

Roman KROK, Adam RÓŻYCKI

## PRZESTRZENNO-CZASOWE POLE TEMPERATUR W UZWOJENIU PRĘTOWYM MASZYNY ELEKTRYCZNEJ

Streszczenie. W artykule przedstawiono ściśle, analityczne rozwiązanie jednowymiarowego równania różniczkowego przewodnictwa ciepła o pochodnych cząstkowych, opisującego stan cieplnie nieustalony w prętowym uzwojeniu maszyny elektrycznej dużej mocy. Obliczenia wykonano przy skokowym wymuszeniu prądu o stałej wartości.

## TRANSIENT ONE-DIMENSIONAL THERMAL FIELD IN STRAIGHT PART OF BAR WINDING OF ELECTRIC MACHINE

Summary. In this paper partial one-dimensional equations for heat conduction, describing thermal transients in the bar winding of a large size electric machine have been exactly solved. Calculations are made for equal current density.

## ПРОСТРАНСТВЕННО – ВРЕМЕННОЕ ПОЛЕ ТЕМПЕРАТУР В ПРОВОДНИКАХ ОБОТКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАШИНЫ

Резюме. В статье представлено аналитическое решение одномерного дифференциального уравнения тепловой проводимости в частных производных, описывающего тепловой переходной процесс в проводниках обмотки электрической машины большой мощности. Расчеты произведены при броске тока постоянной величины.

## 1. WSTĘP

Znajomość nieustalonego rozkładu pola cieplnego ma szczególne znaczenie w uzwojeniach maszyn elektrycznych dużej mocy i to zarówno w normalnych, jak i w szczególnych przypadkach eksploatacji. Zjawisko to powinno być szczegółowo poznane już w fazie projektowania maszyny elektrycznej w celu uniknięcia przyszłych lokalnych przegrzań, które mogą spowodować zmniejszenie trwałości izolacji a nawet uszkodzenie uzwojeń.

Nowoczesne konstrukcje są mniej odporne na przeciążenia prądowe i stosowanie w tych przypadkach metod uproszczonych, polegających np. na traktowaniu uzwojenia jako układu cieplnego o parametrach skupionych, powinno być zastąpione metodami zapewniającymi dobrą zgodność temperatur obliczonych i zmierzonych na obiekcie fizycznym.

Zapewnienie niezbędnej dokładności wymaga posługiwania się coraz bardziej rozbudowanym aparatem matematycznym.

W celu wyznaczenia rozkładu temperatury w uzwojeniu prętowym maszyny elektrycznej w stanie cieplnie nieustalonym wykorzystano jednowymiarowe równanie różniczkowe Kirchhoffa-Fouriera o pochodnych cząstkowych:

$$c\gamma \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{ grad } \vartheta) + P(\vartheta),$$

z następującymi warunkami początkowymi:

$$\vartheta(x, 0) = \vartheta_p(x) = \vartheta_p$$

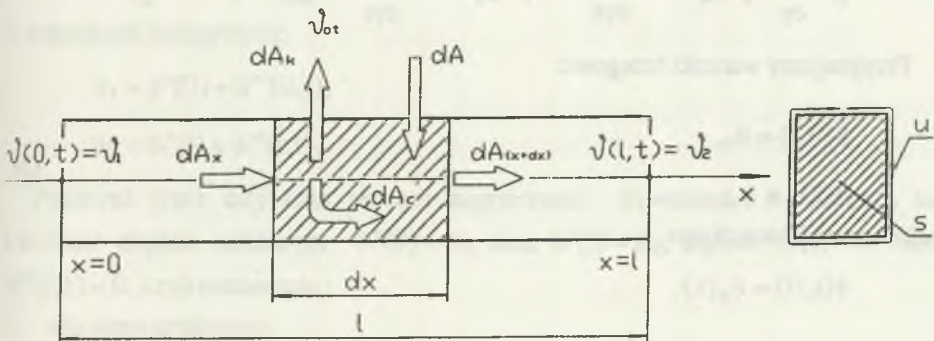
i brzegowymi:

$$\vartheta(0, t) = \vartheta_1,$$

$$\vartheta(1, t) = \vartheta_2.$$

## 2. ŚCISLE ANALITYCZNE WYZNACZENIE CZASOWEGO PRZEBIEGU TEMPERATURY W UZWOJENIU PRĘTOWYM PRZY JEDNOWYMIAROWYM PRZEWODZENIU CIEPŁA

