

Krzysztof GRYGIEREK

ANALIZA KOMPUTEROWA KOMPOZYTOWYCH PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH O PROFILU ZAMKNIĘTYM

Streszczenie. W artykule tym przedstawiono opis wariacyjny kompozytowych prętów cienkościennych. Zostały podane podstawowe określenia geometryczne, kinematyka oraz równanie wariacyjne tych ustrojów. Poprawność przedstawionej teorii sprawdzono na przykładzie.

COMPUTER ANYLYSIS OF THE COMPOSITE THIN-WALLED BEAMS WITH CLOSED CROSS SECTION

Summary. In this paper the variational description of the thin-walled composites beams with closed cross-section is presented. The fundamental geometry relations, kinematics assumptions and variational equations are given here. The correctness of the theory is checked in the example.

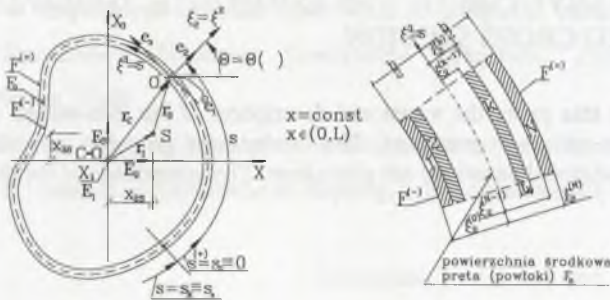
Wstęp

Pręty cienkościenne w przemyśle znalazły szerokie zastosowanie, szczególnie zaś w budownictwie czy też lotnictwie. W zakresie prętów izotropowych o profilu zamkniętym podstawy teorii możemy znaleźć w pracy W.Z. Vlasowa [10]. W Polsce badania nad tą tematyką prowadzili: J. Rutecki [8], a ostatnio J.B. Obrębski [6]. Bardzo ciekawą pozycją z tego zakresu jest również monografia A. Gjelsvika [2]. Podstawy MES-u w obliczeniach prętów cienkościennych możemy znaleźć w artykule G.A. Gunnlaugssona [4]. W ostatnich kilkunastu latach rozwój technologii spowodował, pojawienie się bardzo wytrzymałych, a przy tym lekkich materiałów kompozytowych. Szybko je również wykorzystano w budowie prętów cienkościennych i zastosowano przede wszystkim w przemyśle lotniczym. Jedną z pierwszych prac z tego tematu, a dotyczą prętów o profilu otwartym, przedstawili N.R. Bauld i L. Tzeng [1]. Szczególne problemy pojawiające się przy opisie teorii prętów cienkościennych to występująca w tych ustrojach deplanacja. W tym też kierunku prowadzone są w ostatnich latach dokładne badania. Bardzo interesującą propozycję przedstawili A.D. Stemple i S.W. Lee [9],

w której przy obliczaniu numerycznym deformacji wyróżnili osobne „nody” służące do obliczania deplacji.

W pracy tej przedstawiono opis stanów przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia w kompozytowych prętach cienkościennych, bazujący na teorii powłok walcowych, cienkościennych. Do rozwiązania równania wariacyjnego wykorzystano MES. Zastosowano przy tym metodę drugiego przybliżenia, zaproponowaną przez J.B. Obrębskiego [7] w prętach izotropowych, do obliczenia współrzędnej wycinkowej i funkcji deplacji dla prętów kompozytowych. Poprawność metody została sprawdzona na przykładach.

2. Kinematyka kompozytowego pręta cienkościennego



Rys.1. Geometria kompozytowego pręta cienkościennego
Fig.1. Coordinate system of the composite thin-walled beam

Pręt cienkościenny modelować będziemy powłoką walcową, cienkościenną, wielowarstwową, zamkniętą składającą się z N warstw; grubość każdej z k -tej warstwy oznaczymy przez t_k , por. rys. 1. Grubość powłoki przyjmujemy za równą h , tak że $h = \sum_{k=1}^N t_k$.

Przy opisie geometrii powłoki będziemy stosować dwa podstawowe układy współrzędnych:

- układ ortogonalny OX_i , z bazą ortonormalną E_i , zlokalizowany w środku geometrycznym przekroju pręta, o współrzędnej $x_i = x \in (0, L)$,
- układ lokalny $O\xi_i$, z bazą ortogonalną e_i , umieszczony w dowolnym punkcie O powierzchni środkowej powłoki (punkty równo oddalone od powierzchni zewnętrznych).

