

Marian ŁUPIEŻOWIEC*
Politechnika Śląska

KONSYSTENTNY MODEL LEPKOPLASTYCZNY – FUNKCJE MATERIAŁOWE

Streszczenie. W pracy przedstawiono funkcje materiałowe opisujące konsystentny model lepkoplastyczny dla gruntów. Szczegółowo omówiono występujące w nich stałe parametry. Podano również wynik weryfikacji tak opisanego modelu z doświadczeniami.

CONSISTENT VISCOPLAST MODEL – MATERIAL FUNCTION

Summary. In the paper there is presented material functions existing in consistent viscoplastic model for soils. That are discussed in details existing inside constant coefficients. There are also given the result of verification that model with experimental tests.

1. Wstęp

W ogólności modele lepkoplastyczne zdolne są do opisanie wrażliwości materiałów nie tylko na ścieżkę obciążenia, ale także na prędkość, z jaką to oddziaływanie następuje. Wrażliwość ta została wykazana doświadczalnie przez Vaida i Campanellę [7], podobne wyniki uzyskał również autor podczas próby ścinania w aparacie trójosiowym przy różnych prędkościach odkształcenia [5]. Porównanie dotychczas stworzonych modeli znajduje się w publikacji autora [4].

Opisywany w pracy konsystentny model lepkoplastyczny dla gruntów jest uogólnieniem bardzo popularnego w mechanice gruntów modelu Modified Cam–Clay. Uogólnienie dotyczy równań powierzchni plastyczności oraz prawa wzmocnienia, przez co w zależności opisujące model uwikłany został czas. W podobny sposób lepkoplastyczność została opisana przez Dragona i Mroza dla skał [2] oraz przez Heeres a i de Borsta dla betonu [3]. Ogólne równania

*Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Maciej Gryczmański.

opisujące model wraz z przedstawieniem ich w przypadku symetrii osiowej oraz propozycją całkowania numerycznego znajdują się w publikacji autora [5].

W dalszej części szczegółowo opisane będą funkcje i parametry materiałowe występujące w równaniach modelu. Przedstawiona zostanie również dyskusja nad możliwością dalszej ich modyfikacji, tak aby model był zdolny odwzorowywać rzeczywistość w jak najszerszym zakresie.

2. Funkcje plastyczności i potencjału

Formułując zależności opisujące rozpatrywany model przyjęto ogólną strukturę równań klasycznych modeli sprężysto–plastycznych. Założono dekompozycję odkształceń całkowitych na część sprężystą oraz niesprężystą. Przyjęto, że naprężenie efektywne (działające na szkielet gruntowy) zależy od sprężystej części odkształceń, natomiast odkształcenia niesprężyste pojawiają się od chwili osiągnięcia przez punkt w przestrzeni naprężeń powierzchni plastyczności. Powierzchnia ta może zmieniać swój rozmiar i położenie (w zależności od aktualnej wartości parametrów wzmocnienia). Punkt symbolizujący stan naprężenia musi pozostawać na niej podczas całego procesu dalszego obciążania. Podczas procesu odciążania punkt może przemieścić się do wnętrza powierzchni (stan sprężysty), natomiast nie jest możliwe „wyjście” poza powierzchnię (stan nierealny fizycznie).

Pierwszą opisywaną funkcją materiałową jest powierzchnia plastyczności. W klasycznych modelach sprężysto–plastycznych przyjęto równanie tej powierzchni jako równanie uwikłane stanu naprężenia oraz parametrów wzmocnienia. W szczególności w modelu Modified Cam–Clay powierzchnia ta opisywana jest wzorem [1]:

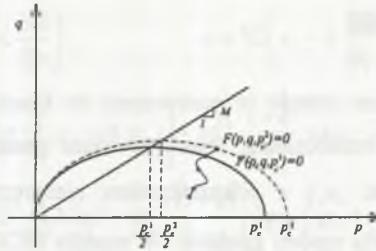
$$F(p, q, p_c) = q^2 + M^2 p(p - p_c) = 0, \quad (1)$$

gdzie: $p' = \frac{\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3'}{3}$ – naprężenie średnie,

$$q' = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1' - \sigma_2')^2 + (\sigma_2' - \sigma_3')^2 + (\sigma_3' - \sigma_1')^2} \text{ – dewiator naprężenia,}$$

p_c – ciśnienie prekonsolidacji, które tutaj jest parametrem wzmocnienia.

