ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLASKIEJ 2002
Seria: BUDOWNICTWO z. 95 Nr kol. 1559

Magdalena ŁASECKA*
Politechnika Poznańska

ANALIZA UKŁADÓW PRĘTOWYCH Z NIEJEDNORODNYMI WARUNKAMI BRZEGOWYMI METODĄ FUNKCJI WŁASNYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono możliwość zastosowania metody funkcji własnych do analizy jednowymiarowych układów prętowych o strukturze dyskretnej z niejednorodnymi warunkami brzegowymi. Koncepcję omówiono na przykładzie zginania belki Eulera-Bernoulliego, której węzły brzegowe oparte są na sprężystych podporach o niezerowych przemieszczeniach, a obciążenie stanowi dowolny ciąg węzłowych sił skupionych. Do obliczeń przyjęto dyskretny podział belki na dwuwęzłowe elementy skończone. Warunki równowagi zapisano w postaci równań różnicowych, których rozwiązania otrzymano w postaci analitycznej.

ANALYSIS OF BEAM SYSTEMS WITH NON-HOMOGENEOUS BOUNDARY CONDITIONS USING EIGENFUNCTION METHOD

Summary. A possibility of application of eigenfunction method for beam systems with discrete structure with non-homogeneous boundary conditions is presented. A conception is given for example of bending of Euler-Bernoulli beam. Its boundary nodes are elastically supported and have non-zero displacements. The beam is loaded by an arbitrary set of nodal forces. The discretisation of the beam into two-node finite elements is adopted. The equilibrium conditions are expressed in the form of difference equations. These equations are solved analytically.

1. Wstęp

Szybki rozwój metod numerycznych w obliczeniach konstrukcji inżynierskich, a szczególnie metody elementów skończonych, spowodował zaniechanie poszukiwań rozwiązań analitycznych. Okazało się jednak, że również w przypadku układów modelowanych strukturami dyskretnymi uzyskanie takich rozwiązań w postaci zamkniętej jest możliwe dzięki zastosowaniu metody równań różnicowych. Teorię równań różnicowych

---

* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Jerzy Rakowski

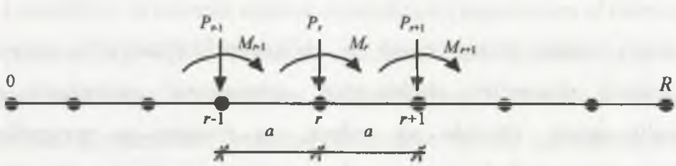
oraz jej aplikację do analizy zagadnień statyki i dynamiki regularnych konstrukcji prętowych rozwinął w Polsce Gutkowski [1]. Tematykę tę podjął Świtka [3,4] i Rakowski [3], stosując do rozwiązań wybranych problemów teorii konstrukcji metodę funkcji własnych. Rakowski wykazał m.in. w pracy [2], że w przypadku regularnej dyskretyzacji układu, aproksymowanego zbiorem identycznych elementów skończonych, możliwe jest wyznaczenie warunków równowagi w postaci równań rekurencyjnych, ekwiwalentnych w stosunku do układu równań algebraicznych, otrzymanych w postaci macierzowej dzięki zastosowaniu metodologii MES. Takie sformułowanie, które prowadzi w wielu zadaniach do określenia jednego równania różnicowego niezależnie od liczby stopni swobody dyskretyzowanej konstrukcji, pozwala na prostą analizę parametryczną rozwiązań. Okazało się ono również silnym narzędziem m.in. do oceny i krytycznej analizy stosowanych elementów skończonych i identyfikacji pasożytniczych zjawisk pojawiających się w obliczeniach numerycznych, jak na przykład zjawiska blokady ścinania poprzecznego (shear locking).

We wszystkich cytowanych w artykule pracach oraz w innych pozycjach wymienionych w bibliografii rozwiązania analityczne równań różnicowych wyznaczano dla wybranych konstrukcji prętowych o jednorodnych warunkach brzegowych.

