych warunkach geotechnicznych obserwujemy wzrost intensywności deformacyjnych i dynamicznych przejawów ciśnienia górotworu wywołanych eksploatacją. Obserwacje przebiegu zjawisk zachodzących w górotworze naruszonej eksploatacją górniczą wskazują, że część deformacji skał występuje bezpośrednio po wyeksploatowaniu pokładu, ale końcowy stan deformacji ustala się dopiero po upływie pewnego czasu i daje się go ująć pod względem mechanicznym przez stosowanie postulatów reologii sformułowanych przez Reinera [13].

Nieodzowna jest tu znajomość mechanicznych własności ośrodka górotworu, przy uwzględnieniu wszystkich czynników (sprężystość, lepkość, plastyczność). Własności te determinują poprawne opisywanie zachodzących zjawisk w sąsiedztwie eksploatowanego pokładu.

Towarzyszące pokładom węgla skały złożone są z ośrodków anizotropowych, charakteryzujących się dużą zmiennością swoich własności, a zwłaszcza parametrów wytrzymałościowych. Anizotropia pierwotna w skałach jest wynikiem powstawania struktury polikrystalicznej materiału skalnego lub uporządkowania się struktury ośrodka w skałach osadowych oraz istnieniem powierzchni osłabienia [8]. Ogólnie anizotropie należy tutaj rozumieć jako zależności wytrzymałościowe od kierunku. W związku z tym wytrzymałość anizotropowego materiału np. w prostych stanach naprężenia nie są wielkościami skalarnymi a funkcjami kierunku [10]. W sensie wytrzymałościowym nie jest istotne, czy próbkę skalną przecina jedna płaszczyzna o osłabio-

nej wytrzymałości, czy próbka skalna przecięta jest przez cały system równoległych płaszczyzn osłabienia. Rozwiązanie to może więc obejmować różne typy anizotropii planetarnej, a mianowicie systemy płaszczyzn uwarstwienia, złupkowacenia, kławażu itp., a także pojedyncze płaszczyzny osłabienia, takie jak w skali mikro- pojedyncze szczeliny, natomiast w skali makro- płaszczyzny istniejących uskoków.

Badania wykazały, że wartości takich parametrów, jak: wytrzymałość, ścisnienie, rozciąganie itp., czy stałe sprężystości skał odpowiadające różnym kierunkom działania obciążenia względem tzw. płaszczyzn uprzywilejowanych np. uwarstwienia leminacji lub foliacji mogą różnić się liczbowo o kilka do kilkanaście razy. Podejmowane są próby opisu materiałów, których zachowanie jest silnie zdeterminowane przez efekty kruche. Opracowano wiele modeli do aproksymacji zachowania się ośrodku sprężystego i niesprężystego górotworu. Zachowanie się skał górotworu w zakresie obciążeń użytkowych jest szczególnie istotna w sąsiedztwie frontu eksploatacyjnego.

W trakcie obciążenia ośrodku jego kinetyka spękań silnie zmienia pierwotną strukturę materiału. Prowadzi to do zmiany charakterystyk materiałów w czasie deformacji (nieliniowość fizyczna). Ośrodki te są przy tym czułe na drogi w przestrzeni naprężeń, ponieważ przyrost i kierunki rozwoju szczelin zależą od stanu naprężenia. Obecnie przyjmuje się, że zniszczenie ośrodka jest wynikiem współdziałania szczelin równoległych do kierunku maksymalnego naprężenia ścisającego. Potwierdzają to obserwacje zarówno w skali laboratoryjnej, jak i w warunkach "in situ".

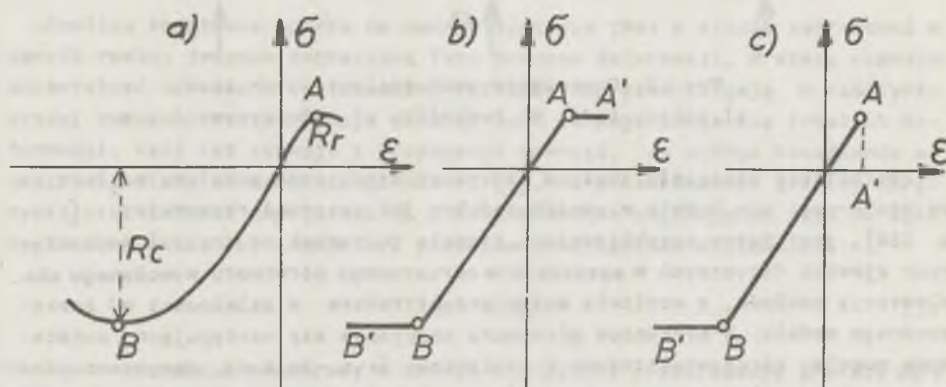
2. Opis zachowania się górotworu naruszonego eksploatacją przy zastosowaniu różnych modeli mechanicznych

2.1. Narużenie równowagi w górotworze wywołane eksploatacją górnictw

Po wyeksploatowaniu określonej objętości pokładu szczególnie z zawalem stropu zostaje naruszony na dużym obciążeniu i na znacznej wysokości pierwotny stan równowagi w górotworze. Stan ten przyczynia się do przemieszczeń cząstek górotworu do pustki poeksploatacyjnej. W wyniku uginania się i osiadania górotworu zachodzą istotne zmiany własności tworzących go skał szczególnie w rezultacie ich spękania. Dla ustalenia tych zjawisk od wielu lat prowadzone są podziemne badania nad mechanizmem zniszczenia i przemieszczania się warstw stropowych od eksploataowanego pokładu do powierzchni ziemi.

W celu zbadania przemieszczeń skał wyżej zalegających wykorzystywane są wyrobiska poziomów wyższych nad aktualnie wybieranym pokładem. Rezultaty dotychczasowych badań pozwalają na ustalenie stref naruszenia skał nadlagłych górotworu, a także stopnia jego zniszczenia. Najbardziej efektywnym sposobem badania mechanizmu zniszczenia próbek skał, szczególnie kostkowych, są obserwacje ich zachowania się w warunkach laboratoryjnych, a także w warunkach "in situ". Pozwoliły one przedstawić graficznie cha-

rakterystyki w układzie naprężenie - odkształcenie ($\sigma - \epsilon$) przy ich ścisnieniu i rozciąganiu. Takie badania "in situ" dużych próbek wyciętych bloków skał z górotworu dostarczyły ciekawych wyników w zakresie wytrzymałości ich w zależności od poprzecznych wymiarów zgniatanych bloków. Typową charakterystykę wytrzymałościową badanych laboratoryjnie próbek skał w układzie $\sigma - \epsilon$ przy ich ścisnieniu i rozciąganiu zobrazowano na wykresie (rys. 1a). Badania te pozwoliły na opracowanie charakterystyk aproksymujących zachowanie się skał przy ich ścisnieniu i rozciąganiu.



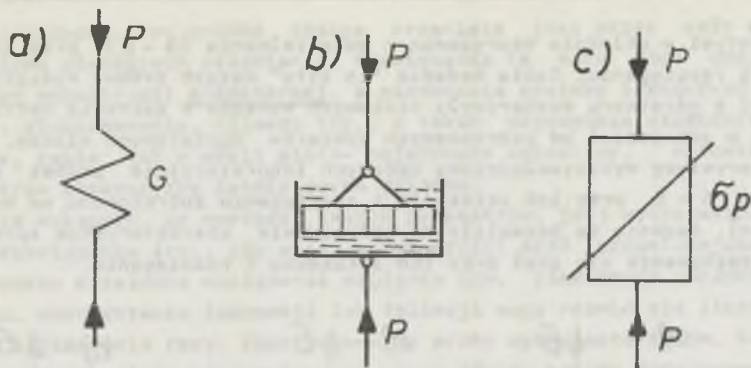
Rys. 1. Typowe krzywe $\sigma = f(\epsilon)$ przy ścisnieniu i rozciąganiu dla ośrodka (górotworu)

a - rzeczywista krzywa $\sigma = f(\epsilon)$, b - aproksymowana modelem idealnie plastycznym, c - aproksymowana modelem plastyczno-kruchym

Przykładem tu może być wyidealizowana charakterystyka $\sigma - \epsilon$ przy ścisnieniu i rozciąganiu skał plastycznych (rys. 1b) oraz skał kruchych (rys. 1c). Skały karbońskie są w zasadzie kruche, stąd dla ich prawidłowego opisu zachowania się adekwatna jest charakterystyka przedstawiona na rys. 1c. Uwzględniając wyżej wyszczególnione własności reologiczne oraz fakt, że odkształcenia są zależne od czasu, opracowano wiele modeli mechanicznych dla fizycznego opisu zachowania się naruszonego ośrodka.