Graficzne przedstawienie powierzchni plastyczności (elipsy) modelu Modified Cam–Clay pokazano na rysunku 1. Czasami stosowane są bardziej wyrafinowane równania powierzchni, takie jak np. równanie obrotu elipsy MCC [6]. Takie modele zdolne są lepiej opisać zachowania próbek prekonsolidowanych anizotropowo (np. konsolidowanych wg linii K_0).



Rys. 1. Powierzchnia plastyczności w modelu Modified Cam-Clay
Fig. 1. Plasticity surface in Modified Cam-Clay

W modelu autora przyjęto bardziej skomplikowaną postać funkcji plastyczności, która zależy nie tylko od wartości parametru wzmocnienia, ale dodatkowo też od jego prędkości:

$$F(p, q, p_c, \dot{p}_c) = q^2 + M^2 p \left(p - (p_c + A \dot{p}_c) \right) = 0. \quad (2)$$

Taką postać funkcji plastyczności przyjęto za autorami [3] oraz [8]. Wielkość A jest parametrem modelu.

3. Funkcja plastycznego płynięcia

Poprzednio opisany został warunek plastyczności, po osiągnięciu którego mamy do czynienia z odkształceniami niesprężystymi (trwałymi). Zwykle przyjmuje się, że odkształcenia te są proporcjonalne do gradientu powierzchni potencjału G

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma}, \quad (3)$$

gdzie: $\dot{\lambda}$ – współczynnik proporcjonalności.

Wyróżniamy modele konstytutywne ze stowarzyszonym oraz niestowarzyszonym prawem płynięcia. W pierwszych przyjmuje się, że powierzchnia potencjału jest identyczna z powierzchnią potencjału, natomiast w drugich zakłada się dwie różne powierzchnie.

W konsystentnym modelu autora przyjęto stowarzyszone prawo płynięcia, a składowe odkształcenia niesprężystego oblicza się w następujący sposób:

$$\dot{\varepsilon}_v^{vp} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial p} = \dot{\lambda} M^2 \left(2p - (p_c + A \dot{p}_c) \right), \quad \dot{\varepsilon}_s^{vp} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial q} = \dot{\lambda} 2q, \quad (4)$$

gdzie: $\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ – odkształcenie objętościowe, $\dot{\lambda}$ – mnożnik,

$$\varepsilon_s = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \text{ – odkształcenie postaciowe.}$$

4. Prawo wzmocnienia

Kolejne równanie, które zostało w porównaniu do klasycznej sprężysto–plastyczności rozbudowane, to prawo wzmocnienia. Prawo to wiąże parametr wzmocnienia, którym w opisywanym modelu jest p_c , z odkształceniem niesprężystym. Takie założenie jest charakterystyczne dla wielu modeli gruntów. W modelu MCC równanie to ma następującą postać [1]:

$$p_c = p_{c0} \exp \frac{\Delta e^{vp}}{\lambda - \kappa}. \quad (5)$$

W powyższym: p_{c0} – początkowa wartość ciśnienia prekonsolidacji,

$\Delta e^{vp} = (1 + e)\varepsilon_V^{vp}$ – niesprężysta (lepkoplastyczna) część wskaźnika porowatości,

λ, κ – parametry modelu zdefiniowane w [1].

Równanie (5) zawiera zależność parametru wzmocnienia tylko od plastycznego odkształcenia objętościowego. Rozszerzenie tego równania podał Wilde [9], który uzależnił p_c również od plastycznego odkształcenia postaciowego. Takie uogólnienie pozwala ująć zjawiska wzmocnienia lub osłabienia materiału przy osiągnięciu stanu krytycznego przez punkt w przestrzeni naprężeń.

