ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1990
Seria: AUTOMATYKA z.100 Nr kol.1082

Jerzy Klamka

Politechnika Śląska

STEROWALNOŚĆ UKŁADÓW DYSKRETNYCH TYPU 2-D

Streszczenie. W pracy podano definicje całkowitej i lokalnej sterowalności w ustalonym prostokącie dla liniowych,stacjonarnych układów dyskretnych typu 2-D. Wykorzystując odpowiednio zdefiniowaną macierz sterowalności,sformułowano i udowodniono warunki konieczne i wystarczające całkowitej oraz lokalnej sterowalności układów dyskretnych typu 2-D.

1. Wstęp.

Sterowalność obok obserwowalności i stabilności należy do podstawowych własności charakteryzujących zachowanie się układów dynamicznych. Oznacza ona ,ogólnie rzecz biorąc,możliwość osiągnięcia pożądanego stanu układu dynamicznego przy użyciu dostępnych sterowań.

W ostatnim dziesięcioleciu nastąpił burzliwy rozwój badań nad wielowymiarowymi układami dyskretnymi,tzn. układami o wielu zmiennych niezależnych. Spośród wielowymiarowych układów dyskretnych najpopularniejszymi są tzw. układy typu 2-D ,tzn. układy dynamiczne określone w dyskretnych punktach płaszczyzny,których dynamikę opisuje wektorowe równanie różnicowe o dwóch zmiennych niezależnych [3], [4].

Różne rodzaje sterowalności liniowych układów typu 2-D rozpatrywane były między innymi w pracach [1], [2], [4], [6], [7], [8],gdzie podano liczne kryteria badania sterowalności. Zagadnienia sterowalności liniowych układów dyskretnych typu M-D / M zmiennych niezależnych / analizowane były między innymi w publikacjach [9], [10] oraz [11].

W niniejszej pracy zostaną sformułowane i udowodnione warunki konieczne i wystarczające całkowitej sterowalności w ustalonym prostokącie dla liniowych stacjonarnych układów dyskretnych typu 2-D,których dynamikę opisuje wektorowe równanie różnicowe ogólnej postaci.Zagadnienie całkowitej sterowalności w ustalonym prostokącie nie było dotychczas rozpatrywane w literaturze dotyczącej wielowymiarowych układów dyskretnych.Z podanych w pracy warunków koniecznych i wystarczających całkowitej sterowalności w ustalonym prostokącie można łatwo uzyskać znane w literaturze warunki konieczne i wystarczające lokalnej sterowalności w ustalonym prostokącie [4], [6], [7], [8].

2. Opis układu dynamicznego i podstawowe definicje.

Niech będzie dany liniowy stacjonarny skończenie wymiarowy układ dyskretny typu 2-D opisany następującym wektorowym równaniem różnicowym [4], [5], [12]:

$$x(i+1,j+1) = A_1 x(i,j+1) + A_2 x(i+1,j) + A_0 x(i,j) + Bu(i,j) \qquad /2.1/$$

określonym w prostokącie $P_{rs} = [(0,0),(r,s)] = \{(i,j) \in Z\times Z : (0,0) \leq (i,j) \leq (r,s)\}$

gdzie: $x(i,j) \in R^n$ wektor stanu lokalnego w punkcie (i,j),

$u(i,j) \in R^m$ wektor sterowań w punkcie (i,j),

A_0, A_1, A_2 $n\times n$ wymiarowe stałe macierze,

B $n\times m$ wymiarowa stała macierz ;

Z zbiór liczb całkowitych .

Warunki brzegowe dla równania różnicowego /2.1/ są postaci :

$$\begin{aligned} x(i,0) &= x_{i0} \in R^n, \quad \text{dla } i = 0,1,\dots,r \\ x(0,j) &= x_{0j} \in R^n, \quad \text{dla } j = 0,1,\dots,s \end{aligned} \qquad /2.2/$$

Wiadomo, [4], [5], [12], że rozwiązanie równania różnicowego /2.1/ z warunkami brzegowymi /2.2/ można przedstawić w zwartej formie, wykorzystując w tym celu tzw. macierz tranzycji układu 2-D, G_{ij}, $i,j = -1,0,1,2,\dots$ zdefiniowaną w sposób następujący [4], [5], [12]:

$$\begin{aligned} G_{ij} &= A_0 G_{i-1,j-1} + A_2 G_{i,j-1} + A_1 G_{i-1,j} = \\ &= G_{i-1,j-1} A_0 + G_{i-1,j} A_1 + G_{i,j-1} A_2 \end{aligned} \qquad /2.3/$$

$$G_{00} = I_{n\times n}$$

$$G_{ij} = 0 \quad \text{dla} \quad i = -1 \quad \text{lub} \quad j = -1$$

Rozwiązanie $x(k,l)$, $(k,l) \in P_{rs}$ równania różnicowego /2.1/ z warunkami brzegowymi /2.2/ jest postaci [4], [5], [12]:

$$\begin{aligned} x(k,l) = & \sum_{i=1}^{i=k} (G_{k-i,l-1} A_2 + G_{k-i-1,l-1} A_0) x(i,0) + \\ & + \sum_{j=1}^{j=l} (G_{k-1,l-j} A_1 + G_{k-1,l-j-1} A_0) x(0,j) + G_{k-1,l-1} A_0 x(0,0) + \\ & + \sum_{j=1}^{j=k} G_{k-j-1,l-1} Bu(0,j) + \sum_{i=1}^{i=l} G_{k-1,l-j-1} Bu(i,0) + \\ & + G_{k-1,l-1} Bu(0,0) + \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{j=1}^{j=l} G_{k-i-1,l-j-1} Bu(i,j) \end{aligned} \qquad /2.4/$$