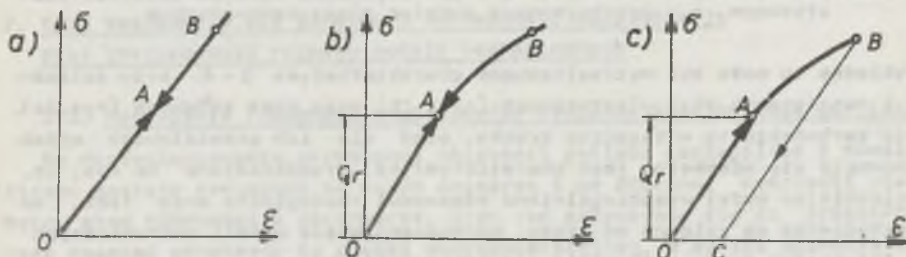
2.2. Przegląd stosowanych modeli do opisu deformacji górotworu

Z praktyki górniczej oraz badań laboratoryjnych wiadomo, że górotwór posiada własności plastyczne i reologiczne. Często do opisu zjawisk zachodzących w górotworze stosuje się różne modele mechaniczne. Składają się one z elementów, które nie mają odpowiedników w rzeczywistym materiale. Najprostsze z nich to: sprężyna (rys. 2a) obrazujące własności sprężyste ośrodka, cylinder z cieczą lepką, w którym porusza się perforowany tłok (rys. 2b) ilustrujący lepkość η oraz plastyczność σ_p uwzględniająca tarcie (rys. 2c).



Rys. 2. Oznaczenia cech reologicznych skał
a) sprężystość, b) lepkość; c) plastyczność

Zastąpienie materiału skały o nieznannej strukturze modelem, zakładając, że zachowywać się będzie w sposób podobny jak materiał rzeczywisty [13 - s. 136], jest dużym przybliżeniem. Pozwala to jednak na analizę zachodzących zjawisk fizycznych w sąsiedztwie naruszonego górotworu wywołanego eksploatacją pokładu, z możliwie dużym przybliżeniem w zależności od zastosowanego modelu. W mechanice górotworu przyjmuje się następujące podstawowe modele: sprężysto-liniowy i nieliniowy (rys. 3a i c), sprężysto-plastyczny (rys. 4), sprężysto-lepki (rys. 5) oraz sprężysto-lepko-plastyczny (rys. 6).



Rys. 3. Charakterystyki $\sigma = f(\varepsilon)$ dla różnych ośrodków
a) ośrodku liniowo-sprężystego, b) ośrodku nieliniowo-sprężystego odwracalnego, c) ośrodku nieliniowo-sprężystego nieodwracalnego

Dla opisu ośrodku liniowo-sprężystego (rys. 3a) zależność między naprężeniem (σ) i odkształceniem (ε) jest liniowa. Związek między naprężeniem a odkształceniem w przypadku jednoosiowego stanu naprężenia i odkształcenia określony jest prawem Hooke'a

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (1)$$

Jeżeli proces obciążenia $\sigma - \epsilon$ przebiega po krzywej (rys. 3b) i wszystkie pośrednie stany zachodzą w odwrotnym porządku, a w zakończeniu tego procesu jest osiągnięcie punktu O, zależność $\epsilon - \sigma$ jest również jednoznaczna, ale ośrodek taki będziemy nazywali nieliniowo-sprężystym lub fizycznie nieliniowym. Analitycznie naprężenia dla tego ośrodka określa zależność:

$$\sigma = E \cdot \epsilon + E_1 \epsilon^2 \quad (2)$$

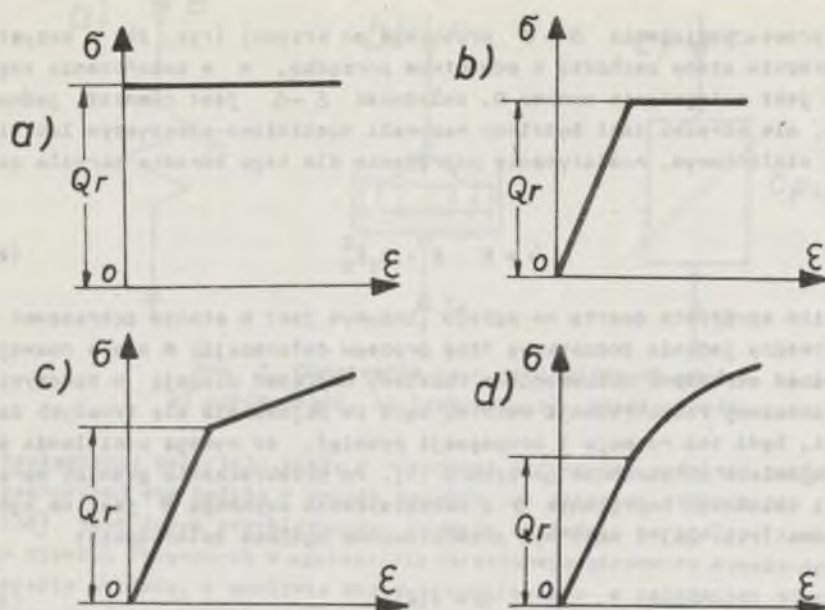
Analiza sprężysta oparta na modelu liniowym jest w stanie zobrazować w sposób realny jedynie początkową fazę procesu deformacji. W miarę rozwoju odkształceń określona obliczeniowo rozkład naprężeń ulegają w rzeczywistości znacznej redystrybucji wskutek bądź to pojawienia się trwałych deformacji, bądź też rozwoju i propagacji pęknięć, co wymaga uściślenia analizy zjawiska zniszczenia górotworu [5]. Po przekroczeniu granicy sprężystości zależność naprężenia σ i odkształcenia czynnego ϵ jest na ogół nieliniowa (rys. 3c) i może być przedstawiona ogólnie zależnością:

$$\sigma = f(\epsilon) \quad (3)$$

Stanem materiału w obszarze, w którym naprężenia przekraczają granicę sprężystości, czyli po pojawieniu się odkształceń trwałych, zajmuje się teoria plastyczności. Dla ścisłej analizy zachodzących naprężeń i odkształceń w strefie sprężysto-plastycznej opracowano wiele teorii opartych na różnych modelach matematyczno-mechanicznych.

Wyróżnić można następujące charakterystyki modeli materiału: sztywno idealnie plastyczny (rys. 4a), sprężysto idealnie plastyczny (rys. 4b), sprężysto-plastyczny ze wzmocnieniem liniowym (rys. 4c) i sprężysto-plastyczny ze wzmocnieniem nieliniowym (rys. 4d). Model sprężysto sztywno plastyczny (rys. 4a) zakłada nieograniczoną ciągliwość materiału, dopuszczając jednocześnie możliwość występowania odkształceń trwałych i zależność cech wytrzymałościowych od ciśnienia hydrostatycznego. Z kolei jednak dla szerokiej klasy materiałów kruchych, takich jak np. beton, skały, zniszczenie przy działaniu rozciągającym następuje w zakresie małych odkształceń sprężystych. W tym przypadku bardziej realnym jest wyidealizowany model krucho plastyczny [8, 9], obrazujący w zakresie rozciągania spadek wytrzymałości do zera po osiągnięciu wartości granicy σ_r .

Zastosowanie w górnictwie modelu sprężysto-idealnie plastycznego [9] do opisu deformacji naruszonego górotworu jest pewnym przybliżeniem do warunków rzeczywistych w analitycznym opisie zachowania się górotworu w fazie sprężystej i plastycznej, uwzględniając przy tym dwa ciała Coulomba i warstwowość ośrodka. Prace w zakresie anizotropii są prowadzone i w najbliższych latach należy oczekiwać znacznego postępu w tym zakresie.