W modelu autora tworząc prawo wzmocnienia wykorzystano jego postać podaną przez Dragona i Mroza [2], w którym to charakterystyczne jest występowanie z lewej strony pochodnej parametru wzmocnienia po czasie, natomiast po prawej stronie funkcji zależnej od wartości p_c . Dodatkowo uwzględniając propozycję Wildego otrzymujemy następujące równanie:

$$\dot{p}_c = \frac{1+e}{\lambda-\kappa} p_c \left(\dot{\varepsilon}_V^{vp} + \xi \exp\left(-\xi_1 \dot{\varepsilon}_s^{vp}\right) \dot{\varepsilon}_s^{vp} \right) + B p_c, \quad (6)$$

gdzie: ξ, ξ_1 – parametry Wildego, B – parametr modelu autora.

Do podanych powyżej równań dołączyć należy prawo sprężystości wiążące naprężenie ze sprężystą częścią odkształceń oraz równanie zgodności:

$$\frac{\partial F}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial p_c} \dot{p}_c + \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_c} \ddot{p}_c = 0. \quad (7)$$

Po przekształceniach dochodzimy do równań konstytutywnych:

$$s \ddot{\lambda} + h \dot{\lambda} + c = 0, \quad (8)$$

$$\dot{p} = K \left(\dot{\varepsilon}_v - \lambda \frac{\partial G}{\partial p} \right), \quad \dot{q} = 3G \left(\dot{\varepsilon}_s - \lambda \frac{\partial G}{\partial q} \right),$$

$$\text{gdzie: } s = -M^4 p A p_c \frac{(1+e)}{\lambda - \kappa} \left[2p - (p_c + A \dot{p}_c) \right] - M^2 \frac{1+e}{\lambda - \kappa} p A p_c \cdot 2q \xi \exp(-\xi_1 \varepsilon_s^{vp}),$$

$$h = -M^4 \left[2p - (p_c + A \dot{p}_c) \right]^2 K - 12Gq^2 - M^4 \frac{(1+e)}{\lambda - \kappa} \left[2p - (p_c + A \dot{p}_c) \right] p (p_c + A \dot{p}_c) +$$

$$-M^2 \frac{(1+e)}{\lambda - \kappa} p \cdot 2q \xi \exp(-\xi_1 \varepsilon_s^{vp}) (p_c + A \dot{p}_c + A p_c \dot{\varepsilon}_s^{vp}) +$$

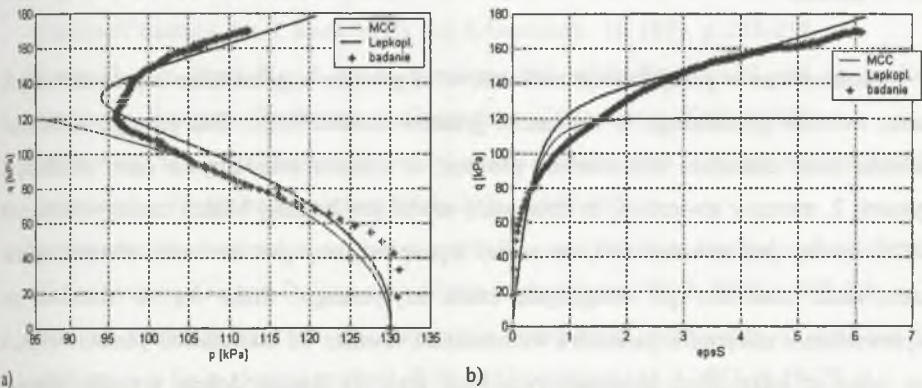
$$-M^4 \frac{(1+e)}{\lambda - \kappa} p A p_c \left(2\dot{p} - \dot{p}_c - A \dot{p}_c \right) - M^2 \frac{(1+e)}{\lambda - \kappa} A \cdot 2q p_c \xi \exp(-\xi_1 \varepsilon_s^{vp})$$

$$c = KM^2 \left[2p - (p_c + A \dot{p}_c) \right] \dot{\varepsilon}_v + 6qG \dot{\varepsilon}_s + M^2 p B (p_c + A \dot{p}_c).$$

Numeryczne rozwiązanie równań (8) znajduje się w publikacji autora [5].