Dla dyskretnego układu dynamicznego typu 2-D opisanego równaniem /2.1/ wprowadza się dwie podstawowe definicje sterowalności w ustalonym prostokącie P_{rs}, a mianowicie : lokalną sterowalność w prostokącie P_{rs} oraz całkowitą sterowalność w prostokącie P_{rs}.

Definicja 2.1. Układ dynamiczny /2.1/ nazywa się lokalnie sterowalnym w prostokącie P_{rs} ,jeżeli dla dowolnych warunków brzegowych /2.2/ oraz dowolnego wektora $x_{rs} \in R^n$,istnieje sekwencja sterowań $\{u(i,j) : (i,j) \in P_{r-1,s-1}\}$ taka,że odpowiadające tej sekwencji sterowań rozwiązanie $x(i,j)$ $(i,j) \in P_{rs}$ spełnia następujący warunek :

$$x(r,s) = x_{rs} \qquad /2.5/$$

Definicja 2.2. Układ dynamiczny /2.1/ nazywa się całkowicie sterowalnym w prostokącie P_{rs} ,jeżeli dla dowolnych warunków brzegowych /2.2/ oraz dowolnych wektorów $x_{rl} \in R^n$, $l = 1,2,\ldots,s-1$ oraz $x_{ks} \in R^n$, $k = 1,2,\ldots,r-1$, $x_{rs} \in R^n$,istnieje sekwencja sterowań $\{u(i,j) : (i,j) \in P_{r-1,s-1}\}$ taka,że odpowiadające tej sekwencji sterowań rozwiązanie $x(i,j)$,$(i,j) \in P_{rs}$ spełnia następujące warunki :

$$\begin{aligned} x(r,l) &= x_{rl} , \quad l = 1,2,\ldots,s-1 \\ x(k,s) &= x_{ks} , \quad k = 1,2,\ldots,r-1 \qquad /2.6/ \\ x(r,s) &= x_{rs} \end{aligned}$$

Z przytoczonych powyżej definicji wynika bezpośrednio,że całkowita sterowalność układu dynamicznego /2.1/ w ustalonym prostokącie P_{rs} implikuje lokalną sterowalność układu dynamicznego /2.1/ w tym samym prostokącie P_{rs} . Implikacja odwrotna na ogół nie jest prawdziwa. Zatem pojęcie całkowitej sterowalności w prostokącie P_{rs} jest pojęciem istotnie silniejszym niż lokalna sterowalność w tym samym prostokącie P_{rs}. Będzie to również widoczne w sformułowaniach odpowiednich kryteriów badania sterowalności,które bazują na badaniu rzędów odpowiednio zdefiniowanych macierzy sterowalności.

Należy wyraźnie podkreślić,że w definicjach 2.1 oraz 2.2 nie zakłada się ograniczoności zbioru wartości sterowań $u(i,j)$.Nałożenie dodatkowych ograniczeń na sterowania,np. w postaci ograniczenia wartości normy,jest oczywiście możliwe,jednak bardzo komplikuje przeprowadzane rozważania i nie będzie rozpatrywane w niniejszej pracy.

Warunki konieczne i wystarczające lokalnej sterowalności układu dynamicznego /2.1/ w prostokącie P_{rs} zostały sformułowane i dowiedzione w pracach [4], [6], [7], [9] w oparciu o jawną postać rozwiązania i macierz sterowalności. W następnym podrozdziale warunki te zostaną uogólnione na przypadek całkowitej sterowalności układu dynamicznego /2.1/ w ustalonym prostokącie P_{rs} .

3. Kryteria badania sterowalności.

W niniejszym podrozdziale w oparciu o postać rozwiązania /2.4/ oraz definicje 2.1 i 2.2 zostaną sformułowane i dowiedzione warunki konieczne i wystarczające całkowitej oraz lokalnej sterowalności układu dynamicznego /2.1/ w ustalonym prostokącie P_{rs}.