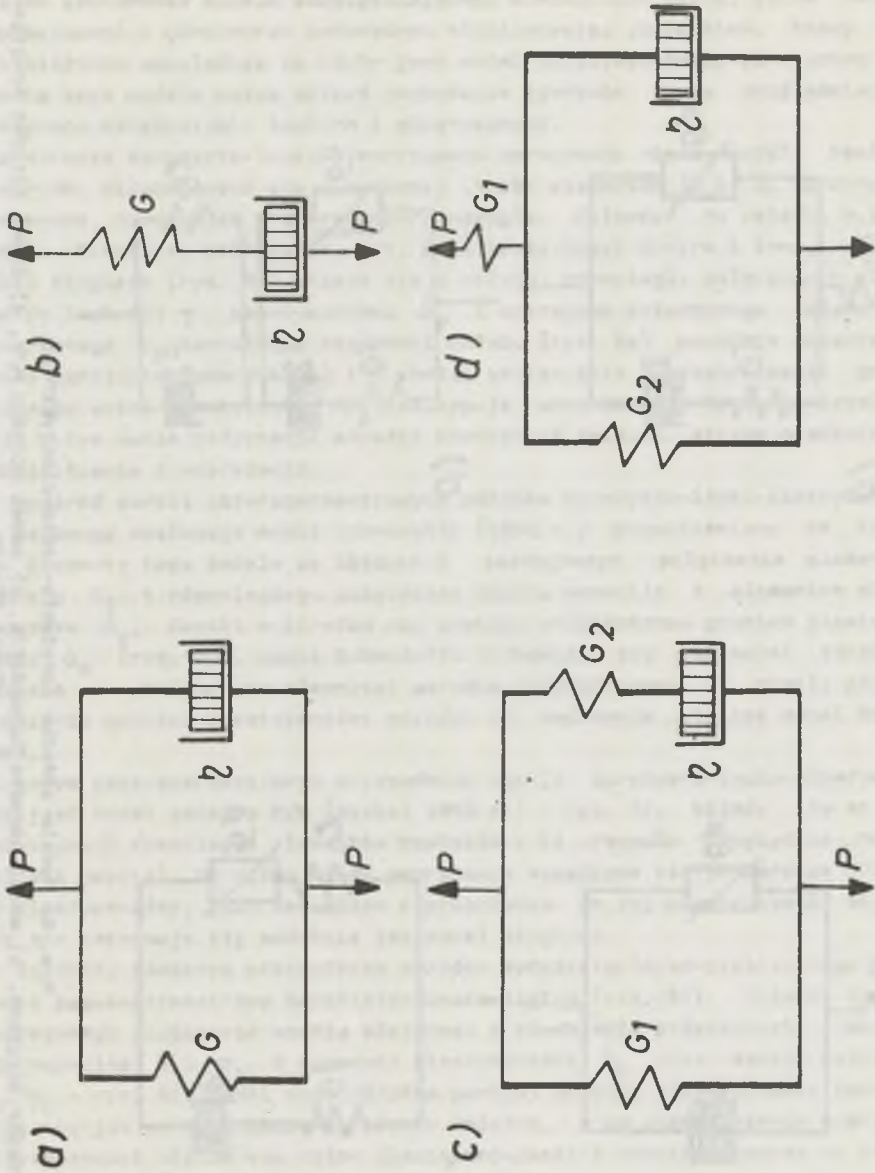


Rys. 4. Charakterystyki $\sigma = f(\epsilon)$ ośrodka sprężysto-plastycznego
 a) sztywny idealnie plastyczny, b) sprężysto idealnie plastyczny, c) sprężysto-plastyczny ze wzmocnieniem liniowym, d) sprężysto-plastyczny z nieliniowym wzmocnieniem

W ostatnich 30 latach w mechanice górotworu do opisu deformacji skał wywołanych eksploatacją złoża powszechnie zaczęto stosować model Kelvina (rys. 5a), model Maxwella (rys. 5b) oraz model standard w odmianie Poynting-Thomsona (rys. 5c) i Zenera (rys. 5d). Modele te składają się ze sprężyny (sprężyn) i cylindra z cieczą lepką, w którym porusza się perforowany tłok. Te dwa elementy są składane równolegle (model Kelvina), szeregowo (model Maxwella) i szeregowo-równoległe (model standard).

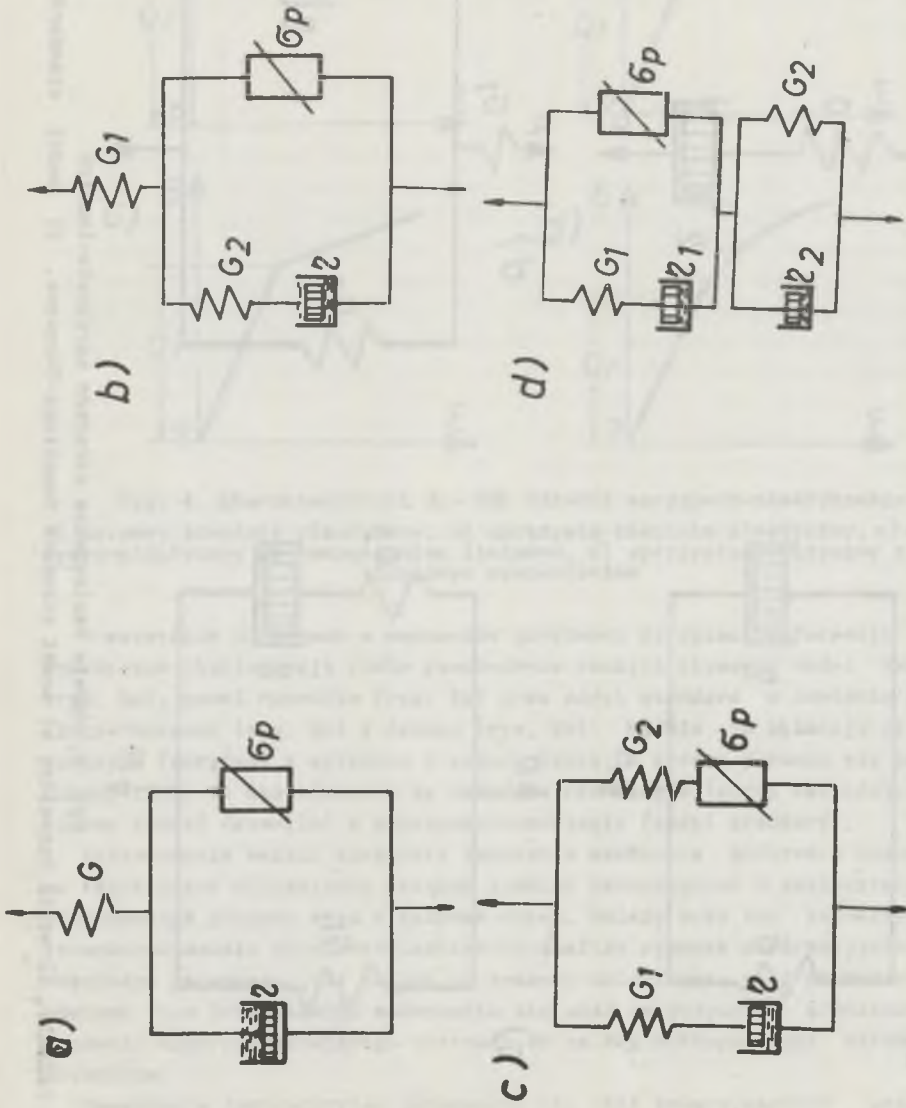
Zastosowanie modeli sprężysto-lepkich w mechanice górotworu pozwoliło na teoretyczne wyjaśnianie szeregu zjawisk zachodzących w sąsiedztwie eksploатовanego pokładu wraz z upływem czasu. Należy przy tym zaznaczyć, że stosowanie modeli sprężysto-lepkich do analizy zjawisk deformacyjnych naruszonego górotworu jest realne do momentu zniszczenia skał górotworu. Odpowiada to w przybliżeniu zachowaniu się skał związanych w granicach naprężenia nieprzekraczającego wartości 80 do 90% wytrzymałości ośrodka na ściskanie.

Obserwacje laboratoryjne zachowania się skał towarzyszących pokładom węgla, szczególnie do momentu ich zniszczenia, stworzyły przesłanki do wnikliwego śledzenia zachowania się skał wywołanych podziemną eksploatacją złóż.



Rys. 5. Modele reologiczne ósrodków sprężysto-lepkich

a) model Kelvina, b) model Maxwella, c) model standard Poyntings-Thomsona, d) model standard Zenera



Rys. 6. Modele ośrodków eprężysto-lepko-plastycznego
 a) model ośrodków Bingham'a, b) model ośrodków Schwedoffa, c) model ośrodków M/V, d) model ośrodków Schofielda-
 -Scott Blaira

W celu uściślenia opisu rzeczywistego zachowania się skał zaistniała potrzeba zbudowania modelu uwzględniającego stwierdzone cechy, jakie można zaobserwować w górotworze naruszonym eksploatacją. Ośrodkiem, który w przybliżeniu uwzględni te cechy jest model sprężysto-lepko-plastyczny. Za pomocą tego modelu można opisać zachodzące zjawiska przy uwzględnieniu własności sprężystych, lepkich i plastycznych.

Dla ośrodka sprężysto-lepko-plastycznego opracowano wiele modeli reologicznych, składających się z większej liczby elementów (3 do 5), łączonych szeregowo, równolegle i szeregowo-równolegle. Zaliczyć tu należy m.in. modele: Bingham, Schwedoffa, M/V, Schefleida-Scott Blaira i inne.

Model Bingham (rys. 6a) składa się z układu: równolegle połączonych elementów lepkości η , plastyczności σ_p i szeregowo dołączonego elementu sprężystego G . Naruszenie równowagi układu (rys. 6a) powoduje odkształcenia sprężyste (odwracalne) i z chwilą osiągnięcia i przekroczenia granicznego stanu plastycznego σ_p następuje uruchomienia lepko-sprężystości. W tym stanie deformacji ośrodka obowiązuje związek między prędkością odkształcenia i naprężenia.

Śród modeli czteroparametrowych ośrodka sprężysto-lepko-plastycznego na uwagę zasługuje model Schwedoffa (1890 r.) przedstawiony na rys. 6b. Elementy tego modelu są złożone z szeregowego połączenia elementu Hooke'a G_1 i równoległego połączenia modelu Maxwella z elementem plastycznym σ_p . Dopóki w ośrodku nie zostaje przekroczona granica plastyczności σ_p (rys. 6b), model Schwedoffa zachowuje się jak model ośrodka Hooke'a, a model M/V ma własności ośrodka standardowego. Z chwilą przekroczenia granicy plastyczności ośrodek ten zachowuje się jak model Bingham.