Zakładamy, że każdy normalny przekrój pręta płaszczyzną $x_i = const, x_i \in (0, L)$, przy przejściu z konfiguracji początkowej do aktualnej – jest realizowany przez ruch translacyjny

U_i , rotacyjny Ω_i i deplanację. Składowe $u_i(x_j)$ wektora przemieszczenia $u(x_i)$ dowolnego punktu $O(x_2, x_3)$ (powierzchni środkowej) będą miały następującą postać:

$$u(x_i) = U(x_i) + \Omega \times r - \omega E_1 \Omega_1^*, \quad (1)$$

gdzie:

$$u = u_i(x_j)E_i, \quad U = U_i(x_1)E_i, \quad \Omega = \Omega_i(x_1)E_i, \quad r = 0E_1 + x_{2S}E_2 + x_{3S}E_3, \quad \Omega_1^* \equiv \frac{d\Omega_1}{dx_1}. \quad (1.1)$$

Natomiast składowe przemieszczenia $\{\hat{u}_i(\xi_j)\}$ w lokalnym układzie współrzędnych $O^*\xi_j$:

$$\{\hat{u}_i(\xi_i)\} = \begin{Bmatrix} \hat{u}_1(\xi_i) \\ \hat{u}_2(\xi_i) \\ \hat{u}_3(\xi_i) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 + x_3\Omega_2 - x_2\Omega_3 - \omega\Omega_1^* \\ U_2 \cos\theta + U_3 \sin\theta + \Omega_1 q \\ -U_2 \sin\theta + U_3 \cos\theta + \Omega_1 p \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

gdzie przyjęto oznaczenie:

$$s_{j, \omega} = \int (2D_{11}c + 2B_{11}x_2 + B_{11}c(p - c\omega_j + s\omega_j) + A_{11}x_2(p - c\omega_j + s\omega_j)) dx \quad (2.1)$$

Występująca w równaniach (1) i (2) współrzędna wycinkowa ω zostanie omówiona w dalszej części.

3. Stan naprężenia w kompozytowym przecie cienkościennym

Zajmować się będziemy powłoką walcową, wielowarstwową, lecz nie kołową składającą się z N warstw. Każda z warstwy k -tej takiej powłoki jest modelowana materiałem ortotropowym (jednokierunkowo zbrojona). Przyjmujemy przy tym założenie, iż: element pręta $dsdx$ jest nieodkształcalny w kierunku współrzędnej s lub inaczej odkształcenie obwodowe powłoki jest w przybliżeniu równe zero, a wpływ pozostałych składowych $\varepsilon_\alpha, \gamma_{\alpha\beta}$ na naprężenia σ_β jest pomijalny, czyli: $\varepsilon_\beta \equiv 0$, $(\sigma_\beta \equiv 0)$. Po uwzględnieniu tego faktu wzory na siły wewnętrzne, a tym samym na naprężenia w przecie-powłoce przyjmą postać:

$$\begin{aligned} \{N\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_\alpha \\ \tau_{\alpha\beta} \end{Bmatrix}_k dz = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{16} \\ A_{16} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \gamma_{xs}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{16} \\ B_{16} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_{xs}^0 \end{Bmatrix}, \\ \{M\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_\alpha \\ \tau_{\alpha\beta} \end{Bmatrix}_k z dz = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{16} \\ B_{16} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \gamma_{xs}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{16} \\ D_{16} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_{xs}^0 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie: $[A] = [A_{ij}]$, $[B] = [B_{ij}]$, $[D] = [D_{ij}]$ - są znanymi z teorii warstwowych powłok cienkich macierzami sztywności.