Ze względu na liniowość układu dynamicznego /2.1/ bez utraty ogólności można założyć, że wszystkie warunki brzegowe /2.2/ są zerowe, tzn. $x_{0l} = 0$ dla $l = 1,2,\ldots,s$, $x_{k0} = 0$ dla $k = 1,2,\ldots,r$ oraz $x_{00} = 0$. Założenie to znacznie upraszcza wszystkie rozważania i pozwala na przedstawienie rozwiązania $x(k,l)$, $(k,l)\in P_{rs}$ równania różnicowego /2.1/ danego formułą /2.4/ w następującej postaci :

$$x(k,l) = G_{k-1,l-1}Bu(0,0) + \sum_{i=1}^{i=k} G_{k-i-1,l-1}Bu(i,0) + \sum_{j=1}^{j=l} G_{k-1,l-j-1}Bu(0,j) + \sum_{i=1}^{i=k}\sum_{j=1}^{j=l} G_{k-i-1,l-j-1}Bu(i,j) \qquad /3.1/$$

Wzór /3.1/ można przedstawić w postaci dogodniejszej do dalszych rozważań, a mianowicie :

$$x(k,l) = \left[G_{k-1,l-1}B \mid G_{k-1,l-2}B \mid G_{k-1,l-3}B \mid \ldots \mid G_{k-1,1}B \mid G_{k-1,0}B \mid G_{k-2,l-1}B \mid G_{k-3,l-1}B \mid G_{k-4,l-1}B \mid \ldots \mid G_{1,l-1}B \mid G_{0,l-1}B \mid G_{k-2,l-2}B \mid G_{k-2,l-3}B \mid G_{k-3,l-2}B \mid G_{k-3,l-3}B \mid \ldots \mid G_{11}B \mid G_{10}B \mid G_{01}B \mid G_{00}B\right]\left[u^T(0,0),\ u^T(1,0),\ u^T(2,0),\ldots,u^T(k-1,0), u^T(0,1),\ u^T(0,2),\ldots,u^T(0,l-1),\ u^T(1,1),\ u^T(1,2),\ldots,u^T(k-1,l-1)\right]^T \qquad /3.2/$$

gdzie symbol T oznacza znak transpozycji.

Dla skrócenia zapisu wprowadza się następujące oznaczenia :

$$u_{kl}^T = \left[u^T(0,0),\ u^T(1,0),\ \ldots,u^T(k-1,0),\ u^T(0,1),\ u^T(0,2),\ldots,u^T(0,l-1),\ u^T(1,1),\ u^T(1,2),\ u^T(k-1,l-1)\right]^T \in R^{mkl} \qquad /3.3/$$

$$W_{kl} = \left[G_{k-1,l-1}B \mid G_{k-1,l-2}B \mid G_{k-1,l-3}B \mid \ldots \mid G_{k-1,1}B \mid G_{k-1,0}B \mid G_{k-2,l-1}B \mid G_{k-3,l-1}B \mid \ldots \mid G_{1,l-1}B \mid G_{0,l-1}B \mid G_{k-2,l-1}B \mid G_{k-2,l-3}B \mid \ldots \mid G_{11}B \mid G_{10}B \mid G_{01}B \mid G_{00}B\right] \qquad /3.4/$$

W_{kl} jest nxmkl wymiarową macierzą o stałych współczynnikach.

Wykorzystując oznaczenia /3.3/ oraz /3.4/, można relację /3.2/ przedstawić w zwartej macierzowo-wektorowej formie :

$$x(k,l) = W_{kl}u_{kl} \qquad (k,l) \in P_{rs} \tag{/3.5/}$$

Wprowadzone oznaczenia zostaną wykorzystane w dowodzie warunku koniecznego i wystarczającego całkowitej sterowalności układu dynamicznego /2.1/ w ustalonym prostokącie P_{rs}.

Twierdzenie 3.1. Układ dynamiczny /2.1/ jest całkowicie sterowalny w ustalonym prostokącie P_{rs} wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd } W(r,s) = n(r+s-1) \tag{/3.6/}$$

gdzie $W(r,s)$ jest $n(r+s-1)\times mrs$ wymiarową macierzą całkowitej sterowalności w ustalonym prostokącie P_{rs}, daną następującym wzorem:

$$W(r,s) = \begin{bmatrix} Q_{r,0} & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ Q_{r,0} & Q_{r,1} & 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ Q_{r,0} & Q_{r,1} & Q_{r,2} & 0 \cdots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{r,0} & Q_{r,1} & Q_{r,2} & \cdots Q_{r,s-2} & 0 \\ \tilde{Q}_{1,0} & \tilde{Q}_{1,1} & \tilde{Q}_{1,2} & \cdots \tilde{Q}_{1,s-2} & \tilde{Q}_{1,s-1} \\ \tilde{Q}_{2,0} & \tilde{Q}_{2,1} & \tilde{Q}_{2,2} & \cdots \tilde{Q}_{2,s-2} & \tilde{Q}_{2,s-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{Q}_{r-1,0} & \tilde{Q}_{r-1,1} & \tilde{Q}_{r-1,2} & \cdots \tilde{Q}_{r-1,s-2} & \tilde{Q}_{r-1,s-1} \\ \tilde{Q}_{r,0} & \tilde{Q}_{r,1} & \tilde{Q}_{r,2} & \cdots \tilde{Q}_{r,s-2} & \tilde{Q}_{r,s-1} \end{bmatrix} \tag{/3.7/}$$

gdzie: $$Q_{i,j} = \left[G_{i-1,j}B \,\vdots\, G_{i-2,j}B \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, G_{1,j}B \,\vdots\, G_{0,j}B\right] \tag{/3.8/}$$

są nxmi wymiarowymi macierzami dla $i=1,2,\ldots,r$, $j=1,2,\ldots,s-1$.