Analiza stanów nieustalonych w układach o parametrach rozłożonych sprowadza się do rozwiązania równania różniczkowego przewodnictwa ciepła o pochodnych cząstkowych [1]. Rozważmy nagrzewanie uzwojenia prętowego (rys.1) maszyny elektrycznej dużej mocy o długości ( $l$ ) i stałym przekroju poprzecznym o powierzchni przekroju ( $s$ ) i obwodzie ( $u$ ). Pręt nagrzewany jest rozłożonymi stratami własnymi  $p_0 s [1 + \alpha \vartheta(x, t)]$ , gdzie symbolem  $p_0$  oznaczono stałą jednostkową moc strat przy temperaturze  $0^\circ\text{C}$ , zaś symbolem ( $\alpha$ ) ciepły współczynnik rezystancyjny. Przyjęto, że ciepło właściwe materiału pręta wynosi ( $c$ ), gęstość masy ( $\gamma$ ), a przewodność cieplna właściwa pręta ( $\lambda$ ). Uwzględniono wymianę ciepła do otoczenia, przyjmując stałą wartość współczynnika przejmowania ciepła ( $k$ ) z krawędzi bocznych do otaczającego ośrodka o stałej wzdłuż długości pręta temperaturze  $\vartheta_{ot}$ . Przyjęcie niewielkiej grubości izolacji pozwoliło na pominięcie jej wpływu na przebieg nagrzewania.



Rys.1. Bilans cieplny w uzwojeniu prętowym w stanie cieplnie nieustalonym  
Fig. 1. Heat equation in the bar winding in transient state

Dla elementu o długości  $dx$  (rys.1) obowiązuje bilans cieplny [2]

$$dA_x - dA_{(x+dx)} + dA - dA_k - dA_c = 0, \quad (1)$$

gdzie:

$$dA_x = -\lambda s \frac{\partial \vartheta(x,t)}{\partial x} dt,$$

$$dA_{(x+dx)} = -\lambda s \frac{\partial}{\partial x} \left[ \vartheta(x,t) + \frac{\partial \vartheta(x,t)}{\partial x} dx \right] dt = -\lambda s \frac{\partial \vartheta(x,t)}{\partial x} dt - \lambda s \frac{\partial^2 \vartheta(x,t)}{\partial x^2} dx dt,$$

$$dA = p_0 s [1 + \alpha \vartheta(x,t)] dx dt,$$

$$dA_k = ku [\vartheta(x,t) - \vartheta_{ot}] dx dt,$$

$$dA_c = c_{ys} \frac{\partial \vartheta(x,t)}{\partial t} dx dt$$

oznaczają odpowiednio energię dopływającą, odpływającą, wydzieloną, wymianianą z sąsiednim elementem lub z otoczeniem i energią zakumulowaną.

