

Grzegorz MALISZEWSKI\*  
Politechnika Koszalińska

## ITERACYJNA METODA OBLICZANIA MASZTÓW W UJĘCIU TEORII II RZĘDU

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono wybrane zagadnienia dotyczące analizy statycznej masztów. Omówiono iteracyjną metodę obliczania masztów w ujęciu teorii II rzędu za pomocą metody elementów skończonych. Przyjęto podstawowy element trzonu masztu w postaci pręta podatnego na ściskanie, zginanie i ścinanie, obciążonego ciągłym parciem wiatru. Przedstawiono rozwiązanie odciążu jako jednego elementu krzywoliniowego. Proponowana metoda rozwiązania nadaje się do zastosowań praktycznych przy użyciu komputerowych metod analizy konstrukcji.

## ITERATIVE METHOD OF CALCULATION OF GUYED MASTS ACCORDING TO SECOND ORDER THEORY

**Summary.** The paper describes selected problems of statical analysis of guyed masts. Iterative method of guyed masts calculation (using FEM analysis) according to second order theory is presented. The shaft is modelled using elastic beam element taking into account compression flexural and shear properties and wind load. Guy ropes are solved as curvilinear elements. The method of guyed mast analysis presented in the paper can be applied in practical and computer-aided design.

### 1. Wprowadzenie

Mimo stale rozwijających się systemów łączności maszty, obok wież, nadal pozostają najliczniejszymi konstrukcjami wsporczymi wspomagającymi przekaz informacji. Jednak mimo wielu lat doświadczeń i dostępności technik komputerowych, trudno doszukać się na krajowym rynku ogólnie dostępnego oprogramowania pozwalającego obliczać maszty wg nowoczesnych metod analizy konstrukcji inżynierskich. A tego rodzaju potrzeba stanie się szczególnie ważna, gdy zacznie obowiązywać nowa wersja normy masztowej [1], która wprowadza konieczność obliczania masztów z uwzględnieniem nieliniowej analizy sprężystej w ujęciu teorii II rzędu.

---

\*Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Szymon Pałkowski.

Celem pracy jest przedstawienie pewnej metody analizy statycznej masztów z odciągami opartej na metodzie elementów skończonych (MES). Z uwagi na nieliniowość geometryczną odciągów masztu rozwiązanie uzyskuje się na drodze iteracyjnej, przy czym stosowanemu procesowi iteracyjnemu nadano prosty sens fizyczny, polegający na zastępowaniu rzeczywistych odciągów elementami prostoliniowymi, ale o zmiennej, ciągle uaktualnianej, sztywności na rozciąganie. Na podstawie algorytmu tej metody utworzono program komputerowy, który wykorzystano do rozwiązania kilku przykładów liczbowych.

## 2. Elementy masztu

Masztory są typowymi urządzeniami ciągnowo-prętowymi, tj. składającymi się z elementów zarówno belkowych (trzon masztu), jak i ciągnowych (odciągi). W związku z tym do analizy statycznej i dynamicznej tych urządzeń z powodzeniem można stosować MES pod warunkiem, że znane są macierze sztywności wymienionych elementów masztu.

### 2.1. Trzon masztu

Trzony masztów są na ogół projektowane w postaci kratownicy; można je zatem aproksymować elementami prostoliniowymi o sztywności na ściskanie (EA), zginanie (EI) oraz ścianie ( $GA_z$ ). W przypadku węzłowego oddziaływania obciążenia na elementy trzonu masztu, podstawowe zależności między siłami a przemieszczeniami elementu (rys. 1), są opisane znanym równaniem

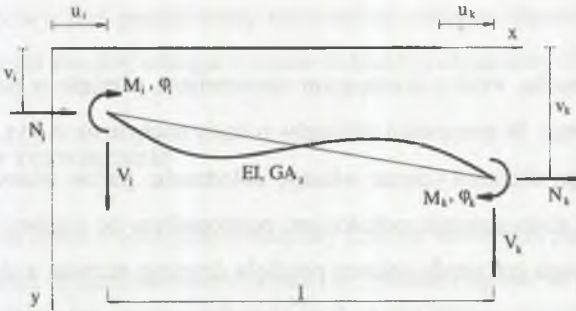
$$\mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{P}, \quad (1)$$

w którym

$$\mathbf{u} = \{u_i \ v_i \ \varphi_i \ u_k \ v_k \ \varphi_k\}, \quad (2)$$

$$\mathbf{P} = \{N_i \ V_i \ M_i \ N_k \ V_k \ M_k\}, \quad (3)$$

a macierz sztywności elementu  $\mathbf{k}$  ma postać [2]