W niniejszej pracy na wybranym przykładzie belki Eulera-Bernoulliego (E-B) przedstawiono koncepcję zastosowania metody funkcji własnych, dla przypadku gdy warunki podparcia określone są uogólnionymi przemieszczeniami o niezerowych wartościach.

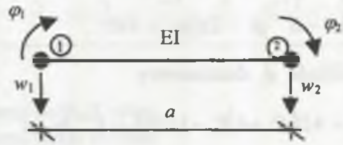
2. Równania równowagi dla jednowymiarowego pręta zginanego

Belkę o skończonej długości aproksymowaną identycznymi elementami skończonymi i obciążoną dowolnym ciągiem węzłowych sił skupionych P_r i momentów skupionych M_r przedstawia rys. 1.



Rys. 1. Belka o regularnym podziale obciążona siłami i momentami węzłowymi
Fig. 1. Regularly discretized beam loaded by nodal forces and moments

Do rozważań przyjęto podział belki na dwuwęzłowe elementy skończone o czterech stopniach swobody i sztywności na zginanie EI.



Rys. 2. Dwuwęzłowy element skończony belkowy E-B
Fig. 2. Two-node E-B beam finite element

Macierz sztywności tego elementu wyprowadzona dla ścisłych funkcji kształtu ma postać:

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{a^3}\begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ -6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \tag{1}$$

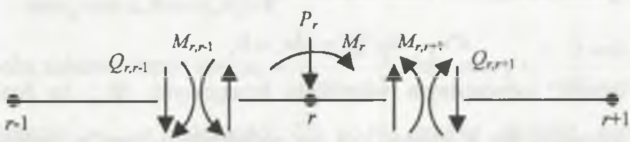
i wiąże wektory uogólnionych przemieszczeń i sił węzłowych:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{f}, \tag{2}$$

gdzie: $\mathbf{q}^T = \{w_1 \quad \phi_1 \quad w_2 \quad \phi_2\}$, $\mathbf{f}^T = \{P_1 \quad m_1 \quad P_2 \quad m_2\}$,

$\phi_i = a\varphi_i$, $m_i = M_i/a$, dla $i = 1,2$.

Korzystając z macierzy (1), równania równowagi dla dowolnego węzła r można przedstawić w następującej postaci (rys. 3):



Rys. 3. Równowaga węzła r
Fig. 3. Equilibrium of r-th node

$$\begin{aligned} &6(w_{r-1} - w_r) + 2(\phi_{r-1} + 2\phi_r) + 6(w_r - w_{r+1}) + 2(2\phi_r + \phi_{r+1}) = 24Bm_r \\ &-12(w_{r-1} - w_r) - 6(\phi_{r-1} + \phi_r) + 12(w_r - w_{r+1}) + 6(\phi_r + \phi_{r+1}) = 24BP_r \end{aligned} \tag{3}$$

gdzie:

$$B = \frac{a^3}{24\mathrm{EI}}.$$

Wprowadzając do równań (3) operatory przesunięcia Boole'a E_r^n i różnic centralnych Δ_r^n [1] otrzymamy:

$$\begin{aligned}(\Delta^2+6)\phi_r-3(E-E^{-1})w_r&=12Bm_r\\(E-E^{-1})\phi_r-2\Delta^2 w_r&=4BP_r\,.\end{aligned}\tag{4}$$

Eliminując z równań (4) wielkość ϕ_r dostaniemy

$$\Delta^4 w_r=4B(\Delta^2+6)P_r-12B(E-E^{-1})m_r,\tag{5}$$

gdzie:

$$\Delta^2=\Delta_r^2=E^1+E^{-1}-2\,,\qquad E^n=E_r^n\,.$$

$$\Delta^4=E^2-4E+6-4E^{-1}+E^{-2}\,.$$

Zajmiemy się przypadkiem, gdy obciążenie belki o końcach $r=0$ i $r=R$ stanowią jedynie siły skupione P_r o dowolnym rozkładzie (w równaniu (5) należy przyjąć $m_r=0$). Rozwiązaniem równania niejednorodnego

