

Krzysztof KLUSZCZYŃSKI

WARUNKI POZWALAJĄCE NA ROZWIĄZYWANIE OBWODÓW MAGNETYCZNYCH PRZY WYKORZYSTANIU ZASTĘPCZYCH OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH O RÓWNOWAŻNEJ STRUKTURZE TOPOLOGICZNEJ

Streszczenie. Wykazano, że istnieją obwody magnetyczne, które mogą być analizowane przy wykorzystaniu zastępczych obwodów elektrycznych, mających taki sam graf, jak rdzeń i obwody magnetyczne, w których graf zastępczego obwodu elektrycznego musi być rozszerzony. Dla obu powyższych przypadków sformułowano warunki matematyczne, a następnie rozważono odpowiednie przykłady.

CONDITIONS ENABLING SOLUTION OF MAGNETIC CIRCUITS BASING ON EQUIVALENT ELECTRICAL CIRCUITS OF ANALOGOUS TOPOLOGICAL STRUCTURE

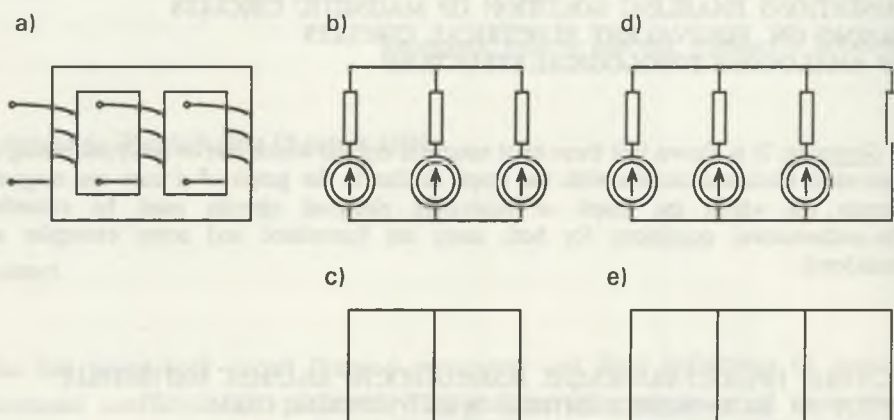
Summary. It is shown that there exist magnetic circuits which can be analysed basing on equivalent electrical circuits with the graph similar to the graph of a core and magnetic circuits for which the graph of equivalent electrical circuits must be extended. The mathematical conditions for both cases are formulated and some examples are considered.

УСЛОВИЯ ПРЕДОСТАВЛЯЮЩИЕ ВОЗМОЖНОСТЬ АНАЛИЗА МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ НА БАЗЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СХЕМ С АНАЛОГИЧНОЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

Резюме. Показывается что существуют магнитные цепи, которые можно анализировать на базе эквивалентных электрических цепей, имеющие такой же граф как сердечник - и магнитные цепи, которых граф эквивалентной электрической цепи должен быть расширенный. Для каждого случая сформулированы математические условия, затем рассуждены соответствующие примеры.