Rys. 1. Dodatnie zwroty sił i przemieszczeń węzłowych dla układu płaskiego  
 Fig. 1. Positive senses of forces and nodal displacements for a two-dimensional element

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & m \frac{EI}{l^3} & n \frac{EI}{l^2} & 0 & -m \frac{EI}{l^3} & n \frac{EI}{l^2} \\ 0 & n \frac{EI}{l^2} & p \frac{EI}{l} & 0 & -n \frac{EI}{l^2} & q \frac{EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -m \frac{EI}{l^3} & -n \frac{EI}{l^2} & 0 & m \frac{EI}{l^3} & -n \frac{EI}{l^2} \\ 0 & n \frac{EI}{l^2} & q \frac{EI}{l} & 0 & -n \frac{EI}{l^2} & p \frac{EI}{l} \end{bmatrix} \quad (4)$$

W przypadku siły ściskającej w elemencie ( $N = N_1 = -N_k$ ) współczynniki  $m, n, p, q$  są określone wzorami [2]

$$m = \frac{\mu^2 \varepsilon^3 \sin \varepsilon}{2(1 - \cos \varepsilon) - \mu \varepsilon \sin \varepsilon}, \quad n = \frac{\mu \varepsilon^2 (1 - \cos \varepsilon)}{2(1 - \cos \varepsilon) - \mu \varepsilon \sin \varepsilon}, \quad (5)$$

$$p = \frac{\varepsilon (\sin \varepsilon - \mu \varepsilon \cos \varepsilon)}{2(1 - \cos \varepsilon) - \mu \varepsilon \sin \varepsilon}, \quad q = \frac{\varepsilon (\mu \varepsilon - \sin \varepsilon)}{2(1 - \cos \varepsilon) - \mu \varepsilon \sin \varepsilon},$$

$$\mu = 1 - \frac{N}{GA_z}, \quad \varepsilon = l \sqrt{\frac{N}{\mu EI}}.$$

Wartości  $GA_z$ , dla różnych rodzajów skratowania masztu zestawiono np. w [2].

## 2.2. Odciąg masztu

Cały odciąg masztu, wraz z działającym obciążeniem, przyjęto w postaci jednego elementu krzywoliniowego. W przypadku odciągów o kącie nachylenia  $\alpha$  (rys. 3) mniejszym niż  $60^\circ$  wszystkie rodzaje obciążeń (ciężar własny, oblodzenie, parcie wiatru) można zastąpić jednym obciążeniem równomiernie rozłożonym, prostopadłym do cięciwy odciągu. Krzywoliniowy element odciągu jest wtedy opisany parabolą drugiego stopnia, a równanie odciągu, z którego można wyznaczyć wartość siły w  $S$  na kierunku cięciwy, ma prostą postać [3]

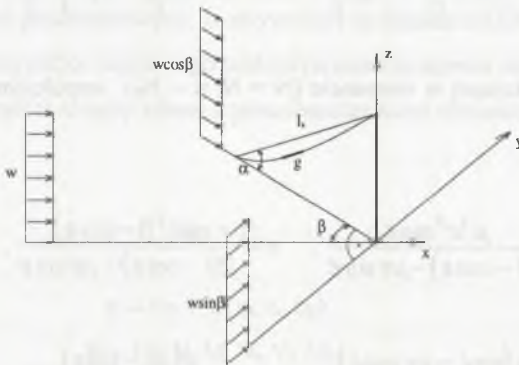
$$S^3 + S^2 EA \left[ 1 - \frac{1}{s_0} (l_s - \alpha_l \Delta T s_0) \right] = \frac{EA q^2 l_s^3}{24 s_0} \quad (6)$$

gdzie:  $A$  – przekrój odciągu,  $l_s$  – aktualna długość cięciwy odciągu,  $s_0$  – początkowa długość odciągu,  $\alpha_l$  – współczynnik wydłużalności liniowej,  $\Delta T$  – przyrost temperatury.