Po podstawieniu do wzoru (1) i uporządkowaniu mamy:

$$\frac{\partial \vartheta(x,t)}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 \vartheta(x,t)}{\partial x^2} - a_1^2 \vartheta(x,t) + b_1, \quad (2)$$

gdzie:

$$\chi = \frac{\lambda}{c_{ys}}, \quad a_1^2 = \frac{ku - \alpha p_0 s}{c_{ys}}, \quad b_1 = \frac{p_0 s + ku \vartheta_{ot}}{c_{ys}}.$$

Przyjmujemy warunki brzegowe:

$$\vartheta(0,t) = \vartheta_1,$$

$$\vartheta(l,t) = \vartheta_2, \quad (3)$$

oraz warunki początkowe:

$$\vartheta(x,0) = \vartheta_p(x).$$

Rozwiązaniem równania przewodnictwa ciepła, będącego równaniem różniczkowym niejednorodnym o pochodnych cząstkowych, jest wyrażenie:

$$\vartheta(x,t) = \vartheta^*(x) + \vartheta^{**}(x,t), \quad (4)$$

gdzie:

$\vartheta^*(x)$  jest temperaturą w stanie cieplnie ustalonym,

$\vartheta^{**}(x,t)$  jest temperaturą uwzględniającą zmienność temperatury w czasie.



Podstawiając do wzoru (2) wyrażenie (4), mamy:

$$\frac{d\vartheta^*(x)}{dt} + \frac{\partial \vartheta^{**}(x,t)}{\partial t} = \chi \frac{d^2 \vartheta^*(x)}{dx^2} + \chi \frac{\partial^2 \vartheta^{**}(x,t)}{\partial x^2} - a_1^2 \vartheta^*(x) - a_1^2 \vartheta^{**}(x,t) + b_1, \quad (5)$$

a przyjmując

$$a^2 = \frac{a_1^2}{\chi} = \frac{\frac{ku - \alpha p_0 s}{c\gamma s}}{\frac{\lambda}{c\gamma}} = \frac{(ku - \alpha p_0 s)c\gamma}{\lambda c\gamma s} = \frac{ku - \alpha p_0 s}{\lambda s}, \quad (6)$$

$$b = \frac{b_1}{\chi} = \frac{\frac{p_0 s + ku \vartheta_{ot}}{c\gamma s}}{\frac{\lambda}{c\gamma}} = \frac{(p_0 s + ku \vartheta_{ot})c\gamma}{\lambda c\gamma s} = \frac{p_0 s + ku \vartheta_{ot}}{\lambda s}$$

dla stanu cieplnie ustalonego otrzymujemy:

$$\frac{d^2 \vartheta^*(x)}{dx^2} = a^2 \vartheta^*(x) - b, \quad (7)$$

zaś dla stanu cieplnie nieustalonego:

$$\frac{\partial \vartheta^{**}(x,t)}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 \vartheta^{**}(x,t)}{\partial x^2} - a_1^2 \vartheta^{**}(x,t), \quad (8)$$

z warunkami brzegowymi:

$$\vartheta_1 = \vartheta^*(0) + \vartheta^{**}(0,t),$$

$$\vartheta_2 = \vartheta^*(l) + \vartheta^{**}(l,t).$$

Ponieważ przez cały czas procesu nagrzewania  $\vartheta_1 = \text{const.}$ ,  $\vartheta_2 = \text{const.}$ , to i w stanie cieplnie ustalonym  $\vartheta^*(0) = \vartheta_1$  oraz  $\vartheta^*(l) = \vartheta_2$ , stąd  $\vartheta^{**}(0,t) = 0$  oraz  $\vartheta^{**}(l,t) = 0$ , czyli ostatecznie :

- dla stanu ustalonego

$$\vartheta^*(0) = \vartheta_1, \quad (9)$$

$$\vartheta^*(l) = \vartheta_2,$$

- dla stanu nieustalonego

$$\vartheta^{**}(0,t) = 0, \quad (10)$$

$$\vartheta^{**}(l,t) = 0,$$

przy warunku początkowym:

$$\vartheta(x,0) = \vartheta^*(x) + \vartheta^{**}(x,0).$$

Stąd:

$$\vartheta^{**}(x, 0) = \vartheta(x, 0) - \vartheta^*(x), \text{ a ponieważ } \vartheta(x, 0) = \vartheta_p(x),$$

więc:

$$\vartheta^{**}(x, 0) = \vartheta_p(x) - \vartheta^*(x). \quad (11)$$

## 2.1. Rozwiązanie równania (7) opisującego stan cieplnie ustalony

Rozwiązaniem równania (7) przekształconego do postaci:

$$\frac{d^2\vartheta^*(x)}{dx^2} - a^2\vartheta^*(x) = -b,$$

z warunkami brzegowymi (9) jest wyrażenie:

$$\vartheta^*(x) = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + \frac{b}{a^2}, \quad (12)$$

gdzie stałe:

$$C_1 = \frac{(\vartheta_2 - \vartheta_1 e^{-al}) - \frac{b}{a^2}(1 - e^{-al})}{2\text{sh}(al)}, \quad (13)$$

$$C_2 = \frac{(\vartheta_1 e^{al} - \vartheta_2) - \frac{b}{a^2}(1 + e^{al})}{2\text{sh}(al)},$$

wynikają z warunków brzegowych (9).

Po podstawieniu równań (13) do równania (12) i uporządkowaniu mamy:

$$\vartheta^*(x) = \frac{b}{a^2} \left[ 1 - \frac{\text{sh}(ax) + \text{sh}[a(1-x)]}{\text{sh}(al)} \right] + \frac{\text{sh}[a(1-x)]}{\text{sh}(al)} \vartheta_1 + \frac{\text{sh}(ax)}{\text{sh}(al)} \vartheta_2. \quad (14)$$

Równanie to można przekształcić, przyjmując:

$$\frac{b}{a^2} = \frac{p_0 s + ku \vartheta_{ot}}{ku - \alpha p_0 s} = \frac{p_0 s l + kul \vartheta_{ot}}{kul - \alpha p_0 s l} = \frac{P_0 + \frac{1}{R_k} \vartheta_{ot}}{\frac{1}{R_k} - \alpha P_0} = (P_0 + \frac{\vartheta_{ot}}{R_k}) R_k^*, \quad (15)$$

$$a^2 = \frac{\beta^2}{l^2} \quad \text{przy} \quad \beta^2 = \frac{R_\lambda}{R_k^*},$$

$$\text{gdzie: } P_0 = p_0 s l, \quad R_k = \frac{1}{kul}, \quad \frac{1}{R_k^*} = \frac{1}{R_k} - \alpha P_0, \quad \beta = al, \quad (16)$$

do postaci:

$$\vartheta(x)^* = \left(P_0 + \frac{\vartheta_{ot}}{R_k}\right) R_k^* \left[ 1 - \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\beta x}{l}\right) + \operatorname{sh}\frac{\beta(1-x)}{l}}{\operatorname{sh}\beta} \right] + \frac{\operatorname{sh}\frac{\beta(1-x)}{l}}{\operatorname{sh}\beta} \vartheta_1 + \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\beta x}{l}\right)}{\operatorname{sh}\beta} \vartheta_2. \quad (17)$$

W szczególnym przypadku, gdy  $\vartheta_{ot} = \vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_0$ , rozwinięcie funkcji  $\vartheta^*(x)$  w szereg Fouriera [3] pozwala uzyskać stosunkowo proste wyrażenie, bardzo przydatne do dalszej analizy.

Otrzymana funkcja

$$\vartheta^*(x) = \vartheta_0 + \left\{ 4 \left[ P_0 + \frac{\vartheta_0}{R_k} \right] R_k^* - 4\vartheta_0 \right\} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{(2n-1)\pi T} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l}, \quad (18)$$

gdzie:  $T_n = \frac{\beta^2 T}{\beta^2 + (2n-1)^2 \pi^2},$

$$T = cm R_k^* = c \gamma s l R_k^*$$

jeśli szybkozbieżna.