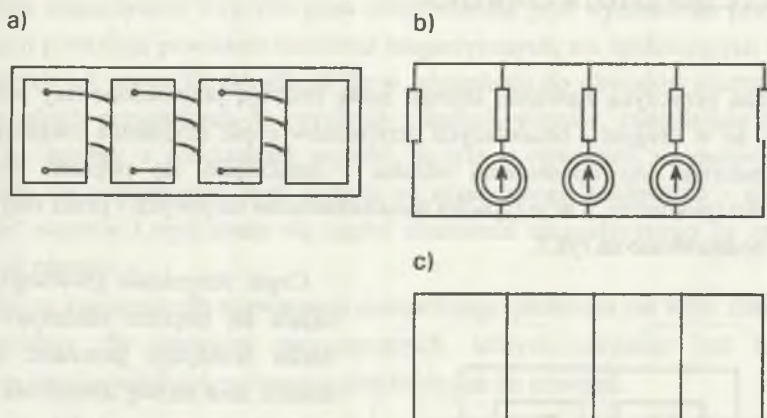
1. WPROWADZENIE I CEL

Obwody magnetyczne (przy pominięciu prądów wirowych i zjawiska histerezy) analizuje się, wykorzystując ich podobieństwo do obwodów elektrycznych. W ramach tej analogii obwodowi magnetycznemu przyporządkowuje się obwód elektryczny o grafie identycznym z grafem obwodu magnetycznego, a następnie wykorzystując odpowiedniości pomiędzy wielkościami magnetycznymi i elektrycznymi rozwiązuje się obwód wykorzystując prawa teorii obwodów elektrycznych [1]. Podejście takie, prezentowane w literaturze dotyczącej teorii obwodów magnetycznych, nie jest jednak słuszne dla wszystkich obwodów magnetycznych, a możliwość analizowania obwodów magnetycznych na podstawie obwodów elektrycznych o analogicznej strukturze topologicznej jak rdzeń jest uzależniona od spełnienia określonego warunku, który - jak pokażemy - jest związany z liczbą uzwojeń i ich rozmieszczeniem na rdzeniu, a w przypadku pewnej klasy obwodów magnetycznych również z wartościami wymuszeń przyłożonych do uzwojeń.



Rys.1. 3-fazowy 3-kolumnowy transformator ;
 a) rdzeń b), c) zastępczy obwód elektryczny i jego graf przy zasilaniu i obciążeniu symetrycznym
 d), e) zastępczy obwód elektryczny i jego graf przy obciążeniu niesymetrycznym

Fig. 1. 3-phase 3-limb transformer;
 a) core b), c) equivalent electrical circuit and its graph under balanced conditions
 d), e) equivalent electrical circuit and its graph under unbalanced conditions



Rys.2. 3-fazowy 5-kolumnowy transformator;
 a) rdzeń, b), c) zastępczy obwód elektryczny i jego graf

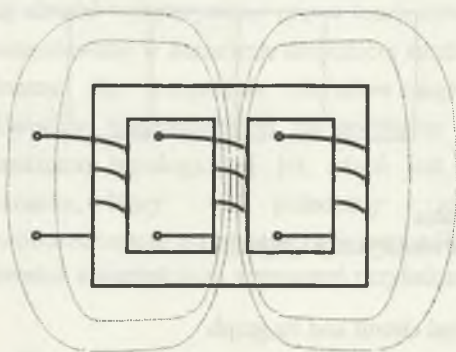
Fig. 2. 3-phase 5-lamb transformer;
 a) core, b), c) equivalent electrical circuit and its graph

Problem ten jest dostrzegany przy rozwiązywaniu różnych zagadnień technicznych i tak na przykład przy analizie 3-kolumnowego transformatora 3-fazowego (rys. 1a), zasilanego symetrycznie i obciążonego symetrycznie, przyjmuje się zastępczy obwód elektryczny 3-gałęziowy, przedstawiony na rys. 1b, przy analizie tego samego transformatora w przypadku asymetrii, związanej z obciążeniem przewodu zerowego - zastępczy obwód elektryczny 4-gałęziowy, przedstawiony na rys. 1d, zaś przy analizie 5-kolumnowego transformatora 3-fazowego (rys.2a) niezależnie od tego czy transformator jest zasilany i obciążony symetrycznie, czy też niesymetrycznie - zastępczy obwód elektryczny 5-gałęziowy, przedstawiony na rys. 2b [2]. W pierwszym i trzecim przypadku graf zastępczego obwodu elektrycznego (rys. 1c i 2c) jest zgodny z grafem rdzenia, zaś w drugim przypadku (rys. 1e) - rozszerzony o dodatkową gałąź.