Innym czteroparametrowym przypadkiem modelu sprężysto-lepko-plastycznym jest model ośrodka M/V (Kisiel 1958 r.) - rys. 6c. Składa się on z połączonych równolegle elementów Maxwella i St.-Venauza (względnie Maxwella i Hubara). Do czasu kiedy naprężenie wypadkowe nie przekracza granicy plastyczności, jest ośrodkiem standardowym. Po jej przekroczeniu ośrodek ten zachowuje się podobnie jak model Bingham.

Bardziej złożonym przypadkiem ośrodka sprężysto-lepko-plastycznego jest model pięcioparametrowy Schefleida-Scott Blaira (rys. 6d). Składa się z szeregowego połączenia modelu złożonego z równolegle połączonych elementów Maxwella G_1, η_1 i elementu plastyczności σ_p oraz modelu Kelvina G_2, η_2 - rys. 6d. Model tego ośrodka poniżej granicy plastyczności zachowuje się jak ośrodek lepko-sprężysty Kelvina, a po przekroczeniu granicy plastyczności włącza się człon plastyczno-lepki i wówczas spełnia on własności ośrodka sprężysto-lepko-plastycznego.

2.3. Analiza modeli i adekwatność ich stosowania do opisu zachowania się naruszonego górotworu

Dokonany przegląd stosowanych modeli mechanicznych do opisu zjawisk zachodzących w sąsiedztwie eksploatowanego pokładu wykazują cały szereg parametrów mających wpływ na teoretyczne ujęcie tych zjawisk. Przyjmowanie, że skały zachowują się liniowo-sprężysto jest dalece odbiegające od warunków rzeczywistych. Stosowanie prawa Hooke'a nie znajduje tu potwierdzenia. Za powyższym stwierdzeniem przemawia zaobserwowane laboratoryjnie zachowanie się skał przy ich ścisaniu i rozciąganiu. W zakresie naprężeń ściskających wykres zależności $\sigma = f(\epsilon)$ jest linię krzywą, a w zakresie rozciągania skały te wykazują nieznaczną wytrzymałość i ulegają natychmiastowemu zniszczeniu przy nieznacznym obciążeniu. Ustalono, że dopóki naprężenia nie przekraczają wartości granicznych σ_p , dopóty ośrodek ten zachowuje się jak materiał sprężysty. Gdy naprężenia osiągną wartość σ_p , materiał płynie w taki szczególny sposób, że nie może on przemieścić obciążenia większego od granicznego σ_p (granicy plastyczności).

Krok naprzód w kierunku uściślenia opisu plastycznego płynięcia materiału oraz kruchego niszczenia stanowi zastosowanie wyidealizowanych modeli sprężysto-plastycznych. Pozwoliły one opisywać zachodzące zjawiska w sąsiedztwie eksploatowanego pokładu, nie uwzględniając czynnika czasu który jednak odgrywa duże znaczenie w procesie deformacji górotworu.

Na małych głębokościach, gdzie górotwór zachowuje się jak ośrodek czysto sprężysty lub plastyczny, wielkość ciśnienia eksploatacyjnego jest niewielka, ponieważ deformacje górotworu też są bardzo małe.

Na średnich głębokościach górotwór wykazuje cechy ośrodka Kelvina, charakteryzującego się opóźnioną sprężystością czy plastycznością. Przemieszczenie jego stopniowo rośnie do określonej wartości, wykazując niejednokrotnie większe ciśnienie od ciśnienia statycznego. Na dużych głębokościach zachowanie się górotworu, zbudowanego np. z soli kamiennych lub łupków i glin plastycznych, odpowiada ośrodkowi Maxwella lub Bingham'a w którym przemieszczenia osiągają teoretycznie wartości nieskończone. Występuje zjawisko zwane pełzaniem, a ciśnienie na podszkawkę, według badań A.D. Pawłowa, K.W. Ruppenneißa i J.M. Libermana, osiąga wartości naprężeń pierwotnych. Modele Kelvina i Maxwella tylko częściowo odpowiadają reologicznym własnościom skał, które związane są ze zjawiskiem pełzania (tj. przyrostu odkształcenia w czasie przy stałym naprężeniu); model Maxwella odpowiada tym własnościom skał, które są związane ze zjawiskiem relaksacji (tj. samoodprężenia się w czasie przy stałym odkształceniu). Dlatego też w ostatnim czasie oczy naukowców zwróciły się w kierunku modelu standard. Interesujące są tu badania H. Fileka [15]. Przeprowadził on doświadczenia ze ścisania próbek piaskowca, łupku piaszczystego, łupku ilastego, węgla brunatnego i soli kamiennych. Doświadczenia były przeprowadzone w dwójki sposób:

- ze stałą prędkością zmiany naprężeń

$$\frac{d\sigma}{dt} = \text{const} \quad (4)$$

- przy stałej wartości naprężenia

$$\dot{\epsilon} = \text{const} \quad (5)$$

Pierwsze wyniki doświadczeń potwierdziły pod względem jakościowym model Poyntinga-Thomsona, który odpowiada podstawowym reologicznym własnościom górotworu, tj.

- zdolność do odkształceń sprężystych,
- zdolność do pełzania,
- zdolność do relaksacji naprężeń.

Prace te potwierdziły również prawidłowość reologicznej hipotezy wytrzymałościowej o przekroczeniu przez próbkę stanu krytycznego stan zniszczenia próbki) - decyduje praca odkształcenia wykonana przez siły zewnętrzne podczas obciążenia próbki. Praca ta jest równa ilości energii wewnętrznej, którą próbka zyskuje podczas jej obciążenia [14]. Kiedy model standard opisuje poprawnie zachodzące zjawiska w górotworze wraz z wpływem czasu do chwili ich zniszczenia, to model sprężysto-lepko-plastyczny przewiduje trwałe doformacje po przekroczeniu granicy plastyczności.

W warunkach podziemnej eksploatacji złóż z zawałem stropu w sąsiedztwie frontu eksploatacyjnego po przekroczeniu granicy plastyczności tworzy się strefa plastyczna o określonym zasięgu, a dalej strefa spękań. Z badań laboratoryjnych wynika, że strefa sprężysta występuje w górotworze w obszarze kiedy $\dot{\epsilon}_z \leq 50\% R_c$ wartości, przy $\dot{\epsilon}_z \leq 50-80\% R_c$ zachodzą zjawiska sprężysto-lepko-plastyczne, natomiast przy $\dot{\epsilon}_z > 85\% R_c$ po pewnym czasie próba ulega zniszczeniu.

Górotwór wokół wyrobiska górniczego zawsze (lub prawie zawsze) pracuje w zakresie niesprężystym, nie mówiąc o tym, że jest on prawie zawsze spękany i proces ten postępuje w głąb calizny. Przyczyną tego jest fakt, że ciśnienia wywierane w górotworze (np. na strefę wokół frontu eksploatacji) są na ogół większe od tych jakie dopuszczają sprężysty rozkład naprężenia i przemieszczenia. Prowadzone badania nad modelem opisu górotworu sprężysto-plastyczno-lepkim np. Bingham'a są w fazie początkowych zastosowań przy uwzględnieniu jednej powierzchni potencjalnej gładkiej [12] i z kilkoma osobliwymi powierzchniami plastycznymi [11].

Omówione wyżej modele reologiczne są w pewnym sensie uogólnieniem modelu Bingham'a. Z uwagi na prostotę w dalszych rozważaniach ograniczono się do rozwiązań zagadnień brzegowych w górotworze według modelu Bingham'a.

3. Ośrodek sprężysto-lepko-plastyczny Bingham

Dla jednowymiarowego stanu naprężenia i odkształcenia modelu Bingham przedstawionego na rys. 6a, mechaniczne zachowanie się tego modelu może być opisane równaniem konstytutywnym na prędkość odkształcenia postaciowego

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{\tau}{|\tau|} \frac{|\tau| - G_p}{\eta}, \quad \text{przy } |\tau| > G_p, \quad (6)$$

gdzie:

- τ - naprężenia styczne,
- G_p - dodatnio określona granica plastyczności,
- G - współczynnik odkształcenia postaciowego sprężystego,
- η - współczynnik lepkości Newtona.

Z równania (6) wynika, że po przekroczeniu granicy plastyczności prędkość odkształcenia postaciowego $\dot{\epsilon}$ jest sumą członu odpowiadającego odkształceniu sprężystemu i członu odpowiadającego odkształceniu lepko-plastycznemu. Zakładając, że $\tau > G_p$ po wykonaniu odpowiednich przekształceń, otrzymujemy:

$$\tau = \frac{G_p \cdot G}{\eta + G} + \dot{\epsilon} \frac{\eta + G}{\eta + G} \quad (7)$$

W przypadku kiedy naprężenie styczne jest poniżej granicy plastyczności, prędkość odkształcenia postaciowego redukuje się do członu odkształcenia sprężystego. Dla obszaru $|\tau| < G_p$ otrzymamy

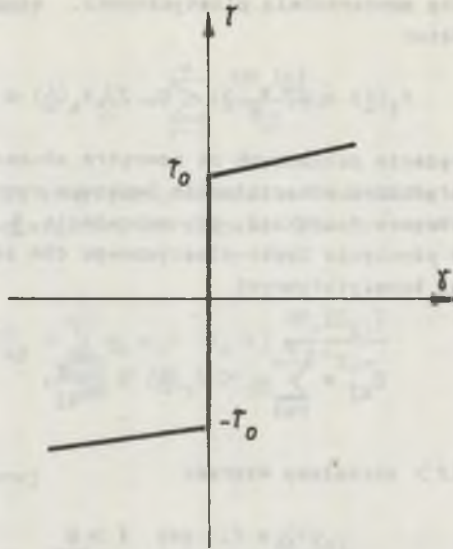
$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\tau}}{G} \quad (8)$$

Wykres zależności prędkości odkształcenia postaciowego od naprężenia stycznego (z uwzględnieniem granicy plastycznej) przedstawiono na rys. 7.

