

Paulina OBARA^{*}
Politechnika Świętokrzyska

STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA PRĘTÓW Z UWZGLĘDNIENIEM ODKSZTAŁCALNOŚCI POSTACIOWEJ

Streszczenie. Tematem niniejszego referatu jest określenie równania ruchu poprzecznego pręta krępego, ściskanego siłą osiową zmienną w czasie. Na podstawie tego równania określić można obszary rezonansu parametrycznego (niestateczności dynamicznej), które są bardzo groźne dla trwałości konstrukcji, gdyż wówczas pojawiają się drgania poprzeczne o wzrastającej amplitudzie.

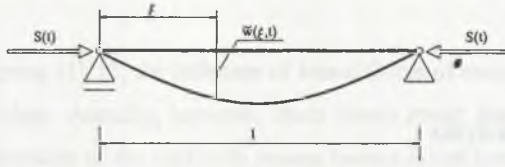
THE DYNAMIC STABILITY OF RODS WITH SHEAR STRAIN INCLUDED

Summary. The definition of equation of motion is the theme of this lecture. The object of this consideration is the Timoshenko rod compressed by axial time-dependent force. This equation is the basis for definition the parametric resonanse areas, which are very dangerous for constructions.

1. Wstęp

Przez badanie stateczności dynamicznej pręta rozumiemy badanie stateczności jego ruchu. Pierwotny ruch pręta jest stateczny tylko wówczas, gdy małe zakłócenie wzbudzi nowy ruch o ograniczonych rozwiązaniach. Jeżeli natomiast wzbudzony ruch jest nieograniczony, to ruch pierwotny jest niestateczny. Stateczność ruchu będziemy badać na przykładzie pręta swobodnie podpartego, ściskanego siłą osiową, która jest funkcją czasu (rys. 1). Problem ten dla prętów smukłych rozpatrzony został w pozycji [1]. Przyjęto następujące charakterystyki pręta: E, G – stałe materiałowe, A – pole przekroju, J – moment bezwładności, l – długość pręta, $\xi \in (0,1)$ – zmienna bezwymiarowa, κ – współczynnik zależny od kształtu przekroju.

^{*}Opiekun naukowy: Prof. dr inż. Andrzej Gomuliński.



Rys. 1. Pręt swobodnie podparty ściskany siłą osiową zmienną w czasie
 Fig. 1. The simple-supported rod compressed by time-dependent axial force

Funkcję $S(t)$ przyjmujemy w następującej postaci:

$$S(t) = S_o + S_i \Theta(t) = S \quad (1)$$

gdzie:

S_o – stała część siły,

$\Theta(t)$ – funkcja okresowa z okresem T ,

S_i – amplituda funkcji okresowej.

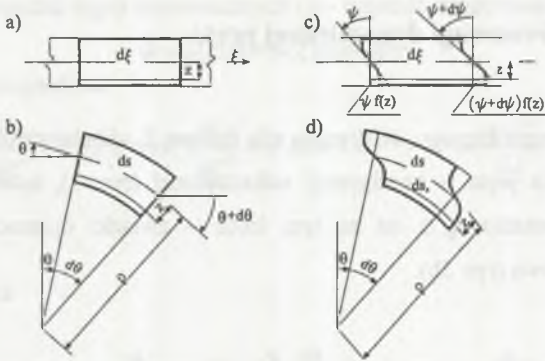
Działanie siły S spowoduje powstanie w pręcie drgań podłużnych, odbywających się ze stałą częstością i skończoną amplitudą, pod warunkiem że częstość podłużnych drgań własnych pręta nie zrówna się z częstością wymuszenia. Z uwagi na to, że małe zaburzenie w kierunku osi pręta nie spowoduje jakościowej zmiany rozwiązań, będziemy mieli do czynienia ze statecznym ruchem podłużnym.

W przypadku małego zaburzenia w kierunku poprzecznym do osi powstanie nowy ruch związany ze zginaniem pręta, opisany funkcją $\bar{w}(\xi, t)$ (rys. 1).

2. Opis pręta prostego

Przedmiotem rozważań jest pręt prosty o stałym przekroju, którego grubość jest porównywalna z długością (pręt krępy). Prowadzi to do założenia, że prostoliniowe włókna pręta normalne do osi w konfiguracji początkowej nie pozostają normalne do osi we wszystkich innych konfiguracjach aktualnych oraz że ulegają odkształceniu.

W wyniku przejścia od konfiguracji początkowej do aktualnej dowolny punkt leżący na włóknie prostopadłym do osi nieodkształconej dozna przemieszczeń $u(x, z)$ oraz $w(x, z)$, a włókno dozna obrotu o kąt $\theta = \theta(x)$, który jest równy kątowi nachylenia stycznej do odkształconej osi pręta (rys. 2b), a także dozna deplancji według funkcji $\psi(x, z) = \psi(x)f(z)$.