$$\tilde{Q}_{i,j} = \left[G_{i-1,s-j-1}B \,\vdots\, G_{i-2,s-j-1}B \,\vdots\, G_{i-3,s-j-1}B \,\vdots\, \cdots \right.$$
$$\left. \cdots \,\vdots\, G_{2,s-j-1}B \,\vdots\, G_{1,s-j-1}B \,\vdots\, G_{0,s-j-1}B \,\vdots\, 0 \,\vdots\, 0 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, 0\right] \tag{/3.9/}$$

są nxmr wymiarowymi macierzami dla $i=1,2,\ldots,r$, $j=1,2,\ldots,s-1$.

Dowód. Dowód twierdzenia 3.1 polega na wyznaczeniu zależności umożliwiającej jednoczesne określenie wektorów rozwiązań $x(r,1)$, $x(r,2)$, ..., $x(r,s-2)$, $x(r,s-1)$, $x(1,s)$, $x(2,s)$, ..., $x(r-2,s)$, $x(r-1,s)$, $x(r,s)$ w oparciu o znajomość sekwencji sterowań w prostokącie P_{rs}.

Do tego celu zostanie wykorzystany wzór /3.1/ określający postać rozwiązania równania różnicowego /2.1/ w dowolnym punkcie $(k,l) \in P_{rs}$.

$$\begin{bmatrix} x(r,1) \\ x(r,2) \\ \vdots \\ x(r,s-2) \\ x(r,s-1) \\ x(1,s) \\ x(2,s) \\ \vdots \\ x(r-2,s) \\ x(r-1,s) \\ x(r,s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{r,0} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ Q_{r,0} & Q_{r,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{r,0} & Q_{r,1} & Q_{r,2} & \cdots & 0 & 0 \\ Q_{r,0} & Q_{r,1} & Q_{r,2} & \cdots & Q_{r,s-2} & 0 \\ \tilde{Q}_{1,0} & \tilde{Q}_{1,1} & \tilde{Q}_{1,2} & \cdots & \tilde{Q}_{1,s-2} & \tilde{Q}_{1,s-1} \\ \tilde{Q}_{2,0} & \tilde{Q}_{2,1} & \tilde{Q}_{2,2} & \cdots & \tilde{Q}_{2,s-2} & \tilde{Q}_{2,s-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{Q}_{r-2,0} & \tilde{Q}_{r-2,1} & \tilde{Q}_{r-2,2} & \cdots & \tilde{Q}_{r-2,s-2} & \tilde{Q}_{r-2,s-1} \\ \tilde{Q}_{r-1,0} & \tilde{Q}_{r-1,1} & \tilde{Q}_{r-1,2} & \cdots & \tilde{Q}_{r-1,s-2} & \tilde{Q}_{r-1,s-1} \\ \tilde{Q}_{r,0} & \tilde{Q}_{r,1} & \tilde{Q}_{r,2} & \cdots & \tilde{Q}_{r,s-2} & \tilde{Q}_{r,s-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0,0) \\ u(1,0) \\ \vdots \\ u(r-1,0) \\ u(0,1) \\ u(1,1) \\ \vdots \\ u(r-1,1) \\ u(0,2) \\ u(1,2) \\ \vdots \\ u(r-1,s-1) \end{bmatrix}$$

Powyższa relacja przedstawia zależność wektorów wymienionych w definicji 2.2 od sterowań w prostokącie $P_{r-1,s-1}$. Ponieważ zgodnie z definicją 2.2 wektory te mają przyjmować dowolne wartości ,więc powyższy układ równań liniowych powinien mieć rozwiązanie dla dowolnych lewych stron. Warunek ten będzie spełniony wtedy i tylko wtedy,gdy macierz $W(r,s)$ będzie pełnego rzędu, tzn. będzie miała liniowo niezależne wiersze. Ponieważ liniowa niezależność wierszy macierzy $W(r,s)$ jest równoważne warunkowi /3.6/ więc twierdzenie 3.1 zostało udowodnione.

Z twierdzenia 3.1 płyną wnioski dotyczące zarówno pewnych przypadków szczególnych, jak i warunków, jakie musi spełniać prostokąt P_{rs}, aby układ dynamiczny /2.1/ był w nim całkowicie sterowalny.

Wniosek 3.1. Jeżeli $n(r+s-1) > mrs$, to układ dynamiczny /2.1/ nie jest całkowicie sterowalny w prostokącie P_{rs}.