5. Uzyskane wyniki

Do numerycznej symulacji wybrano analizę ścięcia w aparacie trójosiowego ściskania, bez drenażu ($\varepsilon_v = 0$), po uprzedniej izotropowej konsolidacji, przy różnych prędkościach odkształcania próbki. Wyniki uzyskane na drodze numerycznej porównywano z rezultatami doświadczeń. Na rysunku 2 porównano przebiegi ścieżek „ p - q ” oraz „ q - ε_s ” dla rozważanego konsystentnego modelu lepkoplastycznego z wynikami eksperymentu uzyskanymi przez autora przy prędkości odkształcania $\dot{\varepsilon}_s = 0.05\%/h$ oraz wartościami otrzymanymi przy wykorzystaniu modelu MCC.



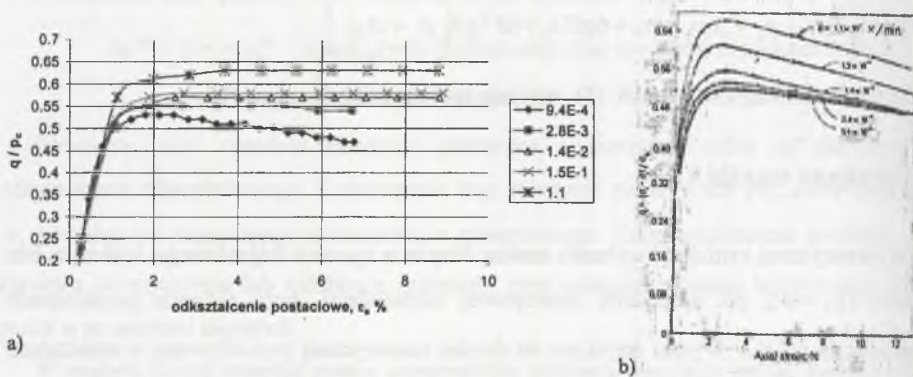
Rys. 2. Porównanie wyników symulacji z doświadczeniem: a) ścieżka „ p - q ”, b) ścieżka „ q - ε_s ”
Fig. 2. Comparison of simulation: a) „ p - q ” path, b) „ q - ε_s ” path

Wyniki przeprowadzonej drugiej symulacji przedstawione zostały na rysunku 3. Pokazano na nim porównanie wyników numerycznej analizy ścinania przy różnych prędkościach z rezultatami uzyskanymi przez Vaida i Campanellę [7]. Obliczenia numeryczne przeprowadzono z zastosowaniem opisywanego modelu lepkoplastycznego dla następujących parametrów:

$$G = 8.0 \text{ MPa}, \quad M = 1.00, \quad \lambda = 0.10, \quad \kappa = 0.02, \quad e_0 = 0.75, \quad \xi = 2.0, \quad \xi_1 = 1.0, \\ A = 5.0 \cdot 10^{-5}, \quad B = 0.2, \quad p_c = 260 \text{ kPa}.$$

Ścinanie przeprowadzono z następującymi prędkościami odkształcenia:

$$1.1, 1.5 \cdot 10^{-1}, 1.4 \cdot 10^{-2}, 2.8 \cdot 10^{-3}, 9.4 \cdot 10^{-4} \quad \%/\text{min}.$$



Rys. 3. Porównanie wyników ścinania z różną prędkością odkształcenia: a) analiza numeryczna, b) wyniki badań doświadczalnych (podano za [7])

Fig. 3. Comparison of result the shearing tests with various strain rate: a) numerical analysis, b) experimental tests (given by [7])