4. Równanie wariacyjne kompozytowych prętów cienkościennych

Funkcjonał określający całkowitą energię potencjalną zapiszemy w postaci:

$$I_L[u] = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV - \int_V \{U\}^T \{\bar{X}\} dV - \int_{\partial V} \{U\}^T \{\hat{X}\} df, \quad (4)$$

w którym pierwszy człon określa energię wewnętrzną odkształceń sprężystych ośrodka, a dwa pozostałe: energię potencjalną obciążeń zewnętrznych masowych i brzegowych. Pierwszy człon funkcjonału (4) możemy po elementarnych przekształceniach zapisać:

$$W_u = \frac{1}{2} \int_0^L dx \int_0^{h/2} ds \int_{-h/2}^{h/2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} d\xi_2 = \frac{1}{2} \int_0^L dx \int_0^1 \{\varepsilon_s^o \quad \gamma_{xs}^o \quad \kappa_x^o \quad \kappa_{xx}^o\} \{N_1 \quad N_{13} \quad M_1 \quad M_{13}\}^T ds, \quad (5)$$

w którym odkształcenia za [5] będą się równać:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \gamma_{xs}^o \\ \kappa_x^o \\ \kappa_{xx}^o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi_1} \\ 0 & -\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \xi_1^2} & 0 \\ -\frac{1}{R} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi_3} & -\frac{2\partial^2(\cdot)}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} & \frac{1}{R} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} A_{1i} & 0 & 0 \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_j} A_{3j} & 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_j} A_{1j} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} A_{1i} \right) A_{1j} & 0 \\ -\frac{1}{R} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} A_{3i} & -\frac{2\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} A_{3i} \right) A_{1j} & \frac{1}{R} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} A_{1i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

co po podstawieniu zależności (2) da nam:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \gamma_{xs}^o \\ \kappa_x^o \\ \kappa_{xx}^o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \eta_1} & 0 & 0 & -\omega \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \eta_1^2} & x_3 \frac{\partial(\cdot)}{\partial \eta_1} & -x_2 \frac{\partial(\cdot)}{\partial \eta_1} \\ 0 & -s \frac{\partial(\cdot)}{\partial \eta_1} & c \frac{\partial(\cdot)}{\partial \eta_1} & \left(s \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - c \frac{\partial \omega}{\partial x_3} + p \right) \frac{\partial(\cdot)}{\partial \eta_1} & c & s \\ 0 & -c \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \eta_1^2} & -s \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \eta_1^2} & -q \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \eta_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & -ks \frac{\partial(\cdot)}{\partial \eta_1} & kc \frac{\partial(\cdot)}{\partial \eta_1} & k \left(-s \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + c \frac{\partial \omega}{\partial x_3} + p + \frac{2}{k} \right) \frac{\partial(\cdot)}{\partial \eta_1} & -kc & -ks \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{Bmatrix} = [L(\cdot)] \{U\}$$

Wykorzystując w równaniu (5) zależności na siły wewnętrzne (3), otrzymamy:

$$W_u = \frac{1}{2} \int_0^L dx \int_0^1 \{U\}^T [L(\cdot)]^T [\Delta [L(\cdot)]] \{U\} d\xi_3 = \frac{1}{2} \int_0^L dx \int_0^1 \{U\}^T [W(\cdot, *)] \{U\} d\xi_3, \quad (7)$$

gdzie: $[\Delta] = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix}$ i $[W(\cdot, *)] = [L(\cdot)]^T [\Delta [L(\cdot)]]$

Drugi i trzeci człon funkcjonału (4) zapiszemy:

$$\int_V \{U\}^T \{X\} dV = \int_0^L \{\bar{U}\}^T \{\bar{p}\} dx, \quad \int_{\partial V} \{U\}^T \{\hat{X}\} df = \{\bar{U}\}^T \{\bar{p}\}'_0 \quad (8)$$

gdzie: $\{\bar{U}\} = \{U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad \Omega_1 \quad \Omega_2 \quad \Omega_3 \quad \Omega_1\}^T$; $\{\bar{p}\} = \{\bar{n}_1 \quad \bar{t}_2 \quad \bar{t}_3 \quad \bar{m}_1 \quad \bar{m}_2 \quad \bar{m}_3 \quad \bar{b}\}^T$

W wektorze $\{\bar{p}\}$ występują kolejno siły: osiowa i tnące, momenty: skręcający i zginające oraz bimoment (w wektorze $\{\bar{p}\}$ występują analogiczne siły na brzegach $x=0, x=L$).