Przedstawiony problem, mimo że znany i zauważany w różnych szczególnych przypadkach technicznych, nie został dotychczas teoretycznie uogólniony, a warunek określający, kiedy graf zastępczego obwodu elektrycznego jest zgodny z grafem rdzenia, a kiedy wymaga rozbudowania, nie został formalnie w sposób matematyczny sformułowany. Sformułowaniu tego właśnie warunku jest poświęcona niniejsza praca.

2. FIZYCZNA ISTOTA ZJAWISKA

Fizyczną przyczyną zjawiska, którego istotę ilustrują przytoczone trzy przykłady, jest fakt, że w drugim z omawianych przypadków część strumienia magnetycznego jest "zmuszona" do opuszczenia rdzenia i zamknięcia się poprzez otaczające środowisko (powietrze, a w przypadku transformatorów olejowych - przez olej i kadź), jak to przedstawiono na rys.3.



Rys. 3. Strumień jarzmowy w przypadku asymetrii związanej z obciążeniem przewodu zerowego

Fig. 3. Yoke magnetic flux in the case of asymmetry due to loading of neutral conductor

Część strumienia głównego, zamykająca się poprzez otaczające środowisko pomiędzy jarzmanni transformatora, nosi nazwę strumienia jarzmowego, a jego uwzględnienie w obliczeniach - chociażby w przybliżony sposób - wymaga rozszerzenia grafu rdzenia o dodatkową gałąź. Określenie permeancji tej dodatkowej gałęzi jest zagadnieniem złożonym, albowiem poza rdzeniem w otaczającym transformator środowisku mamy do czynienia bardziej z przestrzennym rozkładem pola magnetycznego niż z wyraźnie wyodrębniającą się w przestrzeni "skupioną" drogą dla strumienia magnetycznego.

To właśnie zjawisko wypływanie w określonych warunkach części strumienia magnetycznego poza rdzeń, wynikające z tego, że obwód magnetyczny nie może być izolowany od otaczającego środowiska, a środowisko otaczające rdzeń jest magnetycznie przenikliwe, stanowi zasadniczą różnicę pomiędzy obwodami magnetycznymi a obwodami elektrycznymi i jest przyczyną tego, że - ze względu na konieczność uwzględnienia strumienia magnetycznego, zamykającego się przez otoczenie - zastępczy obwód elektryczny może posiadać więcej gałęzi niż obwód magnetyczny. Należy również podkreślić, że w przypadku, gdy strumień magnetyczny zamyka się częściowo poza rdzeniem, obliczenia oparte na zastępczym obwodzie elektrycznym, w którym pole magnetyczne przenikające przez środowisko jest uwzględniane za pomocą dodatkowych, sztucznie wprowadzonych gałęzi, może być obciążone znacznym błędem.

Strumień magnetyczny wypływa poza obręb rdzenia, jeśli wymuszenia przyłożone do uzwojeń powodują powstanie strumieni magnetycznych, nie spełniających równań wynikających z I prawa Kirchhoffa. O ile w odniesieniu do obwodów elektrycznych mamy w takich przypadkach do czynienia z reakcją węzłów, zmieniającą rozpyływ prądów na zgodny z równaniami węzłów, o tyle w obwodach magnetycznych - ze względu na wspomniany brak izolacji od otaczającego środowiska - następuje "zerwanie" węzłów i wydostanie się części strumienia magnetycznego na zewnątrz poza obręb rdzenia.

Zasadnicze znaczenie dla rozwiązania postawionego problemu ma więc znalezienie takich węzłów dla strumieni magnetycznych, których zerwanie jest możliwe za pomocą nieodpowiednich wymuszeń przyłożonych do uzwojeń.