Wypadkowa wartość obciążenia  $q$  w równaniu (6) jest określona wzorem [3]

$$q = \sqrt{(w \sin \beta)^2 + (g \cos \alpha + w \sin^2 \alpha \cos \beta)^2}, \quad (7)$$

w którym  $w$  jest średnim parciem wiatru na odciąg (przy założeniu, że odciąg jest usytuowany prostopadle do kierunku obciążenia wiatrem), a  $g$  jest ciężarem własnym odciągu.



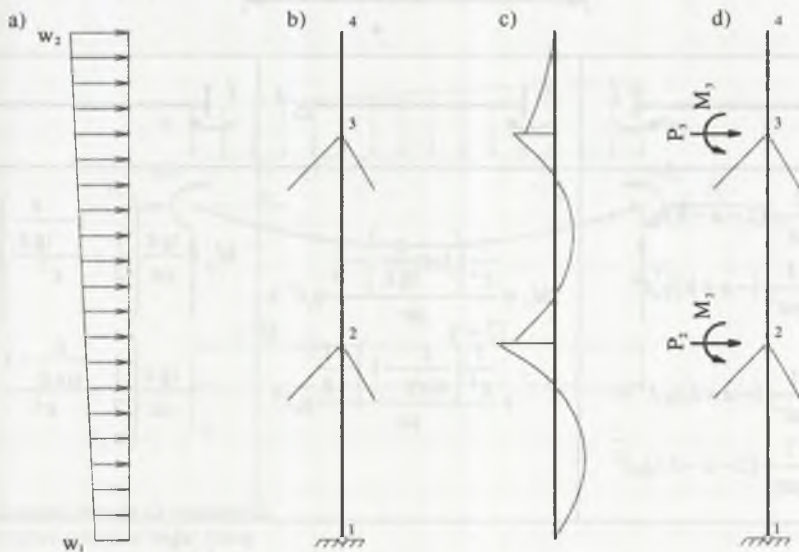
Rys. 2. Odciąg masztu pod wpływem złożonego stanu obciążenia  
Fig. 2. The guy rope under three-dimensional state of load

Równanie (6) pozwala też na łatwe wyznaczenie sztywności sieciowej odciągu na kierunku jego cięciwy. W tym celu, dla pewnej nowej długości cięciwy cięgna  $l_s^*$ , należy z równania (6) wyznaczyć nową wartość siły w cięgnię  $S^*$ . Stosunek zmiany siły w cięgnię do zmiany

długości jego cięciwy jest poszukiwaną sztywnością odciągu. Sposób wykorzystania tak określonej sztywności sieciowej odciągu zostanie dokładniej objaśniony w punkcie 3.2 pracy.

### 3. Opis metody rozwiązania

Jest dany pewien maszt z odciągami obciążony liniowo zmiennym parciem wiatru (rys. 3). Proponowana metoda obliczania masztu składa się z dwóch etapów. W pierwszym etapie zakłada się (podobnie jak np. w metodzie Crossa), że przyjęte wewnętrzne węzły trzonu masztu są utwierdzone zarówno na przesuw, jak i na obrót. W układzie tym wyznacza się wartości wyjściowych momentów zginających (rys. 3c), a następnie wartości reakcji podporowych. W drugim etapie, na podstawie nierównoważonych skupionych sił węzłowych (rys. 3d), oblicza się maszt z uwzględnieniem podanych w p. 2. macierzy sztywności elementów. Z uwagi na to, że odciągi masztów są nieliniowo odkształcalne, drugi etap rozwiązania jest realizowany na drodze iteracyjnej. W rezultacie końcowe rozwiązanie jest sumą rozwiązań uzyskanych w obu etapach.



Rys. 3. Ilustracja graficzna metody rozwiązania: a) obciążenie wiatrem, b) schemat statyczny masztu, c) wykres momentów zginających w układzie wyjściowym, d) obciążenie masztu siłami węzłowymi

Fig. 3. The graphical description of solution method: a) wind load, b) scheme of mast, c) bendings moments in initial configuration, d) nodal forces load of mast

### 3.1. Momenty wyjściowe elementów trzonu masztu

Elementy trzonu masztu obciążone w sposób ciągły parciem wiatru są podatne na ściskanie, zginanie i ścinanie. Momenty wyjściowe tego rodzaju elementów, z uwzględnieniem wpływu sił ściskających na sztywność giętą elementu, zestawiono w tabelicy 1.