6. Wnioski

Przedstawione w pracy funkcje materiałowe są prostym uogólnieniem zaproponowanych przez twórców popularnego w mechanice gruntów modelu MCC. Tak przyjęte zależności potrafią dość dokładnie odwzorować procesy, w których rolę ogrywa czas. Analizując rysunek 2, możemy stwierdzić, że opisywany model jest bardziej bliższy rzeczywistości niż MCC. Istotny jest również fakt, że model lepkoplastyczny jest w stanie również opisać zachowanie materiału po osiągnięciu stanu krytycznego. Stało się to możliwe po wprowadzeniu zależności parametru wzmocnienia również od odkształceń postaciowych, a nie tylko od odkształceń objętościowych (por. wzór 6). Bardzo dobrze wypadło również porównanie modelu z badaniami doświadczalnymi (rys. 3). Istotny jest przede wszystkim

fakt, że dla szerokiego wachlarza prędkości odkształcenia (skrajne prędkości różniły się o trzy rzędy wielkości) jesteśmy w stanie uzyskać realne wyniki. Ważne jest również to, że otrzymana zgodność jest nie tylko ilościowa, ale również jakościowa.

Jednak w dalszej pracy konieczne będzie przyjęcie bardziej złożonych funkcji materiałowych, tak aby uzyskać zgodność z rzeczywistością w jak najszerszym przedziale doświadczeń, również przy innych rodzajach obciążen. Planuje się w przyszłości przeprowadzić symulację pełzania oraz badania presjometrem. Dopiero wówczas, gdy potwierdzi się prawidłowość założeń modelowych oraz słuszność przyjętych funkcji materiałowych, możemy stwierdzić, że tworzony konsystentny model lepkoplastyczny jest w stanie realnie odwzorować rzeczywistość oraz może być stosowany w praktyce.

Bardzo ważnym zagadnieniem jest również wyznaczenie stałych materiałowych. Zadanie jest w ogólności trudne, ponieważ w modelu występuje aż 9 parametrów. Wartości przyjęte w pracy zostały znalezione heurystycznie poprzez analizę wpływu poszczególnych parametrów na uzyskiwane krzywe. W ten sposób znaleziono zestaw parametrów, dla którego otrzymane wyniki są bliskie rzeczywistości. W przyszłości należałoby znaleźć bardziej efektywną procedurę pozyskiwania stałych z wyników doświadczeń laboratoryjnych oraz badań „in situ”.

LITERATURA

1. Atkinson J. H., Bransby P. L.: *The mechanics of soils. An introduction to critical state soil mechanic.* McGraw-Hill Book Company, London 1978.
2. Dragon A., Mróz Z.A.: A model for plastic creep of rock-like materials accounting for the kinetics of fracture. *Int. J. Rock Mech. Sci & Geomech.*, 16, 1979, p. 253-259.
3. Heeres O., De Borst R.: A novel rate-dependent subloading model and its implicit integration. *European Conference on Computational Mechanics*, Kraków 2001.
4. Łupieżowiec M.: Lepkoplastyczny model ośrodka gruntowego. II Krajowa Konferencja Doktorantów Wydz. Budownictwa, Wisła 2001, s. 295-304.
5. Łupieżowiec M.: Lepkoplastyczność w gruntach – wrażliwość na prędkość odkształcenia. III Konferencja Krajowa Doktorantów Wydz. Budownictwa, Wisła 2002, s. 359-368.
6. Ohta H., Yoshitani S., Hata S.: Anisotropic stress-strain relationship of clay and its application to finite element analysis. *Soils and Foundation*, 15, 4, 1975, p. 61-79.

7. Vaid Y. P., Campanella R. G.: Time-dependent behaviour of undisturbed clay. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 103, 1977, p. 693-709.
8. Winnicki A.: Viscoplastic consistency model – basic features. *European Conference on Computational Mechanics*. Kraków 2001.
9. Wilde P.: Two invariants dependent model of granular media. *Arch. of Mechanics*, 29, 1977, p. 799–809.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Ryszard Izbicki

Abstract

In the paper there is presented the viscoplastic constitutive model, which is generalisation of the MCC model. This viscoplastic model can realistic describes reality in processes, where the time plays serious role. There are discussed in details the material functions, which are extended, especially yield surface and hardening law. In the second one there is used dependence on volumetric and shear strain – according to Wilde. As a results it is shown the comparison numerical simulation with experimental tests. In the future, next step will be the checking model behaviour on another load path – for instance creep and pressuremeter tests.