Dowód. Jeżeli $n(r+s-1) > mrs$,to ilość wierszy w macierzy $W(r,s)$ jest większa od ilości kolumn, a zatem jej rząd jest mniejszy od $n(r+s-1)$ i na podstawie twierdzenia 3.1 układ dynamiczny /2.1/ nie może być całkowicie sterowalny w prostokącie P_{rs}.

Wniosek 3.2. Układ dynamiczny /2.1/ jest lokalnie sterowalny w prostokącie P_{rs} wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd}\left[\tilde{Q}_{r,0} \,\vdots\, \tilde{Q}_{r,1} \,\vdots\, \tilde{Q}_{r,2} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \tilde{Q}_{r,s-2} \,\vdots\, \tilde{Q}_{r,s-1}\right] = n \qquad /3.10/$$

Dowód. Z definicji 2.1 bezpośrednio wynika,że lokalna sterowalność w prostokącie P_{rs} układu dynamicznego /2.1/ jest równoważna możliwości dowolnego kształtowania wektora rozwiązań $x(r,s)$. Na podstawie zależności /3.2/ oraz /3.9/ jest to równoważne warunkowi /3.10/. Tak więc wniosek 3.2 został dowiedziony.

Wniosek 3.3. Układ dynamiczny /2.1/ jest całkowicie sterowalny w prostokącie P_{rs} wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det(WW^T) \neq 0 \qquad /3.11/$$

Dowód. Na podstawie twierdzenia 3.1 układ dynamiczny /2.1/ jest całkowicie sterowalny w ustalonym prostokącie P_{rs} wtedy i tylko wtedy, gdy wiersze macierzy W są liniowo niezależne, co jest równoważne liniowej niezależności kolumn macierzy W^T. Stąd bezpośrednio otrzymuje się tezę wniosku 3.3.

Macierz WW^T występująca w relacji /3.11/ nosi nazwę macierzy całkowitej sterowalności układu dynamicznego /2.1/. Jest to macierz symetryczna $n(r+s-1)\times n(r+s-1)$ wymiarowa o stałych współczynnikach. Zatem warunek /3.11/ może być również wyrażony w postaci następującego wniosku.

Wniosek 3.4. Układ dynamiczny /2.1/ jest całkowicie sterowalny w prostokącie P_{rs} wtedy i tylko wtedy, gdy macierz sterowalności WW^T jest dodatnio określona.

Dowód. Z postaci macierzy całkowitej sterowalności WW^T wynika, że jest ona zawsze macierzą nieujemnie określoną. Warunek /3.11/ będzie spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy macierz WW^T będzie dodatnio określona.

Istotnym zagadnieniem związanym bezpośrednio ze sterowalnością układów dynamicznych jest problem wyznaczania sterowania przeprowadzającego dany układ dynamiczny z zadanych warunków początkowych lub brzegowych do żądanego stanu końcowego. W przypadku układu dynamicznego typu 2-D założenie całkowitej sterowalności w ustalonym prostokącie P_{rs} gwarantuje istnienie conajmniej jednej sekwencji sterowań $\{u(i,j) : (i,j) \in P_{r-1,s-1}\}$ przeprowadzającej układ z zadanych warunków brzegowych /2.2/ do żądanego stanu końcowego /2.6/. Podobnie jak w układach ciągłych oraz układach dyskretnych typu 1-D, do wyznaczenia odpowiedniej sekwencji sterowań w układach typu 2-D wykorzystuje się macierze sterowalności [4], [6], [7], [8], [9]. W naszym przypadku wykorzystana zostanie w tym celu macierz całkowitej sterowalności WW^T. Jest to uogólnienie rezultatów zawartych w pracach [6] oraz [7], gdzie rozpatrywano jedynie dosterowanie się do zadanego wektora x_{rs} w punkcie (r,s), wykorzystując w tym celu macierz lokalnej sterowalności. W niniejszej pracy sformułowane zostanie sterowanie umożliwiające osiągnięcie dowolnych wektorów stanów lokalnych na dwóch bokach prostokąta P_{rs}. Wyznaczenie tego sterowania będzie treścią twierdzenia 3.2.

Zależności występujące w twierdzeniu 3.2 mają bardzo skomplikowaną postać. W celu uproszczenia i czytelności zapisu, wprowadza się następujące oznaczenia:

$$R^{n(s+r-1)} \ni \tilde{x}^T_{rs} = \left[x^T_{r1}, x^T_{r2}, \ldots, x^T_{r,s-2}, x^T_{r,s-1}, x^T_{1,s}, x^T_{2,s}, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, x^T_{r-2,s}, x^T_{r-1,s}, x^T_{r,s}\right] \qquad /3.13/$$

$$R^{n(r+s+1)} \ni \tilde{x}^T_{ors} = \left[x^T_{00}, x^T_{10}, \ldots, x^T_{i,0}, \ldots, x^T_{r-1,0}, x^T_{r,0}, x^T_{01}, x^T_{02}, \right.$$
$$\left. \ldots, x^T_{0,j}, x^T_{0,j+1}, \ldots, x^T_{0,s-1}, x^T_{0,s}\right] \qquad /3.14/$$

$$R^{n(s+r-1)} \ni \tilde{\tilde{x}}^T_{rs} = \left[x^T(r,1), x^T(r,2), \ldots, x^T(r,s-2), x^T(r,s-1), x^T(1,s), x^T(2,s), \right.$$
$$\left. \ldots, x^T(r-2,s), x^T(r-1,s), x^T(r,s)\right] \qquad /3.15/$$

Wektor $\tilde{x}_{rs}$ dany zależnością /3.13/ reprezentuje warunki końcowe na dwóch brzegach prostokąta P_{rs}.