Ostatecznie funkcjonał Lagrange'a i jego wariacja przyjmą kolejno następującą postać:

$$I_L[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^I \{U\}^T [W(\cdot, *)] \{U\} d\xi_3 dx - \int_0^L \{\bar{U}\}^T \{\bar{p}\} dx - \{\bar{U}\}^T \{\hat{p}\}_0^L \quad (9)$$

$$\delta I_L[\mathbf{u}] = \int_0^L \int_0^I \{\delta U\}^T [W(\cdot, *)] \{U\} d\xi_3 dx - \int_0^L \{\delta \bar{U}\}^T \{\bar{p}\} dx - \{\delta \bar{U}\}^T \{\hat{p}\}_0^L \quad (10)$$

Jeżeli w przedstawionych powyżej rozważaniach wprowadzimy hipotezę Bernoulliego obowiązującą w klasycznej teorii płyt i powłok cienkich, z której tutaj wynika, iż:

$$\Omega_2 = \frac{-dU_3}{dx} = -U_3' \quad , \quad \Omega_3 = \frac{dU_2}{dx} = U_2' \quad , \quad (11)$$

to wariację energii wewnętrznych odkształceń sprężystych ośrodka zapiszemy:

$$\delta W_u = \int_0^L \begin{pmatrix} \delta U_1 \\ \delta U_2 \\ \delta U_3 \\ \delta \Omega_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{33} & I_{23} & I_{3\omega} \\ 0 & I_{23} & I_{22} & I_{2\omega} \\ 0 & I_{3\omega} & I_{2\omega} & I_{\omega\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{IV} \\ U_2^{IV} \\ U_3^{IV} \\ \Omega_1^{IV} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & S_3 & S_2 & S_\omega \\ S_3 & 0 & 0 & S_{3\omega} \\ S_2 & 0 & 0 & S_{2\omega} \\ S_\omega & S_{3\omega} & S_{2\omega} & S_{\omega\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{''''} \\ U_2^{''''} \\ U_3^{''''} \\ \Omega_1^{''''} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & S_{\omega 1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{\omega 1} & 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{''} \\ U_2^{''} \\ U_3^{''} \\ \Omega_1^{''} \end{bmatrix} dx \quad (12)$$

gdzie:

$$S_2 = \int_0^l (A_{11}x_3 + B_{11}s) ds; \quad S_{2\omega} = \int_0^l (2D_{16}s + 2B_{16}x_3 + B_{16}s(p - c\omega_3 + s\omega_2) + A_{16}x_3(p - c\omega_3 + s\omega_2)) ds;$$

$$S_3 = \int_0^l (A_{11}x_2 + B_{11}c) ds; \quad S_{3\omega} = \int_0^l (2D_{16}c + 2B_{16}x_2 + B_{16}c(p - c\omega_3 + s\omega_2) + A_{16}x_2(p - c\omega_3 + s\omega_2)) ds;$$

$$S_\omega = \int_0^l (A_{11}\omega + B_{11}q) ds; \quad S_{\omega\omega} = \int_0^l (4D_{16}q + 4B_{16}\omega + 2B_{16}q(p - c\omega_3 + s\omega_2) + 2A_{16}\omega(p - c\omega_3 + s\omega_2)) ds;$$

$$J = \int_0^l (4D_{66} + 4B_{66}(p - c\omega_3 + s\omega_2) + A_{66}(p - c\omega_3 + s\omega_2)^2) ds; \quad I_{22} = \int_0^l (A_{11}x_3^2 + D_{11}s^2 + 2B_{11}sx_3) ds;$$

$$I_{33} = \int_0^l (A_{11}x_2^2 + D_{11}c^2 + 2B_{11}cx_2) ds; \quad I_{\omega\omega} = \int_0^l (A_{11}\omega^2 + D_{11}q^2 + 2B_{11}q\omega) ds; \quad A = \int_0^l A_{11} ds;$$

$$I_{23} = \int_0^l (A_{11}x_2x_3 + D_{11}sc + B_{11}(sx_2 + cx_3)) ds; \quad I_{2\omega} = \int_0^l (A_{11}\omega x_3 + D_{11}qs + B_{11}(\omega s + qx_3)) ds;$$

$$I_{3\omega} = \int_0^l (A_{11}\omega x_2 + D_{11}cq + B_{11}(\omega c + qx_2)) ds; \quad S_{\omega 1} = \int_0^l (2B_{16} + A_{16}(p - c\omega_3 + s\omega_2)) ds \quad \text{są charakterystykami}$$

geometryczno-wyrzymałościowymi.