$$\Delta^4 w_r=4B(\Delta^2+6)P_r\tag{6}$$

jest funkcja o dyskretnym argumencie r (funkcja dyskretna), opisująca przemieszczenia węzłów w_r i stowarzyszona z nią funkcja obrotów węzłów ϕ_r o postaciach [3]:

$$w_r=B\sum_{k=1}^{R-1}\frac{\overline{P}_k}{\alpha_k^2}W_{r,k}\,,\qquad \phi_r=B\sum\frac{\overline{P}_k}{\alpha_k^2}\Phi_{r,k}\,,\tag{7}$$

gdzie $\overline{P}_k=\sum_{r=0}^{R}P_rW_{r,k}$, α_k^2 to wartości własne, a $W_{r,k}$ to ortogonalne funkcje własne w przedziale $\langle 0,R\rangle$ jednorodnego równania różnicowego

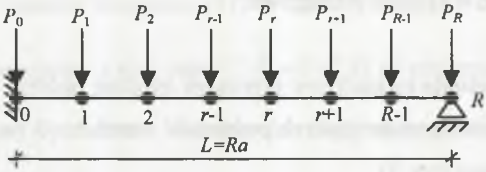
$$\Delta^4 w_r-4\alpha^2(\Delta^2+6)w_r=0,\tag{8}$$

odpowiadające danym, jednorodnym warunkom brzegowym. $\Phi_{r,k}$ to funkcje obrotów węzłów, które wyznacza się z równań (4) po podstawieniu tam w miejsce $w_r\to W_{r,k}$, $\phi_r\to\Phi_{r,k}$, $BP_r\to\alpha_k^2$ i przyjęciu $m_r=0$.

Przytoczmy rozwiązanie dla belki o schemacie statycznym jak na rys. 4.

Dla warunków brzegowych:

$$\begin{aligned}&r=0, &&w_0=0, &&\phi_0=0,\\&r=R, &&w_R=0, &&M_{R,R+1}=\overline{M}_R=0\end{aligned}\tag{9}$$



Rys. 4. Schemat rozważanej belki *(L=Ra)*
Fig. 4. Layout of considered beam *(L=Ra)*

otrzymuje się [3]:

$$\alpha_k^2 = \frac{(1-\cosh\mu_k)^2}{2(\cosh\mu_k+2)} = \frac{(1-\cos\nu_k)^2}{2(\cos\nu_k+2)}$$

$$W_{r,k} = D\left[(\cosh\mu_k R - \cos\nu_k R)\left(\frac{\sin\nu_k}{\cos\nu_k+2}\sinh\mu_k r - \frac{\sinh\mu_k}{\cosh\mu_k+2}\sin\nu_k r\right)\right] +$$
$$+\cosh\mu_k r - \cos\nu_k r$$

$$\Phi_{r,k} = 3D\left[\frac{\sinh\mu_k\sin\nu_k}{(\cosh\mu_k+2)(\cos\nu_k+2)}(\cosh\mu_k R - \cos\nu_k R)(\cosh\mu_k r - \cos\nu_k r)\right] +$$
$$+3\left[\frac{\sinh\mu_k}{\cosh\mu_k+2}\sinh\mu_k r + \frac{\sin\nu_k}{\cos\nu_k+2}\sin\nu_k r\right]$$

gdzie: $D = \left(\frac{\sinh\mu_k\sin\nu_k R}{\cosh\mu_k+2} - \frac{\sin\nu_k\sinh\mu_k}{\cos\nu_k+2}\right)^{-1}$

μ_k i ν_k to pierwiastki równania charakterystycznego:

$$(\cosh\mu_k - \cos\nu_k)\left[(\cos\nu_k+2)\sinh\mu_k\sin\nu_k R\cosh\mu_k R - (\cosh\mu_k+2)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\sin\nu_k\sinh\mu_k R\cos\nu_k R\right] = 0$$

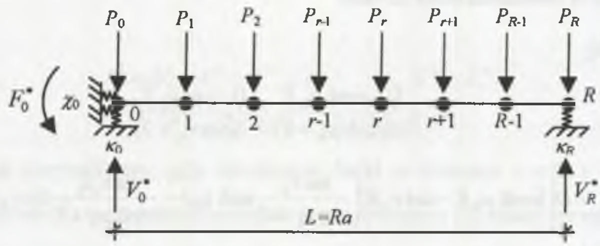
związane z sobą zależnościami: $\cosh\mu_k = \frac{5-2\cos\nu_k}{\cos\nu_k+2}$ lub $\cos\nu_k = \frac{5-2\cosh\mu_k}{\cosh\mu_k+2}$.