Znajomość momentów wyjściowych, i obciążenia przęsłowego pozwalają następnie na wyznaczenie reakcji podporowych elementu na kierunku działającego obciążenia, a tym samym na określenie uogólnionych sił węzłowych przyjmowanych do drugiego etapu obliczeń.

Tabelica 1

Momenty wyjściowe elementów trzonu masztu (opracowano na podstawie [4])

$M_i = \frac{1}{2\mu\epsilon^2}(2-a-b)q_i l^2 + \frac{1}{2\mu\epsilon^2}(-a+b)q_k l^2$ $M_k = \frac{1}{2\mu\epsilon^2}(-a+b)q_i l^2 + \frac{1}{2\mu\epsilon^2}(2-a-b)q_k l^2$	$M_i = \frac{1}{\epsilon^2} \left( 1 - \frac{\epsilon}{\operatorname{tg} \epsilon} \right) - \frac{1}{3} \frac{1}{\mu c} q_i l^2 + \frac{1}{\epsilon^2} \left( \frac{\epsilon}{\sin \epsilon} - 1 \right) - \frac{1}{6} \frac{1}{\mu c} q_k l^2$	$M_i = \frac{\operatorname{tg} \epsilon}{\mu \epsilon} \left( \frac{1}{2} - \frac{1 - \frac{\epsilon}{\operatorname{tg} \epsilon}}{\epsilon^2} \right) q_i l^2 + \frac{\operatorname{tg} \epsilon}{\mu \epsilon} \left( \frac{1}{2} - \frac{\frac{\epsilon}{\sin \epsilon} - 1}{\epsilon^2} \right) q_k l^2$
$\mu = 1 - \frac{N}{GA_z} \quad \epsilon = l \sqrt{\frac{N}{\mu EI}} \quad a = \frac{\epsilon/2}{\operatorname{tg}(\epsilon/2)} \quad b = \frac{\frac{1}{\mu} - 1 + \frac{\epsilon^2}{12}}{\frac{1}{\mu} - \frac{\epsilon/2}{\operatorname{tg}(\epsilon/2)}} \quad c = \frac{1}{\mu} - \frac{\epsilon}{\operatorname{tg} \epsilon}$		

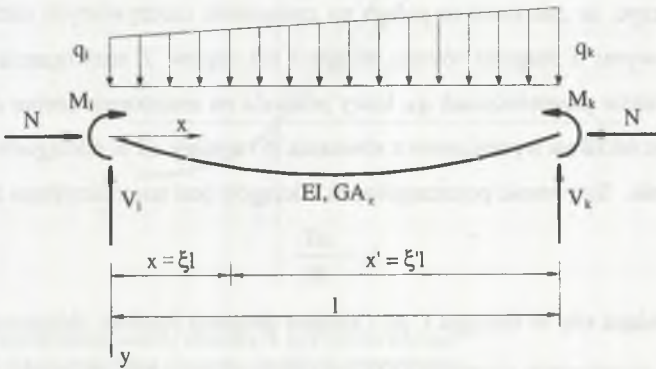
Funkcje rozkładu momentu zginającego, siły tnącej, linii ugięcia i kąta obrotu przekrojów rozpatrywanego elementu (rys. 4) można obliczyć z następujących zależności [5]

$$M(\xi) = \frac{1}{\mu\epsilon^2} \left( \frac{\sin \epsilon \xi'}{\sin \epsilon} - \xi' \right) q_i l^2 + \frac{1}{\mu\epsilon^2} \left( \frac{\sin \epsilon \xi}{\sin \epsilon} - \xi \right) q_k l^2 + \frac{\sin \epsilon \xi'}{\sin \epsilon} M_i + \frac{\sin \epsilon \xi}{\sin \epsilon} M_k, \quad (8)$$

$$Q(\xi) = \frac{1}{\mu\epsilon^2} \left( 1 - \frac{\epsilon \cos \epsilon \xi'}{\sin \epsilon} \right) q_i l + \frac{1}{\mu\epsilon^2} \left( \frac{\epsilon \cos \epsilon \xi}{\sin \epsilon} - 1 \right) q_k l - \frac{\epsilon \cos \epsilon \xi'}{\sin \epsilon} \frac{M_i}{l} + \frac{\epsilon \cos \epsilon \xi}{\sin \epsilon} \frac{M_k}{l}, \quad (9)$$