Rys. 2. Różniczkowy wycinek pręta w konfiguracji odkształconej z uwzględnieniem odkształcalności postaciowej

Fig. 2. The differential element of rod in deformation configuration with shear strain included

Aktualna długość elementarnego wycinka włókna położonego w odległości z od osi pręta opisana jest zależnością:

$$ds_z = ds - z d\theta + f(z) d\psi \quad (2)$$

gdzie:

$ds = ds(x)$ – długość elementarnego wycinka osi pręta,

$d\theta = d\theta(x)$ – przyrost kąta obrotu przekroju pręta.

Stan odkształcenia w różniczkowym otoczeniu dowolnego punktu pręta opisany jest poprzez odkształcenie podłużne włókna położonego w odległości z od osi pręta ε_z oraz poprzez kąt odkształcenia postaciowego γ_z :

$$\varepsilon_z = \varepsilon - z \frac{d\theta}{dx} + f(z) \frac{d\psi}{dx}, \quad \gamma_z = \psi \frac{df(z)}{dz} \quad (3)$$

gdzie:

$$\varepsilon = \frac{ds}{dx} - 1 \quad (4)$$

jest odkształceniem podłużnym osi pręta.

Przyjmując założenie materiału liniowo-sprężystego, korzystając ze związków fizycznych Hooke'a, określamy naprężenia normalne i styczne, a co za tym idzie siły przekrojowe, które wyrażają się następująco:

$$N(x) = EA\varepsilon$$

$$M(x) = -EJ \frac{d\varphi}{dx} \quad (5)$$

$$T(x) = GA\psi$$

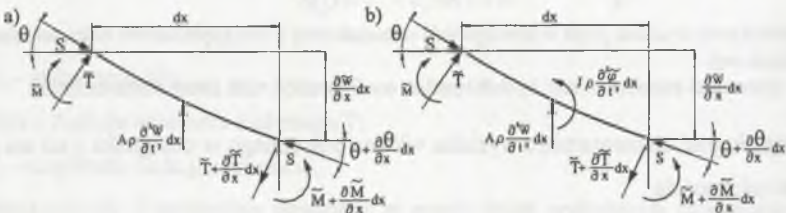
gdzie:

$$\varphi = \theta - \kappa\psi \quad (6)$$

jest funkcją określającą uśredniony całkowity kąt obrotu przekroju pręta.

3. Równanie równowagi dynamicznej pręta

W przypadku pręta krępego, ściskanego siłą osiową S , układając różniczkowe równanie równowagi wycinka pręta w konfiguracji odkształconej (rys. 3), należy uwzględnić jego odkształcalność postaciową, a co za tym idzie – związki opisane wzorem (5) oraz bezwładność obrotową (rys. 3b).



Rys. 3. Różniczkowy wycinek pręta ściskanego siłą osiową w konfiguracji odkształconej
 Fig. 3. The differential element of rod compressed by axial force in deformation configuration

Jednakże w celu przeprowadzenia analizy porównawczej do pręta smukłego (pręt Bernoulliego) w pierwszym kroku pominięto moment bezwładności obrotowej (rys. 3a).

Drgania poprzeczne pręta ściskanego siłą osiową z uwzględnieniem odkształcalności postaciowej opisane są cząstkowym równaniem różniczkowym:

$$\frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \xi^4} - \varepsilon^2 \chi^4 \zeta \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \xi^2 \partial t^2} + \varepsilon^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \xi^2} + \varepsilon^2 \chi^4 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

gdzie:

$$\sigma^2 = \frac{SI^2}{EJ}; \quad \varepsilon^2 = \frac{1}{1 - \zeta \sigma^2}; \quad \chi^4 = \frac{\mu I^4}{EJ}; \quad \zeta = \frac{\kappa EJ}{GA I^2} \quad (8)$$

przy czym

$\tilde{w} = \tilde{w}(\xi, t)$ – funkcja określająca rozkład przemieszczeń wzdłuż osi pręta,

$\mu = \rho A$ – masa równomiernie rozłożona na jednostkę długości,

ζ – parametr uwzględniający wpływ odkształcenia postaciowego.