## 2.2. Rozwiązanie równania (8) opisującego zmienność temperatury w czasie

W celu rozwiązania równania (8) z warunkami brzegowymi (10) i z warunkiem początkowym (11), należy przedstawione równanie sprowadzić do postaci kanonicznej, podstawiając

$$\vartheta^{**}(x, t) = a^2 \Psi(x, t) e^{-a^2 t}. \quad (19)$$

W wyniku tego otrzymujemy:

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2}, \quad (20)$$

z warunkami brzegowymi i początkowymi dla  $\vartheta^{**}(x, t)$  w postaci:

$$\vartheta^{**}(0, t) = 0, \quad \vartheta^{**}(l, t) = 0, \quad \vartheta^{**}(x, 0) = \vartheta_p(x) - \vartheta^*(x).$$

Stąd wynikają warunki brzegowe i początkowe dla funkcji  $\Psi(x, t)$

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) &= \frac{1}{a^2} e^{a^2 t} \vartheta^{**}(x, t), \\ \Psi(0, t) &= \frac{1}{a^2} e^{a^2 t} \vartheta^{**}(0, t) = 0, \\ \Psi(l, t) &= \frac{1}{a^2} e^{a^2 t} \vartheta^{**}(l, t) = 0, \\ \Psi(x, 0) &= \frac{1}{a^2} [\vartheta_p(x) - \vartheta^*(x)].\end{aligned}\tag{21}$$

Stosując metodę rozdzielania zmiennych funkcję  $\Psi(x, t)$  przedstawiamy w postaci iloczynu

$$\Psi(x, t) = \varphi(x) \tau(t).\tag{22}$$

Po obliczeniu i podstawieniu pochodnych do równania (20) mamy:

$$\frac{c\gamma}{\lambda} \frac{1}{\tau(t)} \frac{\partial \tau(t)}{\partial t} = \frac{1}{\varphi(x)} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2}.\tag{23}$$

Równanie (23) rozdzielamy na dwa równania:

$$\frac{c\gamma}{\lambda} \frac{1}{\tau(t)} \frac{d\tau(t)}{dt} = -\varepsilon^2,\tag{24}$$

$$\frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = -\varepsilon^2.\tag{25}$$

Rozwiązaniem równania (24) jest wyrażenie:

$$\tau = C_1 e^{-\gamma \varepsilon^2 t},\tag{26}$$

zaś równania (25) wyrażenie:

$$\varphi = A_1 \sin(\varepsilon x) + B_1 \cos(\varepsilon x).\tag{27}$$

Ostatecznie mamy:

$$\Psi(x, t) = [A_1 \sin(\varepsilon x) + B_1 \cos(\varepsilon x)] C_1 e^{-\gamma \varepsilon^2 t},$$

lub:

$$\Psi(x, t) = [A \sin(\varepsilon x) + B \cos(\varepsilon x)] e^{-\gamma \varepsilon^2 t}.\tag{28}$$



Wykorzystując warunki brzegowe, mamy:

$$\Psi(0, t) = 0 \rightarrow B = 0,$$

$$\Psi(1, t) = 0 \rightarrow A \sin(\epsilon_1) = 0, \text{ stąd } \epsilon_n = \frac{n\pi}{1}.$$

Możemy więc napisać:

$$\Psi_n(x, t) = A_{(n)} \sin(\epsilon_n x) e^{-\lambda \epsilon_n^2 t}, \quad (29)$$

lub:

$$\Psi_n(x, t) = A_{(n)} \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) e^{-\frac{\lambda \left(\frac{n\pi}{1}\right)^2}{c^2} t}. \quad (30)$$

Ponieważ zgodnie z wzorem (19),  $\vartheta^{**}(x, t) = a^2 \Psi(x, t) e^{-a^2 t}$ , zatem ostatecznie mamy:

$$\vartheta_n^{**}(x, t) = \frac{ku - \alpha p_0 s}{\lambda s} A_{(n)} \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) e^{-\left[\frac{ku - \alpha p_0 s}{c^2 s} + \frac{\lambda \left(\frac{n\pi}{1}\right)^2}{c^2}\right] t}. \quad (31)$$