$$w(\xi) = \frac{l^2}{\mu\epsilon^2 EI} \left\{ \left[ \frac{1}{\mu\epsilon^2} \left( \frac{\sin \epsilon \xi'}{\sin \epsilon} - \xi' \right) - \frac{\xi' - \xi'^3}{6} \right] q_i l^2 + \left[ \frac{1}{\mu\epsilon^2} \left( \frac{\sin \epsilon \xi}{\sin \epsilon} - \xi \right) - \frac{\xi - \xi^3}{6} \right] q_k l^2 + \left( \frac{\sin \epsilon \xi'}{\sin \epsilon} - \xi' \right) M_i + \left( \frac{\sin \epsilon \xi}{\sin \epsilon} - \xi \right) M_k \right\}, \quad (10)$$

$$\varphi(\xi) = \frac{l^2}{\mu\epsilon^2 EI} \left\{ \left[ \frac{1}{\epsilon^2} \left( 1 - \frac{\epsilon \cos \epsilon \xi'}{\sin \epsilon} \right) + \frac{1 - 3\xi'^2}{6} \right] q_i l + \left[ \frac{1}{\epsilon^2} \left( \frac{\epsilon \cos \epsilon \xi}{\sin \epsilon} - 1 \right) - \frac{1 - 3\xi^2}{6} \right] q_k l + \left( 1 - \frac{\mu\epsilon \cos \epsilon \xi'}{\sin \epsilon} \right) \frac{M_i}{l} + \left( \frac{\mu\epsilon \cos \epsilon \xi}{\sin \epsilon} - 1 \right) \frac{M_k}{l} \right\}. \quad (11)$$



Rys. 4. Dodatnie zwroty sił węzłowych  
 Fig. 4. Positive senses of nodal forces

Należy zaznaczyć, że siły wewnętrzne określone wzorami (8) i (9) są zdefiniowane w odkształconej konfiguracji elementu, a więc – przykładowo – siły tnące  $Q(\xi)$  są prostopadłe do odkształconej osi elementu.

### 3.2. Iteracyjna metoda rozwiązania za pomocą MES

W drugim etapie obliczeń jest stosowana typowa procedura MES oparta na znanym równaniu macierzowym

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{R}, \quad (12)$$

w którym  $\mathbf{K}$  jest globalną macierzą sztywności,  $\mathbf{q}$  wektorem przemieszczeń węzłowych, a  $\mathbf{R}$  jest uogólnionym wektorem obciążeń węzłowych.

Z uwagi na nieliniową charakterystykę odciągów, do rozwiązania zagadnienia autorzy proponują zastosowanie iteracyjnej metody linearyzacji, przy czym stosowanemu procesowi nadaje się sens fizyczny poprzez zastąpienie nieliniowej (zmiennej) sztywności cięgien – sztywnością stałą, lecz różną w każdym etapie rozwiązania. Szczegółowy tok postępowania ma następujący przebieg.

**1. Przybliżenie.** Zakłada się, że sztywność poszczególnych odciągów na rozciąganie jest równa

$$k_1 = \frac{EA}{l_s},$$

gdzie:  $E$  – współczynnik sprężystości,  $A$  – przekrój,  $l_s$  – długość cięciwy odciągu.

Łatwo zauważyć, że założenie to polega na zastąpieniu rzeczywistych odciągów elementami prostoliniowymi o długości równej długości ich cięciw. Z rozwiązania równania (12) otrzymuje się wektor przemieszczeń  $\mathbf{q}_1$ , który pozwala na znalezienie zmian długości cięciw odciągów, a więc także na wyznaczenie z równania (6) zmiany sił w odciągach.

**2. Przybliżenie.** Sztywność poszczególnych odciągów jest teraz określana z zależności

$$k_2 = \frac{\Delta S_1}{\Delta l_1},$$

gdzie:  $\Delta S_1$  - zmiana siły w odciągu i  $\Delta l_1$  - zmiana długości cięciwy obliczone w pierwszym przybliżeniu. Z rozwiązania równania (12), uwzględniającego tak obliczone sztywności odciągów, otrzymuje się nowy wektor przemieszczeń węzłowych  $\mathbf{q}_2$ , a następnie nowe długości cięciw i nowe wartości sił w odciągach.