Natomiast funkcję całkowitego uśrednionego kąta obrotu (6) możemy zapisać w postaci:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{I} \left[(1 - \sigma^2 \zeta) \zeta \frac{d^3 w}{d \xi^3} + (1 + \chi^4 \zeta) \frac{dw}{d \xi} \right] \quad (9)$$

Rozpatrując przypadek drgań harmoniczych (ω - częstość drgań własnych pręta):

$$\tilde{w} = \tilde{w}(\xi, t) = w(\xi) \cos(\omega t) \quad (10)$$

otrzymamy równanie amplitud:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \varepsilon^2 (\lambda^4 \zeta + \sigma^2) \frac{d^2 w}{d\xi^2} - \varepsilon^2 \lambda^4 w = 0; \quad \lambda^4 = \frac{\mu \omega^2 l^4}{EJ} \quad (11)$$

4. Siła krytyczna

Przyrównując w równaniu (7) parametr λ , charakteryzujący częstość drgań własnych, do zera, otrzymamy równanie rozwiązujące problem zginania z udziałem siły osiowej:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \varepsilon^2 \sigma^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0 \quad (12)$$

które posłuży nam do wyznaczenia siły krytycznej. Rozwiązaniem równania (12) jest całka:

$$w(\xi) = C_1 + C_2 \varepsilon \sigma \xi + C_3 \cos(\varepsilon \sigma \xi) + C_4 \sin(\varepsilon \sigma \xi) \quad (13)$$

od której można uzależnić pozostałe wielkości geometryczne i statyczne w rozważanym pręcie. W tym przypadku całkowity uśredniony kąt obrotu (6) opisany jest funkcją:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{l} \left[(1 - \sigma^2 \zeta) \varepsilon \frac{d^3 w}{d\xi^3} + \frac{dw}{d\xi} \right] \quad (14)$$

Warunkiem na to, aby funkcja (13) opisywała przemieszczoną postać pręta swobodnie podpartego, jest spełnienie następujących warunków brzegowych:

$$w(\xi=0) = 0, \quad \varphi'(\xi=0) = 0, \quad w(\xi=1) = 0, \quad \varphi'(\xi=1) = 0 \quad (15)$$

co prowadzi do układu czterech jednorodnych równań na stałe całkowania. Zerowanie się wyznacznika podstawowego tych równań jest warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań.

Wartość siły krytycznej dla pręta o takich warunkach podparcia przedstawia się wzorem:

$$S_{*k} = \frac{k^2 \pi^2}{(k^2 \pi^2 \zeta + 1)} \frac{EJ}{l^2} \quad (16)$$

5. Częstość drgań własnych

Równanie opisujące ruch swobodny pręta krępego otrzymamy przyrównując w równaniu (7) parametr σ , charakteryzujący siłę ściskającą, do zera, a co za tym idzie – parametr ε do 1:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \lambda^4 \zeta \frac{d^2 w}{d\xi^2} - \lambda^4 w = 0 \quad (17)$$

Rozwiązaniem równania (17) jest całka ogólna:

$$w(\xi) = C_1 \cosh(p) + C_2 \sinh(p) + C_3 \cos(m) + C_4 \sin(m) \quad (18)$$

gdzie:

$$p = \sqrt{\frac{\lambda^2 \sqrt{\lambda^4 \zeta + 4} - \lambda^4 \zeta}{2}}, \quad m = \sqrt{\frac{\lambda^2 \sqrt{\lambda^4 \zeta + 4} + \lambda^4 \zeta}{2}} \quad (19)$$

a całkowity uśredniony kąt obrotu (6) opisany jest funkcją:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{l} \left[\zeta \frac{d^3 w}{d\xi^3} + (1 + \lambda^4 \zeta) \frac{dw}{d\xi} \right] \quad (20)$$

Postępując analogicznie jak w przypadku wyznaczania siły krytycznej, otrzymamy wzór na częstość drgań własnych:

$$\omega_k^2 = \frac{k^4 \pi^4}{(k^2 \pi^2 \zeta + 1)} \frac{EJ}{\mu l^4} \quad (21)$$

6. Równanie ruchu pręta

Podstawą rozwiązań jest równanie różniczkowe (7). Rozwiązanie tego równania przyjęto w formie nieskończonego szeregu, którego każdy wyraz spełnia warunki brzegowe swobodnego podparcia:

$$\bar{w}(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin(k\pi\xi) \quad (22)$$

Po podstawieniu funkcji (22) do równania (7) otrzymamy wyrażenie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\varepsilon^2 \chi^4 (k^2 \pi^2 \zeta + 1) \frac{d^2 f_k(t)}{dt^2} + (k^2 \pi^2 - \varepsilon^2 \sigma^2) k^2 \pi^2 f_k(t) \right] \sin(k\pi\xi) = 0 \quad (23)$$

którego warunkiem spełnienia jest zerowanie się współczynników szeregu. W rezultacie dostaniemy równanie w postaci:

$$\frac{d^2 f_k(t)}{dt^2} + \frac{k^4 \pi^4}{(k^2 \pi^2 \zeta + 1)} \frac{EJ}{\mu l^4} \left[1 - S \frac{(k^2 \pi^2 \zeta + 1) l^2}{k^2 \pi^2} \frac{1}{EJ} \right] f_k(t) = 0 \quad (24)$$