Rozwiązanie ogólne przedstawiamy w postaci szeregu Fouriera

$$\vartheta^{**}(x, t) = \frac{ku - \alpha p_0 s}{\lambda s} \sum_{n=1}^{\infty} A_{(n)} \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) e^{-\left[\frac{ku - \alpha p_0 s}{c^2 s} + \frac{\lambda \left(\frac{n\pi}{1}\right)^2}{c^2}\right] t}, \quad (32)$$

a stałe całkowania  $A_{(n)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  wyznaczamy z warunku początkowego

$$\vartheta^{**}(x, 0) = \vartheta_p(x) - \vartheta^*(x).$$

Uwzględniając relacje (32) mamy:

$$\vartheta_p(x) - \vartheta^*(x) = \frac{ku - \alpha p_0 s}{\lambda s} \sum_{n=1}^{\infty} A_{(n)} \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right). \quad (33)$$

Mnożąc lewą i prawą stronę równania (33) przez  $\sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right)$  i całkując w granicach od 0 do 1 oraz wykorzystując ortogonalność szeregu Fouriera, mamy:

$$\int_0^1 [\vartheta_p(x) - \vartheta^*(x)] \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx = \frac{ku - \alpha p_0 s}{\lambda s} A_{(n)} \int_0^1 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx,$$

stąd

$$A_{(n)} = \frac{\int_0^1 [\vartheta_p(x) - \vartheta^*(x)] \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx}{\frac{ku - \alpha p_0 s}{\lambda s} \cdot \frac{1}{2}}, \quad (34)$$

gdz  $\int_0^1 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx = \frac{1}{2}$  lub po przekształceniu otrzymujemy:

$$A_{(n)} = \frac{2\lambda s}{(ku - \alpha p_0 s)l} \int_0^1 [\vartheta_p(x) - \vartheta^*(x)] \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx. \quad (35)$$

Po podstawieniu równania (35) do równania (31) otrzymujemy:

$$\vartheta^{**}(x, t) = \frac{2}{1} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 [\vartheta_p(x) - \vartheta^*(x)] \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) e^{-\left[\frac{ku - \alpha p_0 s}{c_1 s} + \frac{\lambda}{c_1} \left(\frac{n\pi}{1}\right)^2\right] t}, \quad (36)$$

gdzie  $\vartheta^*(x)$  wyrażone jest zależnością (17).

Zakładając  $\vartheta_p(x) = \vartheta_p$ , możemy obliczyć wyrażenie:

$$\frac{2}{1} \int_0^1 [\vartheta_p - \vartheta^*(x)] \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx, \quad (37)$$

które można przedstawić w postaci sumy dwóch członów:

człon pierwszy

$$-\frac{2\vartheta_p}{\pi} [\cos(n\pi) - 1] - \frac{2\vartheta_1 \pi}{\beta^2 + (n\pi)^2} + \frac{2\vartheta_2 \pi \cos(n\pi)}{\beta^2 + (n\pi)^2} \quad (38)$$

człon drugi

$$\frac{2}{\pi} \left( P_0 + \frac{\vartheta_{ot}}{R_k} \right) R_k^* [\cos(n\pi) - 1] - 2n\pi \left( P_0 + \frac{\vartheta_{ot}}{R_k} \right) R_k^* \frac{\cos(n\pi)}{\beta^2 + (n\pi)^2} + 2 \left( P_0 + \frac{\vartheta_{ot}}{R_k} \right) R_k^* \frac{n\pi}{\beta^2 + (n\pi)^2} \quad (39)$$

W szczególnym przypadku, gdy  $\vartheta_{01} = \vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_p = \vartheta_0$  suma obydwu członów (38) i (39) wynosi:

$$-2 \left[ \left( P_0 + \frac{\vartheta_0}{R_k} \right) R_k^* - \vartheta_0 \right] \frac{\beta^2}{n\pi [\beta^2 + (n\pi)^2]} [1 - \cos(n\pi)], \quad (40)$$

a wyrażenie  $[1 - \cos(n\pi)]$  przyjmuje wartość równą 2 dla "n" nieparzystych, a wartość 0 dla "n" parzystych, zatem otrzymane wyrażenie jest różne od zera dla wskaźnika będącego liczbą nieparzystą  $(2n-1)$ , gdzie  $n=1, 2, \dots$  i wynosi 2.