Po wprowadzeniu układu głównego (scharakteryzowanego przez centralne osie bezwładności, biegun główny i główny punkt zerowy, w którym oblicza się współrzędne wycinkowe) większość współczynników charakterystyk geometrycznych dwuindeksowych, o różnych wskaźnikach zeruje się. W układzie tym lokalne warunki równowagi zapiszemy:

$$\begin{bmatrix} A \frac{d^2(\cdot)}{dx^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{33} \frac{d^4(\cdot)}{dx^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{22} \frac{d^4(\cdot)}{dx^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{\omega\omega} \frac{d^4(\cdot)}{dx^4} - J \frac{d^2(\cdot)}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \Omega_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{n}_1 \\ \bar{i}_2 + \bar{m}_3 \\ \bar{i}_3 - \bar{m}_2 \\ \bar{m}_1 - \bar{b} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

5. Uogólniona współrzędna wycinkowa

Celem zdefiniowania współrzędnej wycinkowej, pojawiającej się w związkach opisujących kinematykę pręta cienkościennego, wprowadzimy nową wartość przedstawiającą stan naprężenia, a mianowicie strumień naprężenia stycznego, który obliczymy:

$$\tau(\xi_1, s) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha\beta} dz. \quad (14)$$

Rozpatrując kompozytowy pręt cienkościenny, obciążony momentem skręcającym, stwierdzamy, iż zależność pomiędzy naprężeniami tnącymi i kątem odkształcenia postaciowego przyjmie postać:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha\beta} dz = A_{66} \gamma_{xs}^o. \quad (15)$$

Jednocześnie z wprowadzeniem związku fizycznego (15) zastosujemy też drugą zależność geometryczną, określającą kąt odkształcenia postaciowego:

$$\gamma_{xs}^o = \hat{u}_{1,s} + \hat{u}_{3,1}, \quad \hat{u}_{1,s} = \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial s}, \quad \hat{u}_{3,1} = \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_1} \quad (16)$$

Porównując stronami równania (15) i (16), otrzymamy:

$$\hat{u}_1(dep) = \int_0^s \frac{\tau d\bar{s}}{A_{66}} - \int_0^s \Omega_1 p d\bar{s} = -\omega \Omega_1; \quad (17)$$

gdzie:

$$\omega(\xi_1, s) = \int_0^s \left(p - \frac{1}{\Omega_1} \frac{\tau}{A_{66}} \right) d\bar{s}. \quad (18)$$

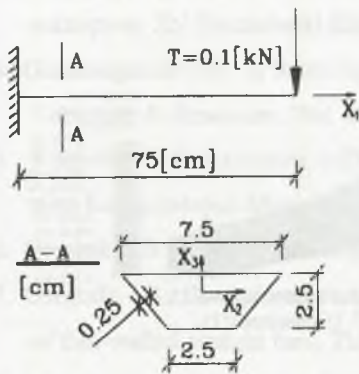
Funkcja ω występująca we wzorze (18) nazywana jest uogólnioną współrzędną wycinkową. Jak wynika z równania (18), współrzędna wycinkowa jest zależna od dwóch zmiennych ξ_1 i s (zaś s jest funkcją x_2 i x_3). Na jej charakter ma wpływ rozkład naprężeń stycznych τ , którego w początkowym etapie procesu obliczeniowego nie posiadamy. Dlatego obliczenia przyjmą charakter iteracyjny. Zaadoptujemy do prętów kompozytowych metodę II przybliżenia zaproponowaną przez Obrębskiego [7] dla prętów izotropowych.

W pierwszym kroku iteracyjnym współrzędną wycinkową obliczamy, przyjmując rozkład naprężeń stycznych jak dla czystego skręcania (np.: dla prętów o profilu zamkniętym jednokomorowych i jednorodnych: $\omega(s) = \omega_A + \omega_{As} - F \frac{s}{L}$, gdzie $\omega = \int_0^s p ds$). Przeliczając zadanie pierwszy raz znajdujemy rozkład naprężeń stycznych τ , które to podstawiamy do wzoru na współrzędną wycinkową (18) i przeliczamy zadanie drugi raz (II iteracja).