Po podstawieniu do powyższego wzoru wyrażenie (1), uwzględniając wzory na siłę krytyczną (16) i częstość drgań własnych (21), równanie (24) przekształcone zostanie do postaci:

$$\frac{d^2 f_k(t)}{dt^2} + \Omega_k^2 [1 - 2\nu_k \Phi(t)] f_k(t) = 0 \quad (25)$$

gdzie:

$$\Omega_k = \omega_k \sqrt{1 - \frac{S_o}{S_{sk}}}; \quad \nu_k = \frac{S_l}{2(S_{sk} - S_o)} \quad (26)$$

Jest to różniczkowe równanie parametrycznych drgań poprzecznych pręta, które jest identyczne dla wszystkich form drgań, co umożliwi pominięcie w nim indeksu k . Takie równanie o zmiennych okresowo współczynnikach nazywa się równaniem Hilla. Jeżeli przyjmiemy, że siła ściskająca zmienia się w sposób okresowy harmoniczny:

$$\Theta(t) = \cos \Theta t \quad (27)$$

dostaniemy szczególny przypadek równania (26) – równanie Mathieu:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \Omega^2 [1 - 2\nu \cos(\Theta t)] f(t) = 0 \quad (28)$$

Postać tego równania jest taka sama jak w przypadku pręta smukłego, natomiast wpływ odkształcalności postaciowej został ujęty we współczynnikach (26). Wyznaczenie obszarów niestateczności dynamicznej na podstawie równania o postaci (28) zostało przeprowadzone we wspomnianej pozycji [1].

7. Wpływ bezwładności obrotowej

W przypadku uwzględnienia momentu bezwładności obrotowej (rys. 3a) cząstkowe równanie różniczkowe (7), opisujące drgania poprzeczne pręta, przyjmie postać:

$$\frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \xi^4} - \lambda^4 \zeta \left(\varepsilon^2 + \frac{1}{n} \right) \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \xi^2 \partial t^2} + \varepsilon^2 \lambda^4 \zeta^2 \frac{1}{n} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial t^4} + \varepsilon^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \xi^2} + \varepsilon^2 \lambda^4 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} = 0 \quad (29)$$

gdzie:

$$n = \kappa \frac{E}{G}$$

a równanie amplitud będzie następujące:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \lambda^4 \zeta \left(1 + \frac{1}{n} \right) \frac{d^2 w}{d\xi^2} - \lambda^4 \left(1 - \lambda^4 \zeta^2 \frac{1}{n} \right) w = 0 \quad (30)$$

W tym przypadku wyznaczmy dwie częstotliwości:

$$\omega_1^2 = \frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - 4nk^4\pi^4}}{2\zeta} \frac{EJ}{\mu l^4}; \quad \omega_2^2 = \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - 4nk^4\pi^4}}{2\zeta} \frac{EJ}{\mu l^4} \quad (31)$$

gdzie:

$$\delta = (k^2\pi^2\zeta + 1)\frac{n}{\zeta} + k^2\pi^2 \quad (32)$$

Pierwszej z nich odpowiadają współbieżne przemieszczenia giętnie i postaciowe, natomiast z drugą skojarzone są przemieszczenia giętnie i postaciowe wzajemnie przeciwbieżne.

W obecnej chwili trwają prace nad wyznaczeniem obszarów niestateczności dynamicznej, metodą bilansów harmoniczných, przy uwzględnieniu bezwładności obrotowej.

LITERATURA

1. Gomuliński A., Witkowski M.: Mechanika budowli (kurs dla zaawansowanych). Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1993.
2. Timoshenko S.P., Gere J.M.: Teoria stateczności sprężystej. Arkady, Warszawa 1963.
3. Langer J.: Dynamika budowli. Politechnika Wroclawska, Wroclaw 1980.
4. Wolmir A.C.: Ustojciwost uprugich sistemi. Moskwa 1963.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jerzy Gołaś

Abstract

Depending of relation between the quantities determining load (S_0, S_t, θ) and properties of structure (S_{ek}, ω_k), when the rods are compressed by harmonic time-depended force, the stable or unstable parametric vibration is formed.

The shear strain included does not change the equation of motion (the (28) equation is the same for Bernoulli rod) but this is considered in the quantities determining properties of structure.