Znając funkcje w_r, z zależności (2) i (4) można określić wzory na wartości przywęzłowych sił wewnętrznych [2]

$$\begin{aligned}
M_{r,r-1} &= M = \frac{\mathrm{EI}}{a^2}\Delta^2 w_r - \frac{a}{6}P_r,\\
M_{r,r+1} &= \overline{M} = -\frac{\mathrm{EI}}{a^2}\Delta^2 w_r + \frac{a}{6}P_r,\\
Q_{r,r-1} &= Q = \frac{\mathrm{EI}}{a^3}\left(E^{-1}-1\right)\Delta^2 w_r - \frac{1}{6}\left(E^{-1}-1\right)P_r,\\
Q_{r,r+1} &= \overline{Q} = \frac{\mathrm{EI}}{a^3}(E-1)\Delta^2 w_r - \frac{1}{6}(E-1)P_r.
\end{aligned} \tag{10}$$

3. Niejednorodne warunki brzegowe

W niniejszym rozdziale rozpatrzymy przypadek bardziej ogólny. Niech węzły brzegowe rozważanej belki oparte są na sprężystych podporach: węzeł $r = 0$ na liniowej i kątowej, zaś węzeł $r = R$ na liniowej (rys. 5).



Rys. 5. Schemat belki opartej na sprężystych podporach
Fig. 5. Layout of elastically supported beam

Wartości κ – to sztywności sprężystych podpór liniowych $(\kappa_0$ i $\kappa_R)$, a χ m – to sztywność kątowa sprężystego utwierdzenia (χ_0).

Odpowiednie przemieszczenia węzłów brzegowych są proporcjonalne do reakcji występujących w sprężystych podporach. Aby uwzględnić w rozwiązaniu zadania ten fakt, dokonamy analizy przypadku, w którym belka o schemacie przedstawionym na rys.4 (podpory niepodatne), bez zewnętrznego obciążenia $(P_r = 0)$ doznaje wymuszonych przemieszczeń węzłów brzegowych:

-dla $r = 0$ $\quad \overline{w}_0 = v_0, \quad \overline{\varphi}_0 = \theta_0, \quad (\Theta_0 = a\theta),$

-dla $r = R$ $\quad \overline{w}_R = v_R.$ (11)

W zadaniu pomocniczym musimy więc wyznaczyć funkcję przemieszczeń $\overline{w}_r$, spełniającą różnicowe równanie jednorodne (por.(5)):

$$\Delta^4 \overline{w}_r = 0. \tag{12}$$

Rozwiązanie ogólne równania (12) ma postać:

$$\overline{w}_r = C_0 + C_1 r + C_2 r^2 + C_3 r^3, \tag{13}$$

zaś kąty obrotów węzłów określa wzór, który wyznacza się z równań (4)

$$\overline{\phi}_r = C_1 + 2C_2 r + 3C_3 r^2. \tag{14}$$

Uzupełniając trzy warunki brzegowe (11) o czwarty $M_{R,R+1}=0$, czyli dla $r=R$, $\overline{M}=-\frac{EI}{a^2}\Delta^2 w_R=0$, wyznaczymy z nich stałe C_i $(i=0,1,2,3)$ po podstawieniu do nich relacji (13) i (14). Ostatecznie, wymuszenia kinematyczne dają następujące wzory na ugięcia i obroty węzłów:

$$
\begin{aligned}
\overline{w}_r &= v_0+\Theta_0 r+\frac{3}{2R}\left(\frac{v_R-v_0}{R}-\Theta_0\right)r^2+\frac{1}{2R^2}\left(\Theta_0-\frac{v_R-v_0}{R}\right)r^3\\
\overline{\phi}_r &= \Theta_0+\frac{3}{R}\left(\frac{v_R-v_0}{R}-\Theta_0\right)r+\frac{3}{2R^2}\left(\Theta_0-\frac{v_R-v_0}{R}\right)r^2
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Wymuszone przemieszczenia podpór (v_0, v_R, θ_0) wywołują w nich reakcje. Dodatnie zwroty sił podporowych i momentu utwierdzenia zaznaczono na rys. 5. Wyznaczmy ich wartości. Na podstawie wzorów (10) ogólne postacie funkcji reakcji zapisuje się następująco:

$$
\begin{aligned}
\overline{V}_0 &= -Q_{0,1}=-\frac{\mathrm{EI}}{a^3}\left(-\overline{w}_2+3\overline{w}_1-3\overline{w}_0+\overline{w}_{-1}\right)\\
\overline{V}_R &= -Q_{R,R-1}=\frac{\mathrm{EI}}{a^3}\left(\overline{w}_{R+1}-3\overline{w}_R+3\overline{w}_{R-1}-\overline{w}_{R-2}\right)\\
\overline{f}_0 &= \overline{F}_0/a=-M_{0,1}/a=\frac{\mathrm{EI}}{a^3}\left(\overline{w}_1-2\overline{w}_0+\overline{w}_{-1}\right)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Po podstawieniu wzorów (15) do funkcji (16) otrzymamy ostatecznie wyrażenia na reakcje wywołane osiadaniem podpór:

$$
\begin{aligned}
\overline{V}_0 &= -\frac{1}{8BR^3}\left(v_0-v_R+\Theta_0 R\right)\\
\overline{V}_R &= \frac{1}{8BR^3}\left(v_0-v_R+\Theta_0 R\right)\\
\overline{f}_0 &= \overline{F}_0/a=-\frac{1}{8BR^2}\left(v_0-v_R+\Theta_0 R\right)
\end{aligned}
\tag{17}
$$

W przypadku przemieszczeń jednostkowych reakcje przedstawione wzorami (17) przyjmą następujące wartości:

- dla $v_0=1$ ($v_R=0$, $\Theta_0=0$)

  $\overline{V}_{0,0}=-\frac{1}{8BR^3}$, $\overline{V}_{R,0}=\frac{1}{8BR^3}$, $\overline{f}_{0,0}=-\frac{1}{8BR^2}$,

- dla $v_R=1$ ($v_0=0$, $\Theta_0=0$) (18)

  $\overline{V}_{0,R}=\frac{1}{8BR^3}$, $\overline{V}_{R,R}=-\frac{1}{8BR^3}$, $\overline{f}_{0,R}=\frac{1}{8BR^2}$,

– dla $\Theta_0 = 1$ ($v_0 = 0$, $v_R = 0$)

$$\overline{V}_{0,f} = -\frac{1}{8BR^2},\ \overline{V}_{R,f} = \frac{1}{8BR^2},\ \overline{f}_{0,f} = -\frac{1}{8BR}.$$

Reakcje wywołane działaniem obciążeń zewnętrznych na belkę o podporach nieprzesuwnych oblicza się zgodnie ze wzorami (19), które wyprowadzone zostały po wykorzystaniu relacji (7) i (10):

$$V_0^{(P)} = -\frac{1}{24}\sum_{k=1}^{R-1}\frac{P_k}{\alpha_k^2}(E-1)\Delta^2 W_{0,k} + \frac{1}{6}(E+6)P_0$$

$$V_R^{(P)} = -\frac{1}{24}\sum_{k=1}^{R-1}\frac{P_k}{\alpha_k^2}\left(E^{-1}-1\right)\Delta^2 W_{R,k} + \frac{1}{6}\left(E^{-1}+6\right)P_R \tag{19}$$

$$f_0^{(P)} = \frac{1}{24}\sum_{k=1}^{R-1}\frac{P_k}{\alpha_k^2}\Delta^2 W_{0,k}$$