Wektor $\tilde{x}_{ors}$ określony wzorem /3.14/ przedstawia dane warunki brzegowe na dwóch brzegach prostokąta P_{rs}.

Wektor $\tilde{\tilde{x}}_{rs}$ wyznaczony formułą /3.15/ wyznacza wartości końcowych stanów lokalnych na dwóch brzegach prostokąta P_{rs}.

Wprowadzimy obecnie oznaczenia umożliwiające określenie wpływu warunków brzegowych $\tilde{x}_{ors}$ na wartości stanów lokalnych $\tilde{\tilde{x}}_{rs}$.

$$H_{11} = \left[\begin{array}{cccccc}
G_{r-1,0}A_0 & G_{r-1,0}A_2 + G_{r-2,0}A_0 & \cdots & G_{r-i,0}A_2 + G_{r-i-1,0}A_0 & \cdots & G_{1,0}A_2 + G_{0,0}A_0 & G_{0,0}A_2 \\
G_{r-1,1}A_0 & G_{r-1,1}A_2 + G_{r-2,1}A_0 & \cdots & G_{r-i,1}A_2 + G_{r-i-1,1}A_0 & \cdots & G_{1,1}A_2 + G_{0,1}A_0 & G_{0,1}A_2 \\
G_{r-1,2}A_0 & G_{r-1,2}A_2 + G_{r-2,2}A_0 & \cdots & G_{r-i,2}A_2 + G_{r-i-1,2}A_0 & \cdots & G_{1,2}A_2 + G_{0,2}A_0 & G_{0,2}A_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
G_{r-1,s-3}A_0 & G_{r-1,s-3}A_2 + G_{r-2,s-3}A_0 & \cdots & G_{r-i,s-3}A_2 + G_{r-i-1,s-3}A_0 & \cdots & G_{1,s-3}A_2 + G_{0,s-3}A_0 & G_{0,s-3}A_2 \\
G_{r-1,s-2}A_0 & G_{r-1,s-2}A_2 + G_{r-2,s-2}A_0 & \cdots & G_{r-i,s-2}A_2 + G_{r-i-1,s-2}A_0 & \cdots & G_{1,s-2}A_2 + G_{0,s-2}A_0 & G_{0,s-2}A_2
\end{array}\right] \qquad /3.16a/$$

$$
H_{12} = \left[\begin{array}{lclcl}
G_{r-1,0}A_1 & \cdots\cdots & 0 & & \cdots \\
 & & \vdots & & \\
G_{r-1,1}A_1 + G_{r-1,0}A_0 & \cdots\cdots & 0 & & \cdots \\
G_{r-1,2}A_1 + G_{r-1,1}A_0 & \cdots\cdots & G_{r-1,0}A_1 & & \cdots \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\
G_{r-1,s-3}A_1 + G_{r-1,s-4}A_0 & \cdots & G_{r-1,s-j-2}A_1 + G_{r-1,s-j-3}A_0 & & \cdots \\
G_{r-1,s-2}A_1 + G_{r-1,s-3}A_0 & \cdots & G_{r-1,s-j-1}A_1 + G_{r-1,s-j-2}A_0 & & \cdots
\end{array}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{lccc}
\cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\
\cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots\cdots & G_{r-1,0}A_1 & 0 & 0 \\
\cdots\cdots & G_{r-1,1}A_1 + G_{r-1,0}A_0 & G_{r-1,0}A_1 & 0
\end{array}\right] \qquad /3.16b/
$$

$$
E_{21} = \left[\begin{array}{lllcl}
G_{0,s-1}A_0 & G_{0,s-1}A_2 & & \cdots & 0 \\
 & & & & \vdots \\
G_{1,s-1}A_0 & G_{1,s-1}A_2 + G_{0,s-1}A_0 & & \cdots & 0 \\
G_{2,s-1}A_0 & G_{2,s-1}A_2 + G_{1,s-1}A_0 & & \cdots & G_{0,s-1}A_2 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\
G_{r-2,s-1}A_0 & G_{r-2,s-1}A_2 + G_{r-3,s-1}A_0 & & \cdots & G_{r-i-1,s-1}A_2 + G_{r-i-1,s-1}A_0 \\
G_{r-1,s-1}A_0 & G_{r-1,s-1}A_2 + G_{r-2,s-1}A_0 & & \cdots & G_{r-1,s-1}A_2 + G_{r-i-1,s-1}A_0
\end{array}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{lcc}
\cdots 0 & 0 & 0 \\
\cdots 0 & 0 & 0 \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\
\cdots 0 & 0 & 0 \\
\cdots G_{0,s-1}A_2 & 0 & 0 \\
\cdots G_{1,s-1}A_2 + G_{0,s-1}A_0 & G_{0,s-1}A_2 & 0
\end{array}\right] \qquad /3.16c/
$$