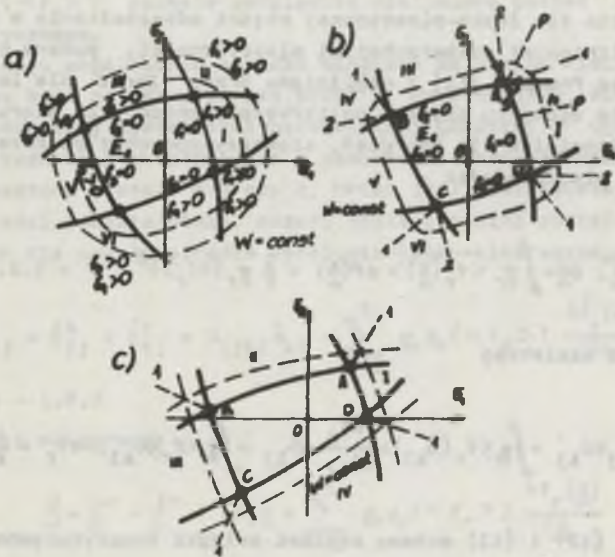
Poniżej przedstawiono podstawy teoretyczne dla ośrodka sprężysto-lepko-plastycznego z osobliwymi powierzchniami plastycznymi, sformułowane w pracy Z. Mroza i Sharmaka [11].

3.1. Podstawy teoretyczne dla wybranego modelu

Modela ośrodka sprężysto-lepko-plastycznego i sztywno-lepko-plastycznego z osobliwymi powierzchniami plastyczności omówiono w pracy [11]. Rozpatrujemy materiał, którego właściwości lepko-plastyczne określone są osobliwymi powierzchniami plastyczności, złożonymi z kilku powierzchni analitycznych lub płaszczyzn wzajemnie się przecinających (rys. 8). Obszar sprężystej względnie sztywnej deformacji jest ograniczony najbardziej wew-



Rys. 7. Wykres zależności prędkości odkształcenia postaciowego od naprężeń dla modelu ośrodka Bingham



Rys. 8. Prawo płynięcia i kontury stałych visko-plastycznych dla trzech różnych praw wg [11]

nętrzną nie gładką powierzchnią plastyczności, złożoną z płatów ciągłych powierzchni gładkich

$$f_1(\underline{\sigma}) \leq 0, f_2(\underline{\sigma}) \leq 0, \dots, f_k(\underline{\sigma}) \leq 0 \quad (9)$$

Dla punktów naprężenia położonych na zewnątrz obszaru sprężystego względnie sztywnego, prędkości odkształcenia lepkiego rosną wraz z odległością od granic tego obszaru i znikają, gdy naprężenie $\underline{\sigma}$ spełnia warunki (9). Uogólnienie praw płynięcia lepko-plastycznego dla ośrodka Bingham'a można wyrazić związkami konstytutywnymi

$$\dot{\epsilon}_{ij}^v = \sum_{r=1}^s \eta_r \langle f_r(\underline{\sigma}) \rangle \frac{\partial f_r}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (10)$$

gdzie symbole $\langle f \rangle$ określamy wzorami

$$\langle f \rangle = f, \quad \text{gdy } f \geq 0$$

oraz

$$\langle f \rangle = 0, \quad \text{gdy } f < 0 \quad (11)$$

zaś η_r jest stałą materiałową nazywaną parametrem płynności ("fluididity").

Prawo płynięcia dla lepko-plastycznej części odkształcenia w postaci (10), z odcinkowo liniowymi powierzchniami plastyczności, podane były po raz pierwszy przez Pragera [11] i uogólnione przez Zarka dla lepko-plastycznego płynięcia agregatu cząstek polikrystalicznych. Ze wzoru (10) wynika istnienia potencjałów dla naprężeń, stowarzyszonych z poszczególnymi powierzchniami plastyczności

$$w_r(\underline{\sigma}) = \int_{\underline{\sigma}}^{\underline{\sigma}} \dot{\epsilon}_{ij}^v d\sigma_{ij} = \int \eta_r \langle f_r(\underline{\sigma}) \rangle df_r(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2} \eta_r \langle f_r \rangle^2, \quad r = 1, 2, \dots, s \quad (12)$$

lub w relacji skalarnej

$$w_r(\sigma_{kl}) = \int \dot{\epsilon}_{ij}^v d\sigma_{ij} = \int \eta_r \langle f_r(\sigma_{kl}) \rangle \frac{\partial f_r}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = \int \eta_r \langle f_r(\sigma_{kl}) \rangle df_r = \frac{1}{2} \eta_r \langle f_r \rangle^2 \quad (13)$$

Na podstawie (12) i (13) możemy napisać związki konstytutywne w postaci skalarnej

$$\dot{\epsilon}_{ij}^v = \sum_{r=1}^s \frac{\partial w_r(\sigma_{kl})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (14)$$

lub w notacji wektorowej

$$\dot{\underline{\epsilon}}^v = \sum_{r=1}^n \frac{\partial W_r(\underline{\epsilon})}{\partial \underline{\epsilon}} \quad (15)$$

Bardziej ogólne związki konstytutywne modelu ośrodka lepko-plastycznego mają postać nieliniową względem potencjałów plastycznych $f_r(\underline{\epsilon})$, a mianowicie

$$\dot{\epsilon}_{1j}^v = \sum_{r=1}^n \sigma_r \phi_r(\langle f_r \rangle) \frac{\partial f_r(\underline{\epsilon}_{kl})}{\partial \epsilon_{1j}} \quad (16)$$

$1, j, k, l = 1, 2, 3$

lub w notacji wektorowej

$$\dot{\underline{\epsilon}}^v = \sum_{r=1}^n \sigma_r \phi_r(\langle f_r \rangle) \frac{\partial f_r(\underline{\epsilon})}{\partial \underline{\epsilon}}, \quad (17)$$

gdzie: $\phi_r(\langle f_r \rangle) = 0$ gdy $\langle f_r \rangle = 0$.

Funkcja $\phi_r(\langle f_r \rangle)$ pozwala uwzględnić nieliniową postać praw płynięcia lepko-plastycznego.

Tego rodzaju uogólnienie ośrodka Binghama ma postać nieliniowych związków i podano było po raz pierwszy przez P. Perzynie [12], ale z ograniczeniem do pojedynczej powierzchni potencjalnej gładkiej. Ogólna analiza lepko-plastycznych praw płynięcia z osobliwymi powierzchniami plastycznymi przeprowadzona została w pracy Z. Mroza [11]. Uwzględniając część sprężystą prędkości odkształcenia, możemy napisać ogólną postać związków konstytutywnych dla modelu ośrodka sprężysto-lepko-plastycznego w postaci:

$$\dot{\epsilon}_{1j} = \dot{\epsilon}_{1j}^e + \dot{\epsilon}_{1j}^v = B_{1jkl} \dot{\epsilon}_{kl} + \sum_{r=1}^n \sigma_r \phi_r(\langle f_r \rangle) \frac{\partial f_r(\underline{\epsilon}_{mn})}{\partial \epsilon_{1j}} \quad (18)$$

$1, j, k, l, m, n = 1, 2, 3$

lub w relacji wektorowej

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \dot{\underline{\epsilon}}^e + \dot{\underline{\epsilon}}^v = [B] \dot{\underline{\epsilon}} + \sum_{r=1}^n \sigma_r \phi_r(\langle f_r \rangle) \frac{\partial f_r(\underline{\epsilon})}{\partial \underline{\epsilon}} \quad (19)$$

Dla ciała sztywno-lepko-plastycznego związki konstytutywne mają postać:

$$\dot{\underline{\epsilon}}_{1j} = \dot{\epsilon}_{1j}^v = \sum_{r=1}^n \sigma_r \phi_r(\langle f_r \rangle) \frac{\partial f_r(\underline{\epsilon}_{mn})}{\partial \epsilon_{1j}} \quad (20)$$

tj. gdy pomijamy część sprężystą prędkości odkształcenia, przyjmując, że $\dot{\epsilon}_{ij}^0 \approx 0$.

W równaniu (18) macierz B_{ijkl} jest macierzą modułów sprężystych, w przypadku ciała izotropowego mamy

$$B_{ijkl} = \frac{1+\nu}{E} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (21)$$

Uwaga: δ_{ij} - symbol Kronockera, tj. $\delta_{ij} = 1$ dla $i=j$ oraz $\delta_{ij} = 0$ dla $i \neq j$.