Po rozwiązaniu zadania pomocniczego i wyznaczeniu funkcji przemieszczeń (15) i reakcji (18) można określić wartości reakcji w analizowanej belce o podatnych podporach (rys. 5) stosując zasadę superpozycji skutków. Wielkości V_0^*, V_R^* i F_0^* $\left(F_0^* = f_0^* a\right)$, będące skutkiem działania obciążenia P_r oraz podatności podpór, spełniają układ równań:

$$V_0^* = V_0^{(P)} + \overline{V}_{0,0}\frac{V_0^*}{\kappa_0} + \overline{V}_{0,R}\frac{V_R^*}{\kappa_R} + \overline{V}_{0,f}\frac{f_0^* a^2}{\chi_0}$$

$$V_R^* = V_R^{(P)} + \overline{V}_{R,0}\frac{V_0^*}{\kappa_0} + \overline{V}_{R,R}\frac{V_R^*}{\kappa_R} + \overline{V}_{R,f}\frac{f_0^* a^2}{\chi_0} \tag{20}$$

$$f_0^* = f_0^{(P)} + \overline{f}_{0,0}\frac{V_0^*}{\kappa_0} + \overline{f}_{0,R}\frac{V_R^*}{\kappa_R} + \overline{f}_{0,f}\frac{f_0^* a^2}{\chi_0}$$

Wprowadźmy do obliczeń sztywności zastępcze (wielkości bezwymiarowe) i następujące oznaczenia skracające zapis:

$$K_0 = \frac{a^3R^3\kappa_0}{\mathrm{EI}} = \frac{L^3\kappa_0}{\mathrm{EI}},\ K_R = \frac{a^3R^3\kappa_R}{\mathrm{EI}} = \frac{L^3\kappa_R}{\mathrm{EI}},\ K_f = \frac{aR\chi_0}{\mathrm{EI}} = \frac{L\chi_0}{\mathrm{EI}}$$

Rozwiązaniem układu równań (20) są wartości reakcji:

$$V_0^* = K\left[K'V_0^{(P)} + 3K_0K_R\left(V_0^{(P)} - f_0^{(P)}/R\right) + 3K_0K_f\left(V_0^{(P)} + V_R^{(P)}\right)\right],$$

$$V_0^* = K\left[K'V_R^{(P)} + 3K_0K_R\left(V_R^{(P)} + f_0^{(P)}/R\right) + 3K_RK_f\left(V_0^{(P)} + V_R^{(P)}\right)\right], \tag{21}$$

$$f_0^* = K\left[K'f_0^{(P)} + 3K_RK_f\left(f_0^{(P)} - RV_0^{(P)}\right) + 3K_0K_f\left(f_0^{(P)} + RV_R^{(P)}\right)\right],$$

gdzie:

$$K = \left[K' + 3\left(K_0K_R + K_RK_f + K_fK_0\right)\right]^{-1},\ K' = K_0K_RK_f,$$

którym odpowiadają rzeczywiste, uogólnione przemieszczenia węzłów podporowych:

$$v_0 = \frac{V_0^*}{\kappa_0} = 24BR^3K\left[K_R K_f V_0^{(P)} + 3K_R\left(V_R^{(P)} - f_0^{(P)}/R\right) + 3K_f\left(V_0^{(P)} + V_R^{(P)}\right)\right],$$

$$v_R = \frac{V_R^*}{\kappa_R} = 24BR^3K\left[K_0 K_f V_R^{(P)} + 3K_0\left(V_0^{(P)} + f_0^{(P)}/R\right) + 3K_f\left(V_0^{(P)} + V_R^{(P)}\right)\right], \tag{22}$$

$$\Theta_0 = \frac{f_0^* a}{\chi_0} = 24BRK\left[K_0 K_R f_0^{(P)} + 3K_0\left(f_0^{(P)} + RV_R^{(P)}\right) + 3K_R\left(f_0^{(P)} - RV_0^{(P)}\right)\right].$$