$$H_{22} = \left[\begin{array}{ccccc} G_{0,s-1}A_1 + G_{0,s-2}A_0 & \cdots\cdots & G_{0,s-j}A_1 + G_{0,s-j-1}A_0 & \cdots\cdots & \\ G_{1,s-1}A_1 + G_{1,s-2}A_0 & \cdots\cdots & G_{1,s-j}A_1 + G_{1,s-j-1}A_0 & \cdots\cdots & \\ G_{2,s-1}A_1 + G_{2,s-2}A_0 & \cdots\cdots & G_{2,s-j}A_1 + G_{2,s-j-1}A_0 & \cdots\cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ G_{r-2,s-1}A_1 + G_{r-2,s-2}A_0 & \cdots\cdots & G_{r-2,s-j}A_1 + G_{r-2,s-j-1}A_0 & \cdots\cdots & \\ G_{r-1,s-1}A_1 + G_{r-1,s-2}A_0 & \cdots\cdots & G_{r-1,s-j}A_1 + G_{r-1,s-j-1}A_0 & \cdots\cdots & \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc} \cdots\cdots & G_{0,1}A_1 + G_{0,0}A_0 & G_{0,0}A_1 \\ \cdots\cdots & G_{1,1}A_1 + G_{1,0}A_0 & G_{1,0}A_1 \\ \cdots\cdots & G_{2,1}A_1 + G_{2,0}A_0 & G_{2,0}A_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots\cdots & G_{r-2,1}A_1 + G_{r-2,0}A_0 & G_{r-2,0}A_1 \\ \cdots\cdots & G_{r-1,1}A_1 + G_{r-1,0}A_0 & G_{r-1,0}A_1 \end{array}\right] \qquad /3.16d/$$

Wykorzystując oznaczenia /3.16a/ , /3.16b/ , /3.16c/ oraz /3.16d/ tworzy się macierz blokową H w sposób następujący:

$$H = \left[\begin{array}{c|c} H_{11} & H_{12} \\ \hline H_{21} & H_{22} \end{array}\right] \qquad /3.16/$$

Macierze $H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}$ są stałymi macierzami o następujących wymiarach : H_{11} jest $n(s-1)\times n(r+1)$-wymiarowa , H_{12} jest $n(s-1)\times ns$-wymiarowa , H_{21} jest $nr\times n(r+1)$-wymiarowa , H_{22} jest $nr\times ns$ - wymiarowa. Zatem macierz blokowa H jest macierzą stałą $n(r+s-1)\times n(r+s+1)$- wymiarową.

Wykorzystując wszystkie wprowadzone uprzednio oznaczenia, można sformułować twierdzenie dające postać sterowania przeprowadzającego układ dynamiczny /2.1/ z zadanych warunków brzegowych do żądanych wartości wektorów stanów lokalnych na dwóch brzegach prostokąta P_{rs}.

Twierdzenie 3.2. Niech będą dane warunki brzegowe /2.2/ oraz stan końcowy postaci /2.6/. Przy założeniu ,że układ dynamiczny /2.1/ jest całkowicie sterowalny w prostokącie P_{rs} ,sterowanie przeprowadzające układ z warunków brzegowych /2.2/ do stanu końcowego /2.6/ jest postaci :

$$u_{rs} = W^T(WW^T)^{-1}(\tilde{x}_{rs} - H\tilde{x}_{ors}) \qquad /3.17/$$

gdzie wektor sterowań $u_{rs} \in R^{mrs}$ jest dany zależnością /3.3/.

Dowód. Na podstawie wzorów /3.1/,/3.3/,/3.7/,/3.14/ oraz /3.15/ zachodzi następująca zależność :

$$\tilde{\tilde{x}}_{rs} = H\tilde{x}_{ors} + Wu_{rs} \qquad /3.18/$$

Podstawiając do wzoru /3.18/ równość /3.17/ oraz uwzględniając wymienione powyżej zależności, otrzymuje się następującą relację :

$$\tilde{\tilde{x}}_{rs} = H\tilde{x}_{ors} + WW^T(WW^T)^{-1}(\tilde{x}_{rs} - H\tilde{x}_{ors}) = H\tilde{x}_{ors}+\tilde{x}_{rs}-H\tilde{x}_{ors}=\tilde{x}_{rs}$$

Zatem sterowanie dane wzorem /3.17/ przeprowadza układ dynamiczny /2.1/ z zadanych warunków brzegowych /2.2/ do żądanego stanu końcowego postaci /2.6/. Tak więc twierdzenie 3.2 zostało dowiedzione.