Podstawiając do równania (18) zależność (21), otrzymujemy równanie dla modelu sprężysto-lepko-plastycznego

$$\dot{\epsilon}_{ij}^v = \left[\frac{1+\nu}{E} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl} \right] \dot{\epsilon}_{kl} + \sum_{r=1}^n \varphi_r \phi_r(\langle f_r \rangle) \frac{\partial \varphi_r(\delta_{ij})}{\partial \delta_{ij}} \quad (22)$$

3.2. Algorytm rozwiązania problemów brzegowych

Warunek plastyczności Coulomba dla płaskiego stanu odkształcenia opisyje się dalej podanymi równaniami. W przypadku płaskiego stanu odkształcenia warunek Coulomba-Treski jest reprezentowany przez dwie linie o równaniach

$$f_1 = \frac{1}{2c \cos \varphi} (\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{1}{2c} (\sigma_1 + \sigma_2) \operatorname{tg} \varphi - 1 = 0, \quad \sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2 \quad (23)$$

$$f_2 = \frac{1}{2c \cos \varphi} (\sigma_2 - \sigma_1) + \frac{1}{2c} (\sigma_1 + \sigma_2) \operatorname{tg} \varphi - 1 = 0, \quad \sigma_2 > \sigma_3 > \sigma_1$$

Linie f_1 i f_2 przecinają się w punkcie B, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = c \operatorname{ctg} \varphi$ (rys. 9a).

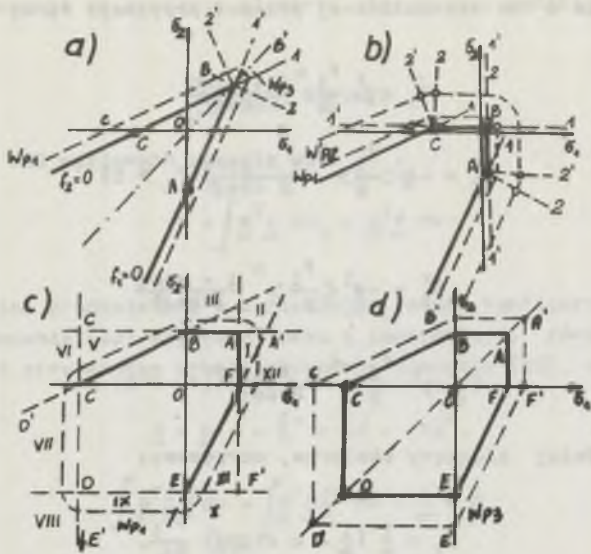
Dla opisu zachowania się ośrodka sztywno-lepko-plastycznego przyjmuje się potencjał naprężeń w następującej postaci potęgowej:

$$W_1(\sigma) = \frac{c}{n+1} \varphi \langle f_1 \rangle^{n+1} \quad (24)$$

Stosując warunek Coulomba bez obciążenia w obszarze rozciągania, otrzymujemy następujące wielkości prędkości odkształceń lepkich dla naroża (rys. 9a)

$$\dot{\epsilon}_1^v = \frac{\partial W_1}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial W_2}{\partial \sigma_1} = \varphi \left[\langle f_1 \rangle^n \frac{1+\sin \varphi}{2 \cos \varphi} - \langle f_2 \rangle^n \frac{1-\sin \varphi}{2 \cos \varphi} \right] \quad (25)$$

$$\dot{\epsilon}_2^v = \frac{\partial W_1}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial W_2}{\partial \sigma_2} = \varphi \left[-\langle f_1 \rangle^n \frac{1-\sin \varphi}{2 \cos \varphi} + \langle f_2 \rangle^n \frac{1+\sin \varphi}{2 \cos \varphi} \right]$$



Rys. 9. Wykres płynięcia i powierzchnie potencjalne

a) warunek Coulomba w płaskim stanie odkształcenia, b) warunek Coulomba w płaskim stanie odkształcenia z obciążeniami w obszarze rozciągania, c,d) - powierzchnie osłabienia i granice potencjału dla V_p-1 i V_p-3 w przypadku płaskiego stanu naprężeń

W przypadku materiału kruchego (rys. 9b) warunek płynięcia przyjmuje postać:

$$\dot{\epsilon}_1^v = \gamma^v d^{n-1} \left(\frac{\sigma_1}{c \operatorname{ctg} \varphi} - 1 \right), \quad \dot{\epsilon}_2^v = \sigma^v d^{n-1} \left(\frac{\sigma_2}{c \operatorname{ctg} \varphi} - 1 \right) \quad (26)$$

$$d = \left[\left(\frac{\sigma_1}{c \operatorname{ctg} \varphi} - 1 \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{c \operatorname{ctg} \varphi} - 1 \right)^2 \right]^{1/2}$$

Idąc za myślą Z. Mroza i wsp. [11], stosunek bezwymiarowej odległości między punktem naprężeń i powierzchnią płynięcia h/c , jest obliczany wektor skalarny ze wzoru

$$\frac{h}{c} = \frac{1}{g} \left[\left(\sigma_1 \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} + \sigma_2 \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \right) - 1 \right] = \frac{f}{g}$$

gdzie: g oznacza moduł wektora

$$g = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi)^{1/2} \quad (27)$$

Prawo płynięcia w tak sformułowanej postaci przyjmuje formę

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_1^v &= -\gamma^1 \left\langle \frac{f_1}{g} \right\rangle^n \frac{1 + \sin\varphi}{2\cos\varphi} \\ \dot{\epsilon}_2^v &= -\gamma^1 \left\langle \frac{f_1}{g} \right\rangle^n \frac{1 - \sin\varphi}{2\cos\varphi} (f_1 > 0)\end{aligned}\quad (28)$$

i

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_1^v &= -\gamma^1 \left\langle \frac{f_1}{g} \right\rangle^n \frac{1 - \sin\varphi}{2\cos\varphi} \\ \dot{\epsilon}_2^v &= -\gamma^1 \left\langle \frac{f_2}{g} \right\rangle^n \frac{1 + \sin\varphi}{2\cos\varphi} (f_2 > 0)\end{aligned}$$

Wprowadzając dalej iloczyny skalarne, otrzymamy:

$$\begin{aligned}m_1 &= \frac{1}{g} (\underline{c} - c \operatorname{ctg}\varphi \underline{\delta}) \frac{\partial f_1}{\partial \underline{\delta}}, \\ m_2 &= \frac{1}{g} (\underline{c} - c \operatorname{ctg}\varphi \underline{\delta}) \frac{\partial f_2}{\partial \underline{\delta}},\end{aligned}\quad (30)$$

gdzie $\underline{\delta}$ oznacza wektor $\underline{\delta} = (1, 1)$, możemy rozważyć następujące przypadki. Przypadek pierwszy, kiedy $m_1 > 0$ i $m_2 < 0$, wówczas opisujemy zachowanie lepko-plastyczne w narożu (rys. 9a). W przypadku gdy $m_1 > 0$ i $m_2 < 0$ lub $m_2 > 0$ i $m_1 < 0$, wówczas znajdziemy się na jednej powierzchni lepko-plastycznej. Kiedy $m_1 < 0$ i $m_2 < 0$, wówczas znajdziemy się w obszarze plastycznego odciążenia.

3.3. Wyznaczenie zasięgu strefy zniszczenia

Podobnie jak dla innych wyżej omówionych modeli, także dla analizowanego modelu sztywno-lepko-plastycznego, przy wyznaczeniu zasięgu strefy plastycznej (zniszczenia) zastosowano numeryczną technikę obliczeniową. Zastosowano metodę elementów skończonych opracowaną przez O.G. Zienkiewicza [11].

Oznaczając wektor przemieszczeń węzła elementu, mamy następujące wyrażenia:

$$u = N\delta, \quad \epsilon = B\delta \quad (31)$$

i równanie na pracę wirtualną w postaci

$$\int_{\underline{a}_1} \underline{u}^T \underline{\dot{\epsilon}} \, d\underline{a}_1 + \int_{\underline{a}_2} \underline{u}^T \underline{\dot{\epsilon}} \, d\underline{v} = \int_{\underline{a}_2} \underline{B}^T \underline{\dot{\delta}} \, d\underline{v} \quad (32)$$

Równanie równowagi na poziomie elementu otrzymujemy podstawiając (31) do (30)

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \underline{\underline{\sigma}} dv - \underline{\underline{R}} = 0, \quad (33)$$

gdzie wektor sił węzłowych określa wzór

$$\underline{\underline{R}} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \underline{\underline{t}} dS_1 + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \underline{\underline{f}} dv \quad (34)$$

Stosując postać prędkościową i zaniedbując zmiany konfiguracji możemy zróżniczkować równanie (32) względem czasu i podstawiając równanie konstytutywne (35) do otrzymanego zróżniczkowanego równania (32), otrzymujemy (36)

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{D}}(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^V = \underline{\underline{D}}\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \underline{\underline{D}}\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^V, \quad (35)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} dv = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^V dv + \underline{\underline{\dot{R}}} = \underline{\underline{\dot{F}}}, \quad (36)$$

gdzie:

$\underline{\underline{D}}$ - sprężysta macierz sztywności,

$\underline{\underline{F}}$ - oznacza prędkość całkowitych sił.