W  $i$ -tym przybliżeniu sztywności odciągów są obliczane ze wzoru

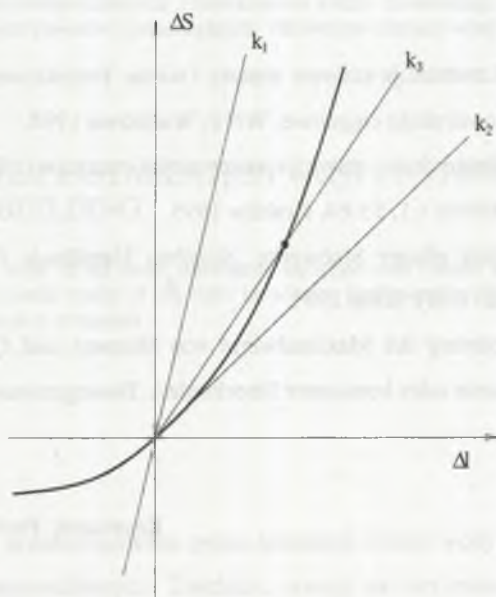
$$k_i = \frac{\Delta S_{i-1}}{\Delta l_{i-1}}.$$

Przedstawiona metoda rozwiązania, którą można określić mianem *metody zmiennej sztywności odciągów*, charakteryzuje się dobrą zbieżnością, co oznacza, że różnice między oblicza-



nymi sztywnościami odcigów w kolejnych iteracjach szybko maleją. Dla uzyskania praktycznego rozwiązania wystarczają na ogół 3-4 iteracje. Graficzną interpretację metody przedstawiono na rys. 6. Grubszą krzywą zaznaczono na tym rysunku rzeczywistą nieliniową zależność między zmianą siły w ciągnięciu a zmianą długości cięciwy, a cieńszymi liniami prostymi – liniowe zależności przyjmowane w kolejnych iteracjach.

Po zakończeniu ciągu iteracyjnego oblicza się siły wewnętrzne w elementach i dodaje się, jak już wspomiano, do sił wewnętrznych obliczonych w schemacie podstawowym geometrycznie wyznaczalnym.



Rys. 5. Graficzna interpretacja metody zmiennych sztywności odciągu  
Fig. 5. Method of changing stiffness guy rope. Graphical interpretation

#### 4. Uwagi końcowe

W pracy podano iteracyjną metodę obliczania masztów z odciegami przy przyjęciu elementu trzonu masztu obciążonego ciągłym, liniowo zmiennym, obciążeniem poprzecznym. Prostsza nieco metoda rozwiązania, ale prowadząca do znacznego wzrostu liczby stopni swobody ustroju, mogłaby polegać na zastąpieniu obciążenia ciągłego równoważnym obciąże-

niem skupionym. Przy takim podejściu opisana w p. 3. metoda analizy byłaby ograniczona tylko do drugiego etapu rozwiązania. Autorzy pracy, dla celów testowania programu, korzystali z obydwu sposobów rozwiązania otrzymując, praktycznie biorąc, te same wyniki.

W pracy, dla uproszczenia, podano macierz sztywności (4) dla układu płaskiego. Rozszerzenie tej macierzy na element przestrzenny, jakim w rzeczywistości jest trzon maszty, przedstawiono np. w [2].

Z uwagi na ograniczoną objętość artykułu przykład liczbowy zostanie przedstawiony w czasie konferencji.

## LITERATURA

1. Pr PN-B-03204 Konstrukcje stalowe. maszty i wieże. Projektowania i wykonanie.
2. Pałkowski Sz.: Konstrukcje ciągnowe, WNT, Warszawa 1994.
3. Pałkowski Sz.: Zagadnienia statyki i stateczności masztów. IX Międzyn. Konf. Nauk. Konstrukcje Metalowe, t.1, 55-64, Kraków 1995.
4. Rubin H.: Baustatik ebener Stabwerke. Stahlbau Handbuch, Band 1 Teil A, Stahlbau-Verlagsgesellschaft mbH, Köln 1993.
5. Rubin H.: Berechnung der Maximalwerte von Moment und Querkraft nach Theorie II. Ordnung bei linearer oder konstanter Streckenlast, Bauingenieur 53, 1978, 97-107.

Recenzent: Prof dr inż. Janusz Murzewski

## Abstract

The paper describes selected problems of statical analysis of guyed masts. Considering the nonlinear relationship between the cable force  $S$  and the cable length the problem can be solved by using the iterative method. One of these methods – according to second order theory – was shown and discussed. The method of guyed mast analysis presented in the paper can be applied in practical and computer-aided design.