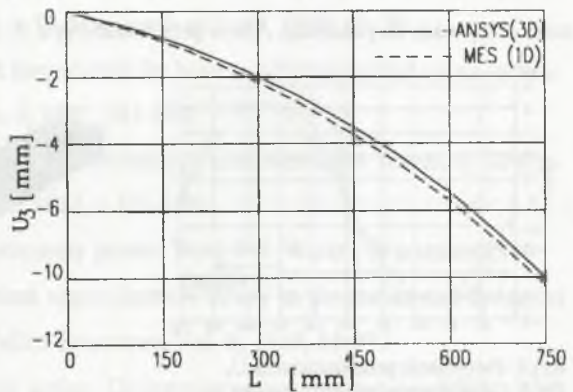
6. Przykłady

Poprawność powyżej przedstawionej teorii została sprawdzona na przykładach. Do rozwiązania równania wariacyjnego kompozytowych prętów cienkościennych wykorzystano MES, budując jednowymiarowy (1D) element skończony o 14 stopniach swobody. Wyniki otrzymane autorskim programem, napisanym w Matlab-ie, zostały porównane z rezultatami uzyskanymi za pomocą pakietu Ansys 5.4. W programie tym rozwiązanie otrzymano stosując warstwowe elementy skończone typu powłokowego (3D).

Przykład 1. Belka utwierdzona z jednej strony, o schemacie i przekroju jak na rysunku 2, została obciążona na drugim końcu poprzeczną siłą skupioną. Belka jest laminatem zbudowanym z 5 warstw: szkło E / epoksyd o kodzie [0 90 0 90 0] i następujących charakterystykach materiałowych: $E_1 = 45 \text{ GPa}$, $E_2 = 12 \text{ GPa}$, $G = 5.5 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.28$. Grubość każdej z warstw $t_i = 0.5 \text{ mm}$. Na rys. 3 zostało przedstawione porównanie ugięcia belki otrzymanego dwiema metodami.

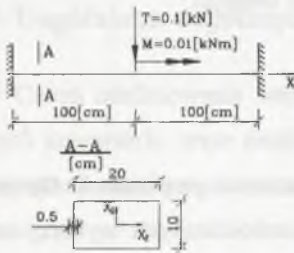


Rys.2. Schemat zadania
Fig.2. Scheme of the problem

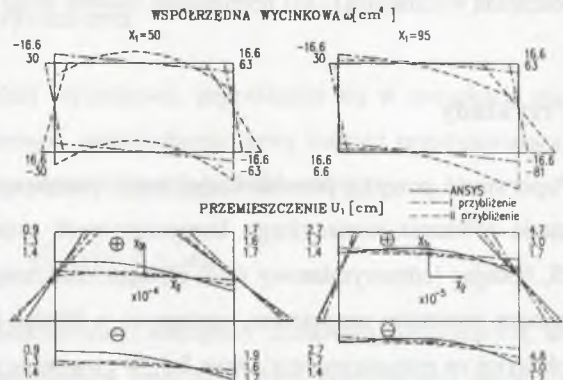


Rys.3. Porównanie przemieszczenia U_3
Fig.3. Comparison of the displacement U_3

Przykład 2. Tutaj przeliczono zadanie o schemacie jak w przykł. 1, z tym iż na końcu pręta została przyłożona siła osiowa powodująca jego rozciąganie. Wartość jej to $N = 0.1 \text{ kN}$. Przykład ten również przeliczono dwoma metodami. Przemieszczenia U_1 obliczone na końcu pręta ($X_1 = 750 \text{ mm}$) wyniosły: Ansys (3D) - $5.4 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$, MES (1D) - $5.3 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$. Jak widać, różnica między wynikami nie przekracza 2%.



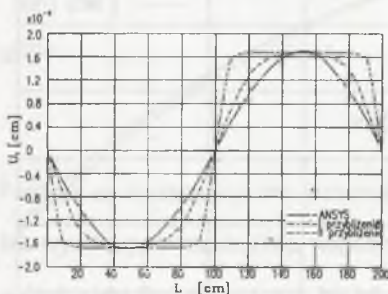
Rys.4. Schemat zadania
Fig.4. Scheme of the problem



Rys.5. Porównanie współrzędnej wycinkowej i przemieszczenia U_1
Fig.5. Comparison of the warping function and displacement U_1

Przykład 3. Belka utwierdzona obustronnie, o schemacie i przekroju jak na rysunku 4, została obciążona w środku momentem skręcającym oraz siłą tnącą. Belka jest laminatem zbudowanym z 5 warstw: szkło E / epoksyd o kodzie [15 -15 15 -15 15] o charakterystykach materiałowych jak w przykł. 1. Grubość każdej z warstw $t_i = 0.1 \text{ mm}$. Porównanie rezultatów otrzymanych z I i II przybliżenia oraz pakietem Ansys zostało przedstawione na rys. 5.