Przemieszczenia węzłów belki stanowią sumę przemieszczeń obliczonych dla belki o niepodatnych podporach i przemieszczeń wywołanych osiadaniem węzłów podporowych określonych wzorami (22). Biorąc pod uwagę zależności (7) oraz wzory (15), do których należy podstawić v_0, v_R i Θ_0 zgodnie z (22), po żmudnych przekształceniach otrzymamy ostateczną postać wzoru na ugięcia węzłów belki o podatnych podporach:

$$w_r = B\sum_{k=1}^{R-1}\frac{\widetilde{P}_k}{\alpha_k^2}\left\{W_{r,k} + \Omega_1(1-E)\Delta^2 W_{0,k} + \Omega_2\left(1-E^{-1}\right)\Delta^2 W_{R,k} + \frac{1}{R}\Omega_3\Delta^2 W_{0,k}\right\} + \\ + 4B\left[\Omega_1(E+6)P_0 + \Omega_2\left(E^{-1}+6\right)P_R\right], \tag{23}$$

gdzie:

$$\Omega_1 = \frac{K}{2}\left[K_R K_f \omega_1\omega_2 - 6K_R R^2\omega_1 + 6K_f R^3\right],$$

$$\Omega_2 = \frac{K}{2}\left[K_0 K_f\left(2R^3 - \omega_1\omega_2\right) + 6K_0 rR^2 + 6K_f R^3\right],$$

$$\Omega_3 = \frac{K}{2}\left[K_0 K_R\omega_1\left(\omega_2 + 2R^2\right) + 6K_0 rR^2 + 6K_R R^2\omega_1\right],$$

$$\omega_1 = \omega_1(r) = r - R,\ \omega_2 = \omega_2(r) = r^2 - 2Rr - 2R^2,$$

Wartości kątów obrotów węzłów można określić ze wzoru (por.[2]):

$$\phi_r = \frac{1}{12}\left[\left(E - E^{-1}\right)\left(6-\Delta^2\right)w_r + 4B\left(E - E^{-1}\right)P_r\right]. \tag{24}$$

4. Wnioski

Znajomość rozwiązania zadania brzegowego dla belki aproksymowanej układem dyskretnym (zgodnie z metodologią MES) z jednorodnymi warunkami brzegowymi pozwala uogólnić obliczenia na przypadek, gdy węzły brzegowe podparte są na podporach podatnych. W rezultacie otrzymuje się proste wzory analityczne o budowie zamkniętej, pozwalające na wyznaczenie dyskretnych funkcji przemieszczeń i obrotów węzłów belki aproksymowanej elementami skończonymi. Uzyskane rozwiązanie ma charakter bardzo ogólny. Dokonując w obliczeniach przejść granicznych (np. $\kappa_0 \to \infty$ i $\kappa_R \to \infty$ lub $\chi_0 \to \infty$), otrzymuje się wzory dla belek o częściowo lub całkowicie niepodatnych podporach.

Rozwiązania można rozszerzyć na przypadki innych obciążeń (węzłowe momenty skupione) oraz aproksymacji układów jednowymiarowych innymi typami elementów skończonych przy zachowaniu oczywiście regularności podziału [2].

LITERATURA

1. Gutkowski W.: Regularne konstrukcje prętowe, PWN, Warszawa 1973.
2. Rakowski J.: A critical analysis of quadratic beam finite elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 31, 1991, 949-966.
3. Rakowski J., Świtka R.: O pewnych uogólnieniach metody funkcji własnych w zastosowaniu do dyskretnych układów sprężystych, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1980.
4. Świtka R.: Drgania i funkcje własne regularnych układów dyskretnych, Prace Pozn. Tow. Przyj. Nauk, t.II, z.2, Warszawa-Poznań 1973.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy Skrzypczyk, prof. Politechniki Śląskiej

Abstract

A possibility of application of eigenfunction method for beam systems with discrete structure with non-homogeneous boundary conditions is presented. A conception is given for example of bending of Euler-Bernoulli beam. Its boundary nodes are elastically supported and have non-zero displacements. The beam is loaded by an arbitrary set of nodal forces. The discretisation of the beam into two-node finite elements is adopted. The equilibrium conditions are expressed in the form of difference equations. These equations are solved analytically.