3. MATEMATYCZNE SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

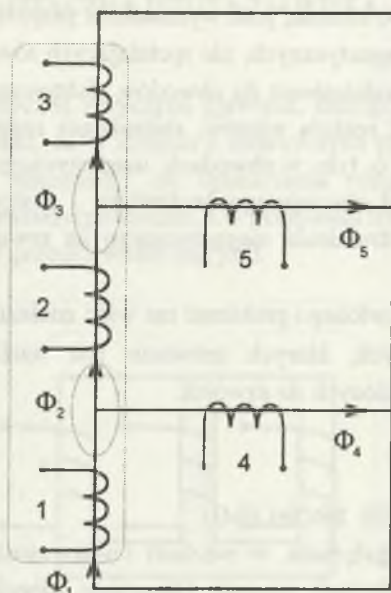
Rozważmy płaski obwód magnetyczny o g -gałęziach, w -węzłach i n -uzwojeniach, rozmieszczonych pojedynczo na różnych gałęziach rdzenia. Oznaczmy uzwojenia numerami $1, \dots, n$, a strumienie magnetyczne w gałęziach rdzenia, na których nawinięto uzwojenia, indeksami równymi numerom uzwojeń. Tak więc uzwojenia o numerach $1, 2, \dots, n$ wytwarzają odpowiednio strumienie magnetyczne $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$. Strumienie te nie mogą być dowolne, muszą przyjmować wartości zgodne z równaniami ułożonymi na podstawie I prawa Kirchhoffa dla wszystkich dających się wyodrębnić części rdzenia, łączących się z resztą obwodu wyłącznie poprzez gałęzie uzwojone [3], [5]. Przykładowo, w obwodzie magnetycznym, którego graf z zaznaczonym rozmieszczeniem uzwojeń przedstawiono na rys. 4, można wyodrębnić trzy takie kontury. Dwa spośród trzech równań odpowiadających tym konturom są liniowo niezależne:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \Phi_3 \ \Phi_4 \ \Phi_5]^T = 0, \quad (1)$$

a to oznacza, że przestrzeń strumieni magnetycznych płynących przez gałęzie rdzenia, na których rozmieszczone są uzwojenia (przez gałęzie z wymuszeniami), ma wymiar:

$$\dim \Phi = n - 2 = 3 \quad (2)$$

W ogólnym przypadku, jeśli liczba liniowo niezależnych równań typu (1) wynosi k :



Rys. 4. Graf przykładowego obwodu magnetycznego z zaznaczonym rozmieszczeniem uzwojeń ($g = 6, n = 5, k = 2, s = 3$)

Fig.4. Graph of exemplary magnetic circuit with distribution of windings

prostej dwóch podprzestrzeni - przestrzeni zerowej W_0^k oraz jej ortogonalnego dopełnienia $W_{\perp}^{n-k}$:

$$W^n = W_0^k \oplus W_{\perp}^{n-k}. \quad (8)$$

Bazę przestrzeni zerowej W_0^k stanowią wektory $[C_{1i} \ C_{2i} \ \dots \ C_{ni}]$ (dla $i = 1, \dots, k$) z układu równań (3). Relacja (8) oznacza, że dowolny wektor wymuszeń

$$[w] = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n]^T$$

można przedstawić w postaci sumy dwóch wzajemnie ortogonalnych wektorów:

$$[w] = [w_0] + [w_{\perp}], \quad (9)$$

gdzie:

$$[w_0] \in W_0^k, \quad [w_{\perp}] \in W_{\perp}^{n-k}.$$

$$[C_{1i} \ C_{2i} \ \dots \ C_{ni}] [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \dots \ \Phi_n]^T = 0 \quad (3)$$

dla $i = 1, 2, \dots, k$ zachodzi:

$$\dim \Phi = n - k. \quad (4)$$

Jeśli założymy, że obwód magnetyczny jest nienasycony (liniowy), a więc, że permeancje poszczególnych gałęzi rdzenia są stałe, możemy przekształcenie Λ (którego dziedziną jest n -wymiarowy zbiór wymuszeń przyłożonych do uzwojeń W , a obrazem $(n-k)$ -wymiarowy zbiór strumieni magnetycznych, płynących przez gałęzie rdzenia z rozmieszczonymi uzwojeniami Φ) uważać za liniowe:

$$\Phi^{n-k} = \Lambda W^n. \quad (5)$$

Konsekwencją nierówności:

$$\dim W > \dim \Phi \quad (6)$$

jest istnienie przestrzeni zerowej (jądra) W_0 przekształcenia liniowego Λ o wymiarze:

$$\dim W - \dim \Phi = k \quad (7)$$

oraz możliwość przedstawienia przestrzeni wymuszeń W^n w postaci sumy

Wektor $[w_{\perp}]$ jest składową, wywołującą rozptyw strumieni magnetycznych zgodnych z równaniami węzłów (3), zaś wektor $[w_0]$ - składową należącą do podprzestrzeni wektorów, niezgodnych z węzłami (3), a więc składową, której przyłożenie do uzwojeń spowoduje "zerwanie" węzłów i "wypłynięcie" części głównego strumienia magnetycznego poza rdzeń. Uwzględnienie tej części strumienia, zamykającej się przez otoczenie, wymaga dodania do grafu zastępczego obwodu elektrycznego dodatkowych gałęzi.

Można wykazać, że węzły typu (3) ($k > 0$) istnieją we wszystkich obwodach magnetycznych, w których liczba uzwojeń n przewyższa liczbę gałęzi dopełnienia grafu rdzenia s (liczbę strun rdzenia), a więc w obwodach, dla których:

$$n > s. \quad (10)$$

W obwodach, w których liczba uzwojeń jest niższa od liczby gałęzi dopełnienia grafu rdzenia s :

$$s < n \quad (11)$$

węzły typu (3) istnieją tylko wtedy, jeśli nie można znaleźć drzewa grafu rdzenia, składającego się wyłącznie z gałęzi bez uzwojeń.

4. PODSUMOWANIE

W obwodach magnetycznych, w których nie istnieją więzy typu (3), a więc $k = 0$, obwód magnetyczny można analizować na podstawie zastępczego obwodu elektrycznego o identycznym grafie z grafem rdzenia. W obwodach magnetycznych, w których istnieją więzy typu (3), a więc $k > 0$, obwód magnetyczny można analizować przy wykorzystaniu zastępczego obwodu elektrycznego o identycznym grafie z grafem rdzenia wtedy i tylko wtedy, jeśli:

$$[w] \in W_{\perp}^{n-k}. \quad (12)$$

Jeśli:

$$[w] \in W_0^k, \quad (13)$$

główny strumień magnetyczny zamyka się częściowo poza rdzeniem poprzez otoczenie i graf zastępczego obwodu elektrycznego musi być uzupełniony dodatkową gałęzią lub dodatkowymi gałęziami, o ile chcemy przeprowadzić przybliżoną analizę w oparciu o teorię obwodów, a nie korzystać z równań pola elektromagnetycznego.

5. KOMENTARZ DOTYCZĄCY CHARAKTERU WYMUSZEŃ

W obwodach magnetycznych prądu stałego strumień magnetyczny jest wymuszony przez wektor siły magnetomotorycznej (przepływu):

$$[w] = [N_1 i_1, N_2 i_2, \dots, N_n i_n], \quad [w] \in W^n \quad (14)$$

gdzie:

N_i - liczba zwojów i -tego uzwojenia,

i_i - prąd w i -tym uzwojeniu.

Odmienne przedstawia się sytuacja w obwodach magnetycznych, zasilanych napięciami sinusoidalnymi o pulsacji ω_0 . Jeśli założymy, że wartości rezystancji i indukcyjności rozproszeń są pomijalnie małe, wówczas:

$$u_i(t) = \sqrt{2} U_i \sin \omega_0 t = \omega_0 N_i \Phi_i \sin \omega_0 t, \quad (15)$$

gdzie:

$u_i(t)$, $e_i(t)$ - napięcie zasilające i -te uzwojenie oraz siła elektromotoryczna indukowana w i -tym uzwojeniu,

a więc przyłożone do uzwojeń napięcia wymuszają wartości strumieni magnetycznych w tych gałęziach rdzenia, na których są nawinięte. Można więc uważać, że w poszczególne gałęzie rdzenia z uzwojeniami są włączone sinusoidalnie zmienne "siły strumieniomotoryczne" o amplitudach proporcjonalnych do amplitud przyłożonych napięć, czyli że:

$$[w] = [u] = [u_1, u_2, \dots, u_n]. \quad (16)$$

W odniesieniu do obwodów magnetycznych prądu stałego warunek (12) i (13) odnosi się do sił magnetomotorycznych (wzór (14)), zaś w odniesieniu do obwodów magnetycznych o przebiegach sinusoidalnych, w których uzwojenia charakteryzują się pomijalnie małą rezystancją i indukcyjnością rozproszenia, do napięć zasilających uzwojenia (wzór (16)).

LITERATURA

- [1] Cholewicki T.: Elektrotechnika teoretyczna. WNT, 1970.
- [2] Jezierski E.: Transformatory. WNT, 1975.
- [3] Kluszczyński K.: Składowe aktywne i zerowe prądów w obwodach elektromagnetycznych. Rozprawy Elektrotechniczne, Warszawa 1981, No 27, z.3, ss. 697-712.
- [4] Kluszczyński K.: Topologiczna metoda wyznaczania bazy przestrzeni zerowej macierzy indukcyjności głównej. Materiały VI Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów SPETO 85, 179-186 oraz ZN Pol. Śl. s. Elektryka, z. 88, Gliwice 1987.
- [5] Kluszczyński K.: Decomposition of current vector into active and zero-component in magnetic circuit. Proc. of European Conference on Circuit Theory and Design ECCTD'87, Paryż 1987, ss. 603-607.

Recenzent: Prof. dr hab inż. Piotr Wach

Wpłynęło do Redakcji dnia 25 marca 1994 r.

Abstract

According to the theory of magnetic circuits, a magnetic circuit can be analysed basing on an equivalent electrical circuit, which graph is identical to the graph of a core. On the other hand it is known, e.g. from theory of transformers, that this principle is not fulfilled in all cases. For instance: symmetrically-fed 3-phase 3-lamb transformer (Fig. 1a) is analysed basing on the equivalent electrical circuit presented in Fig. 1b, asymmetrically-fed 3-phase 3-lamb transformer -basing on the equivalent circuit presented in Fig. 1d, and symmetrically- or asymmetrically-fed 3-phase 5-lamb transformer (Fig. 2a) basing on the equivalent circuit presented in Fig. 2b. In the first and the third case the graph of equivalent electrical circuit corresponds to the graph of a core (Fig. 1c and 2c) and in the second case - the graph of equivalent electrical circuit is extended by inserting an additional branch (Fig. 1e). The reason

for that is the magnetic flux which leaves the iron core and passes through the air (Fig. 3). This phenomenon can be explained by means of the example presented in Fig. 4. The magnetic fluxes in the branches with wound windings must satisfy the equations of constraints resulting from the I Kirchhoff's Law (eqn. (3)). Consequently, input vector related to the windings can be divided into two mutually orthogonal components (eqn. (9)): the vector $[w_{\perp}]$ which is the reason for the distribution of magnetic fluxes according to the equations of nodes (eqn. (3)), and vector $[w_o]$ which forces magnetic flux to leave the core and to break the nodes. Summing up, all the magnetic circuits can be divided into two groups.

In the first group the equations of constraints analogous to eqn. (3) do not exist and these magnetic circuits can be analysed basing on equivalent electrical circuits with the same graph as the graph of a core.

In the second group, it depends on the form of an input vector. If the input vector satisfies the condition (12), the graph of the core and the graph of the equivalent electrical circuit are identical. Otherwise, when the condition (13) is fulfilled, the graph of the equivalent electrical circuit should be extended by inserting the new additional branches which enable us to take into account the magnetic flux passing through the air.