Istotnym elementem w dowodzie twierdzenia 3.2 było założenie całkowitej sterowalności w prostokącie P_{rs} układu dynamicznego /2.1/.Bez tego założenia osiągalne z zadanych warunków brzegowych /2.2/ byłyby tylko pewne wybrane stany końcowe,a mianowicie te ,które należą do tzw. zbioru osiągalnego [5],[10]. Należy podkreślić,że zasadniczą trudnością przy formułowaniu twierdzenia 3.2 było wyznaczenie odpowiedniej macierzy H wiążącej warunki brzegowe /2.2/ ze stanem końcowym postaci /2.6/.

4. Zakończenie.

W artykule przedstawiono zagadnienia sterowalności dla liniowych stacjonarnych dyskretnych układów dynamicznych typu 2-D. Zdefiniowano pojęcie tzw. całkowitej sterowalności w prostokącie P_{rs} będące istotnym rozszerzeniem znanego z literatury pojęcia lokalnej sterowalności w prostokącie P_{rs} [5],[7],[8],[11].Następnie sformułowano i udowodniono warunki konieczne i wystarczające całkowitej sterowalności w ustalonym prostokącie. Warunki te otrzymano w oparciu o odpowiednio zdefiniowaną macierz całkowitej sterowalności,która została również wykorzystana do określenia sekwencji sterowań przeprowadzającej układ dynamiczny /2.1/ z zadanych warunków brzegowych /2.2/ do żądanego stanu końcowego postaci /2.6/.

Przedstawione w pracy rezultaty mogą być wykorzystane do rozwiązania tzw. zagadnienia minimalno-energetycznego [6],[7],[8],[9],[10],[11],które polega na osiągnięciu stanu końcowego przy minimalnej energii sterowania. Efektywne rozwiązanie tego zagadnienia jest możliwe dzięki założeniu całkowitej sterowalności układu dynamicznego /2.1/.

Otrzymane w artykule wyniki można stosunkowo łatwo uogólnić na przypadek układów dyskretnych niestacjonarnych i to zarówno typu 2-D ,jak i ogólnie typu M-D .Inna możliwość uogólnień polega na rozważaniu tzw. singularnych układów dyskretnych, tzn. układów dyskretnych z osobliwą macierzą po lewej stronie równania różnicowego /2.1/.

LITERATURA

[1] Eising R.:Controllability and observability of 2-D systems. IEEE Transactions on Automatic Control,vol.AC-24,no.1,1979,str.132-133.

[2] Fornasini E.,Marchesini G.:Computation of reachable and observable realizations of spatial filters. Internationa Journal of Control, vol.25,no.4,1977,str.621-635.

[3] Fornasini E.,Marchesini G.:Doubly-indexed dynamical systems : state space models and structural properties. Mathematical System Theory. vol.12,no.1,1978,str.59-72.

[4] Kaczorek T.: Two-Dimensional Linear Systems. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[5] Kaczorek T.: General response formula for two-dimensional linear systems with variable coefficients. IEEE Transactions on Automatic Control,vol.AC-31,no.2,1986,str.278-280.

[6] Kaczorek T.,Klamka J.: Minimum energy control of 2-D linear systems with variable coefficients. International Journal of Control,vol.44, no.3,1986,str.645-650.

[7] Kaczorek T.,Klamka J.: Minimum energy control for general model of 2-D linear systems. International Journal of Control,vol.47,no.5, 1988.str.1555-1562.

[8] Klamka J. : Controllability and optimal control of 2-D linear systems. Foundations of Control Engineering,vol.9,no.1,1984,str.15-24.

[9] Klamka J.: Controllability of M-dimensional linear systems. Foundations of Control Engineering,vol.8,no.2,1983,str.65-74.

[10] Klamka J. :Controllability of M-dimensional linear discrete systems in Banach spaces. Proceedings of V Polish-English Seminar on Real Time Process Control. Radziejowice ,1986,str.217-226.

[11] Klamka J.,Kaczorek T.: Local controllability and minimum energy control of n-D linear systems. Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences,serie des sciences techniques,vol.35,no.11-12,1987,str.679-685.

[12] Marszałek W. : On solving of some heat exchangers problems via image processing equations. Archiwum Termodynamiki, vol.8,no.1-2,1987,str. 55-71.

Recenzent: Prof.dr h.inż.J.Walczak

Wpłynęło do Redakcji do 1990-04-30.

CONTROLLABILITY OF 2-D TYPE DISCRETE SYSTEMS

S u m m a r y

The definitions of total and local controllability in an established rectangle are given for linear, stationary discrete 2-D systems. Applying a properly defined controllability matrix, the necessary and sufficient conditions of total and local controllability of 2-D type discrete systems have been formulated and proved.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ ТИПА 2-D

Р е з ю м е

В работе дано определение общей и локальной управляемости в данном прямоугольнике для линейных, стационарных систем дискретного типа 2-D. Используя соответственно определенную матрицу управляемости дана формулировка и доказаны необходимые и достаточные условия общей и локальной управляемости дискретных систем типа 2-D.