Ze wzorów (36) i (31) otrzymujemy następujące wzory dla prędkości przemieszczeń węzłowych:

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{\dot{\delta}}} - \underline{\underline{F}} = 0, \quad \underline{\underline{K}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \underline{\underline{D}} \mathbf{B} dv \quad (37)$$

Procedura bezpośredniego rozwiązania była zastosowana do rozwiązań równań (37), czyli dla każdego kroku czasowego $n+1$ są obliczone następujące zależności:

$$\underline{\underline{\dot{\delta}}}_{n+1} = \underline{\underline{\dot{\delta}}}_n + \underline{\underline{\dot{\delta}}}_n^V \Delta t_n$$

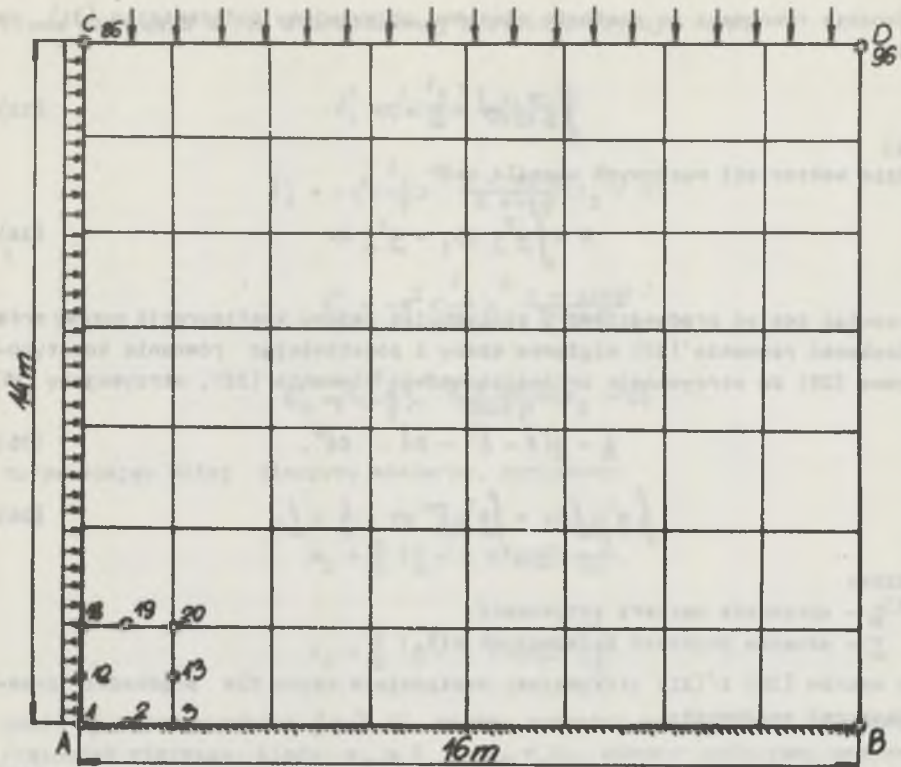
$$\underline{\underline{R}}_{n+1} = \underline{\underline{R}}_n + \underline{\underline{\dot{R}}}_n \Delta t_n \quad (38)$$

$$\underline{\underline{F}}_{n+1} = \underline{\underline{F}}_n + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_n^V \Delta t_n + \underline{\underline{\dot{F}}}_n \Delta t_n$$

Krok musiał być dostatecznie mały dla zachowania numerycznej stabilności równań.

P r z y k ł - a d

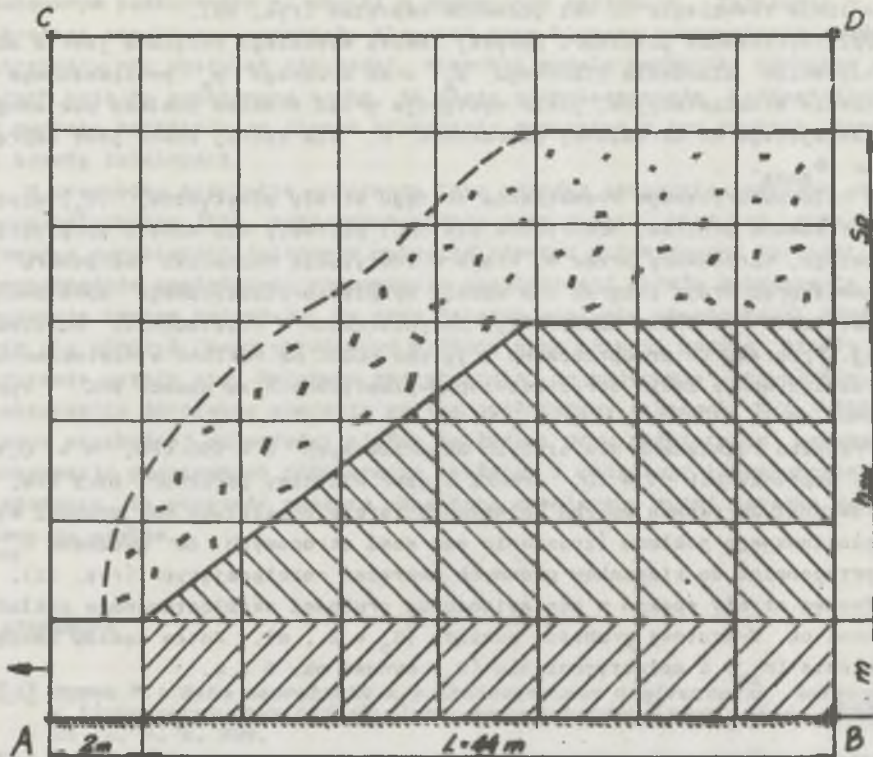
Rozważmy płaski stan odkształceń tarczy górotworu o podstawie $AB = 16$ m i wysokości $BC = 14$ m (rys. 10), obciążonej równomiernym ciśnieniem



Rys. 10. Obciążenie wyciętej tarczy oraz podział na elementy skończone (czworokątne) w płaskim stanie odkształcenia. Blok zbudowany z materiału kruchego wg [11]

pionowym na krawędzi C-D i ciśnieniem bocznym (pochodzącym od ciśnienia eksploatacyjnego) na krawędzi A-C oraz z uwzględnieniem ciężaru własnego. Tarczę tę podzielono na czworokątne elementy skończone z zobrazowaniem wyeksploatowanego prostokątnego pasa węgla o wybiegu $L = 12$ m i grubości pokładu $m = 2$ m, pozostawiając przy ociosie otwór prostokątny, który ma odwzorowywać pole robocze i niepodadzoną część zrobów poeksploatacyjnych. Stosując dyskretyzację kontinuum metodą elementów skończonych, rozwiązano problem przyrostowy, gdzie końcowy sprzężeto-lepko-plastyczny rozkład naprężeń i przemieszczeń zostaje osiągnięty przy wzroście obciążenia wynikającego z ciężaru górotworu. Rozwiązania problemu uzyskano metodą początkowych naprężeń.

Zasięg strefy zniszczenia górotworu h_{zw} wywołany zawałową eksploatacją pokładu określono ze wzoru omówionego w pracy [14]. Dla grubości pokładu $m = 2$ m, przy współczynniku rozluźnienia skał $k_r = 1,35$, zasięg zawału wysokiego $h_{zw} = 5,85$ m, co w odniesieniu do grubości pokładu (m) stanowi on około 3-krotną jego grubość (rys. 11).



Rys. 11. Układ (zespół) szczelin (spękań) w stanie granicznym dla anizotropizowanego przykładu [11]

Teoretyczne określenie zasięgu strefy uplastycznienia się górotworu nad zawałem wysokim (h_{zw}) uzyskano przy założeniu [9, 14], że skały zalegające nad wyeksploatowanym pokładem spełniają dwa różne materiały Coulomba [9], t.j. materiał rozdrobniony typu Coulomba nie mający spójności o nieliniowej charakterystyce zagęszczenia (na wysokości h_{zw}), powyżej tego zawału o zasięgu (S_p) górotwór modeluje się jako materiał sprężysto-lepko-plastyczny o warunku plastyczności Coulomba połączonego z warunkiem ograniczonej wytrzymałości na rozciąganie [14].

Cechy makroskopowe elementu górotworu określono przez średni kąt tarcia φ , średnią spójność c , średni kąt kierunku szczelin φ' i granice plastyczności σ_p .

Warunki płynięcia materiału są określone równaniem:

$$f_1 = \sigma_1 - \sigma_r = 0, \quad f_2 = \sigma_2 - \sigma_r = 0.$$

Zastosowano dla wszystkich stanów naprężenia i są reprezentowana przez dwie linie równoległe do osi głównych naprężeń (rys. 9b).