Przykład 4. Dla schematu jak w przykł. 3, a o kodzie laminatu [0 90 0 90 0], zostały wyznaczone przemieszczenia U_1 w narożniku profilu, por. rys. 6. Globalny rozkład tych przemieszczeń otrzymanych pakietem Ansys przedstawia rys. 7.



Rys.6. Porównanie przemieszczenia U_1
Fig.6. Comparison of the displacement U_1



Rys.7. Przemieszczenie U_1
Fig.7. Displacement U_1

7. Wnioski

Przedstawione powyżej przykłady wykazały dobrą zbieżność w przypadkach problemów, w których występuje zginanie i rozciąganie, por. przykł. 1 i 2, gdzie wyniki otrzymane dwiema metodami są identyczne. Gorsza zbieżność występuje w przypadku skręcania, por. przykł. 3 i 4. Jednak nie można tutaj pominąć zalet związanych z wykorzystaniem metody II przybliżenia. Z porównania I i II iteracji, rys.5, można stwierdzić, iż rezultaty otrzymane z II przybliżenia swoim charakterem lepiej odzwierciedlają wyniki uzyskane za pomocą pakietu Ansys. Mamy do czynienia z nieliniowym charakterem współrzędnej wycinkowej, a tym samym z nieliniowym wpływem deplanacji na przemieszczenie U_1 i naprężenia normalne (w I iteracji rozkład ten jest liniowy). Największe korzyści, stosując II przybliżenie, uzyskujemy w pobliżu podpór i miejsca przyłożenia obciążenia, gdzie rezultaty znacznie lepiej odzwierciedlają charakter zachowania się pręta, por. rys. 6. W II etapie da się również zauważyć koncentrację naprężeń normalnych i przyrost przemieszczeń w narożach pręta. Niestety, jest to okupione większym nakładem obliczeń. W metodzie tej tracą również swój charakter siły przekrojowe, które są zawyżone ze względu na obliczenia wg nowego bieguna.

LITERATURA

1. Bauld N.R., Tzeng Jr., Tzeng L-S.: A Vlasov theory for fibres-reinforced beams with thin-walled open cross section, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 20, No.3, 1984, 277-297.
2. Gjelsvik A.: *The theory of thin walled bars*, A Willey-Interscience Publication, N.Y., 1981.
3. Grygierek K.: Opis wariacyjny kompozytowych prętów cienkościennych o profilu zamkniętym, *ZN Politechniki Śląskiej*, s. Budownictwo nr 1440, 1999, 69-79.
4. Gunnlaugsson G.A.: A finite element formulation for beams with thin walled cross-section, *Computer & Structures*, Vol. 15, No. 6, 1982, 691-699.
5. Kobieliw B.B, Łariczew A.D.: Model anizotropnych tonkostiennych stierżniej. *Mechanika Kompozytowych Materialow*, No.1, 1988, s.102-109.
6. Obrębski J.B.: *Cienkościenne sprężyste pręty proste*. Wyd. Pol. Warsz., Warszawa 1991.
7. Obrębski J.B.: Second order and second approximation theory in the statics and dynamics of thin-walled straight bars, *Thin-Walled Structures*, Vol. 8, 1989, 81-97.
8. Rutecki J.: *Cienkościenne konstrukcje nośne. Obliczenia wytrzymałościowe*, PWN, Warszawa 1966.

9. Stemple A.D, Lee S.W.: Finite element model for composite beams with arbitrary cross-sectional warping, *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 12, 1988, 1512-1520.
10. Vlasov W.Z.: *Thin-walled elastic beams (2 nd ed.)*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem 1961.

Recenzent: Prof.dr hab.inz. Jerzy Wyrwał

Abstract

In this paper the displacement, deformation and stress states in the thin-walled composite beams with the closed cross-section, was presented. The beam was modelled with the closed cylindrical multilayered shell. Variational equations of the composite thin-walled beams were build. The second approach theory, as formulated by Obrębski [6] in the isotropic beams, was used to the solution of warping function in the composite beams. The FEM was used to the solution of the variational equations. The 1D finite element with 14 degree of freedom was build. The first and second solution was compared with results obtained by the used Ansys 5.4 programme in which the 3D-shell element was used.