Uplastycznienie górotworu powyżej zawału wysokiego związane jest z oddziaływaniem ciśnienia pionowego p_z oraz bocznego p_x powiększonego o ciśnienie eksploatacyjne, jakie występuje przed frontem pokładu poziomego i zalegającego na określonej głębokości h , dla której znane jest naprężenie σ_{zmax} .

W celu numerycznego wyznaczenia zasięgu strefy plastycznej (S_p) użyto zmodyfikowane programy numeryczne dla EMC: pierwszy dla modelu sprężysto-lepkiego, opracowany przez W. Kraja w Instytucie Mechaniki Górotworu w Krakowie oraz drugi program dla modelu sprężysto-plastycznego opracowany w Instytucie Mechaniki Konstrukcji Inżynierskich Politechniki Warszawskiej. Programy te przepracowano z języka ALGOL na FORTRAN w dostosowaniu do rozwiązywania zadań sprężysto-lepko-plastycznych za pomocą EMC typu UNIVAG serii 1106.

Przykład rozwiązano dla stałych materiałowych $E = 950$ kPa, $\nu = 0,3$, stały współczynnik $\nu = 10$, średni ciężar właściwy górotworu 23,5 kPa.

Kierunki zarysowań spękań rozważanej tarczy powstałych nad zrobami wyeksploatowanego pokładu (zruszenie się skał stropowych na wysokość h_{zw}) są ortogonalne do kierunków głównych naprężeń rozciągających (rys. 11).

Zasięg strefy spękań w odniesieniu do grubości eksploатовanego pokładu stanowi ok. 2-krotnej grubości pokładu ($S_p = 2 \cdot m$). Zatem łączny zasięg zruszenia (h_{zw}) i uplastycznienia (S_p) wynosi ok. $5 \times m$.

4. Uwagi wypływające z rozważań teoretycznych

Analizowane wcześniej pojedyncze przypadki zachowania się górotworu w wyniku naruszenia eksploatacji przy zastosowaniu modelu sprężystego [2, 3, 4], sprężysto-plastycznego [5, 9] i sprężysto-lepkiego [3, 15] wykazały, że realne szanse efektywnego rozwiązania zagadnień wyznaczenia pola naprężeń i odkształceń oraz strefy spękań (w otoczeniu wyrobiska eksploatacyjnego) można uzyskać przy zastosowaniu nowych nieliniowych modeli górotworu np. sprężysto-plastycznych [5, 9], sprężysto-lepkich [3, 4, 15] uwzględniających osłabienie się materiału na skutek kruchego pęknięcia, któremu towarzyszą zmiany objętości. Modele tego typu w połączeniu z efektywną techniką obliczeniową (np. metody elementów skończonych) dały rozwiązania o większej wartości niż półempiryczne i niepełne schematy, którymi często jeszcze operuje się w ramach stosowanej inżynierskiej mechaniki górotworu.

Prezentowane wyżej rozważania teoretyczne zakładały, że skały oddzielające pokłady spełniają własności sprężyste, sprężysto-plastyczne, sprężysto-lepkie i sprężysto-lepko-plastyczne. Stosując wymienione wyżej modele do zagadnienia podbierania pokładów, pozwoliły na wyjaśnienie szeregu zjawisk występujących w sąsiedztwie podebranego pokładu, a szczególnie

wpływu parametrów geologiczno-górnicznych górotworu i czasu związanego z dokonaniem podebrania na skutki w podebranych pokładzie. Założenie o dykretnej strukturze materiału dla skał jest bliższe rzeczywistej budowie górotworu niż postulat ciągłości. Niemniej modele mechaniki ośrodków ciągłych mają tę podstawową cechę, że wiążą przemieszczenie (odkształcenie) w punkcie materiału ze stanem naprężenia panującym w tym punkcie, zgodnie z zasadą lokalności.

W przypadku przyjęcia górotworu jako ośrodka sprężysto-lepkiego sztywno-plastycznego [11], wyznaczone strefa zniszczenia skał nad wyeksploatowanym wyrobiskiem ścianowym wykazuje również zróżnicowane wartości. W bezpośrednim sąsiedztwie rozpoczęcia eksploatacji strefa zniszczenia skał wykazuje zasięg najwyższy, by przy dalszym postępie eksploatacji odpowiednio się obniżyć, przy określonym wybiegu eksploatacji zasięg strefy zniszczenia ustala się. Wykazano teoretycznie, na podstawie przykładów, że zniszczenie górotworu obejmuje zasięg spełniający stosunek $M/g_2 \leq 5\pm 6$. Wartości niezbędnej odległości między pokładami przy podbieraniu uzyskana z obserwacji podziemnych podbierania pokładów i obliczona teoretycznie przy założeniu, że górotwór spełnia własności omawianego wyżej ośrodka, są zbliżone do siebie.

LITERATURA

- [1] Dymek F.: Stan naprężenia i przemieszczania w górotworze sprężystym i lepko-sprężystym nad eksploatowanym pokładem. Arch. Górn. 1979, E. 24, z. 3, s. 289.
- [2] Gil H.: Plane State of Strain of a Visco-elastic Body. Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences Serie des sciences techniques 1963, vol. XI, N° 7, s. 245.
- [3] Gil H., Kraj W.: The distribution of displacements and stresses around a longwall working. Arch. Górn. 1972, t. XVII, z. 3, s. 249.
- [4] Gil H., Kraj W.: Rozkład przemieszczeń i naprężeń w górotworze w przypadku zatrzymania czynnego frontu eksploatacji. Arch. Górn. 1974, t. XIX, z. 1, s. 7.
- [5] Izbicki R.J., Mróz Z.: Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skał. Polska Akademia Nauk, Instytut Podstawowych Problemów Techniki, PWN, Warszawa-Poznań 1976.
- [6] Haddow J.B.: A linearized theory of viscoplasticity. Int. J. Solids Struct. 1967, vol. 4, s. 533-542.
- [7] Hohenemser and W. Proger, Über die Ansätze der Mechanik Isotroper Kontinua. ZAMM 1932, 12, ss. 216-266.
- [8] Mróz Z.: Mathematical Models of Inelastic Material Behaviour. Univ. Waterloo Press, 1973.
- [9] Mróz Z., Stareń T.: Deformacja górotworu i osiadanie powierzchni dla ośrodka sprężysto-plastycznego. Ochrona Terenów Górniczych 1977, 41, s. 3.
- [10] Mróz Z., Dragon A.: A continuous model for plastic-brittle behaviour for rock and concrete. International of Engineering Sciences, 1979, vol. 17, ss. 121-137.

- [11] Mróz Z., Sharnak G.: Finite element applications of viscoplasticity with singular yield surfaces. Univ. of Swansea 1980, vol. 15, ss. 421-436.
- [12] Perzyna P.: Fundamental problems in viscoplasticity. Adv. Appl Mech. 1966, vol. 9, ss. 243-377.
- [13] Reiner M., Lewis M.K.: Advanced rheology, London 1971.
- [14] Staroń T.: Zasięg zruszenia górotworu warunkującego pobieranie pokładów przy eksploatacji z zawalaniem stopu. Prace GIG, seria dodatkowa, Katowice 1979.
- [15] Tajduś A.: Numeryczne określenie naprężeń w górotworze lepko-sprężystym, niejednorodnym, pofałdowanym, Akademia Górniczo-Hutnicza im. S. Staszica (praca doktorska), Kraków 1977 (niepublikowana).
- [16] Zienkiewicz O.G.: Metoda elementów skończonych, Arkady, PWN, Warszawa 1972.
- [17] Zarka J.: Generalization de la theorie du potentiel multiple en visco-plasticite. J. Meth. Phys. 1972. Sol 20. 179-195.

Recenzent: Prof. dr hab inż. Henryk GIL

Wpłynęło do Redakcji w maju 1983 r.

ПОПЫТКА ОБЪЯСНЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ ИМЕЮЩИХ МЕСТО
В ПЕРЕМЕЩЕННОЙ ГОРНОЙ ПОРОДЕ СЛЕДУЯ УПРУГО-ВЯЗКОЙ
ПЛАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Р е з ю м е

В работе сделан пересмотр применяемых механических моделей, описывающих деформации имеющих место в результате полного истощения эксплуатацией определенной поверхности пласта. Анализ этих моделей показал, что для описывания имеющих место явлений в нарушенной горной породе наиболее реальной является упруго-вязко-пластическая модель. Описаны теоретические основы для выбранной модели Бингхама а также алгоритм решения для краевых задач. Модель проиллюстрирована практическим примером. В окончании работы даны выводы.

AN ATTEMPT AT THE FORMULATION OF DEFORMATIONS TAKING PLACE
IN DISTURBED ROCK MASSES ACCORDING TO AN ELASTIC-PLASTIC MODEL

S u m m a r y

The paper gives a survey of applied technical models describing the deformations resulting from the exploitation of some part of the volume of a seam. The analysis of these models revealed that in order to describe the phenomena occurring in disturbed rock strata, most approximate to real conditions it is advisable to apply an elastic plastic model. The theoretical principles of the chosen Bingham model have been given, as well as the algorithm for the solution of boundary problems. An example of the practical application of this model has been provided. In the final part of the paper conclusions have been drawn.