Ostatecznie wyrażenie (40) można zapisać w postaci:

$$-4 \left[ \left( P_0 + \frac{\vartheta_0}{R_k} \right) R_k^* - \vartheta_0 \right] \frac{\beta^2}{(2n-1)\pi [\beta^2 + (2n-1)^2 \pi^2]} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (41)$$

Przyjmując jak poprzednio

$$T_n = \frac{\beta^2 T}{\beta^2 + (2n-1)^2 \pi^2}, \quad (42)$$

$$T = cmR_k^* = c \gamma s l R_k^*,$$

mamy ostatecznie

$$\vartheta^{**}(x, t) = -4 \left[ \left( P_0 + \frac{\vartheta_0}{R_k} \right) R_k^* - \vartheta_0 \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{(2n-1)\pi T} \cdot e^{-\frac{t}{T_n}} \cdot \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l}. \quad (43)$$

### 2.3. Końcowa postać wyrażenia analitycznego opisującego stan cieplnie nieustalony.

Zgodnie z relacją (4) możemy napisać szukaną funkcję  $\vartheta(x, t)$  w jej ostatecznej postaci, a mianowicie:

$$\vartheta(x, t) = \vartheta^*(x) + \vartheta^{**}(x, t)$$

czyli

$$\vartheta(x, t) = \vartheta_0 + 4 \left[ \left( P_0 + \frac{\vartheta_0}{R_k} \right) R_k^* - \vartheta_0 \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{(2n-1)\pi T} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_n}} \right) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l}. \quad (44)$$

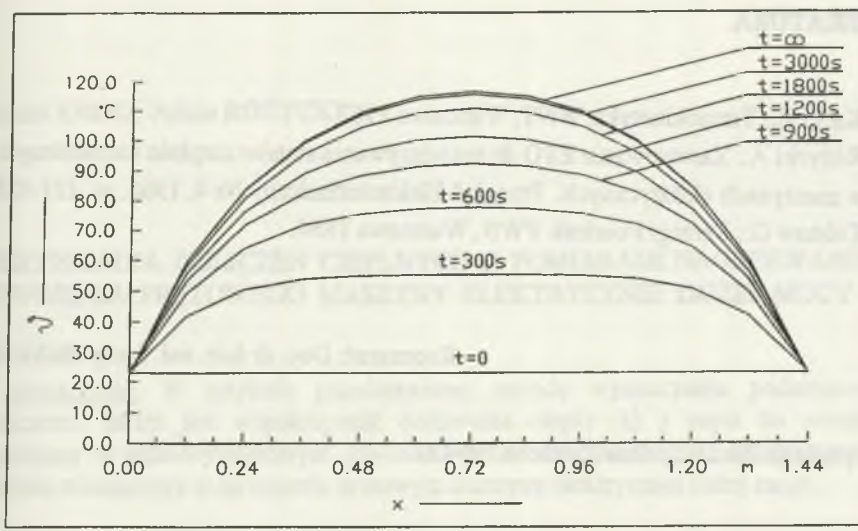
### 3. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Na rys. 2 podano obliczony ściśle metodą analityczną rozkład temperatury w stanie cieplnie nieustalonym w prętowym uzwojeniu maszyny elektrycznej dużej mocy, zaś na rys. 3 zależność temperatury w funkcji czasu w określonych punktach na długości pręta.

Obliczenia wykonano dla następujących danych :

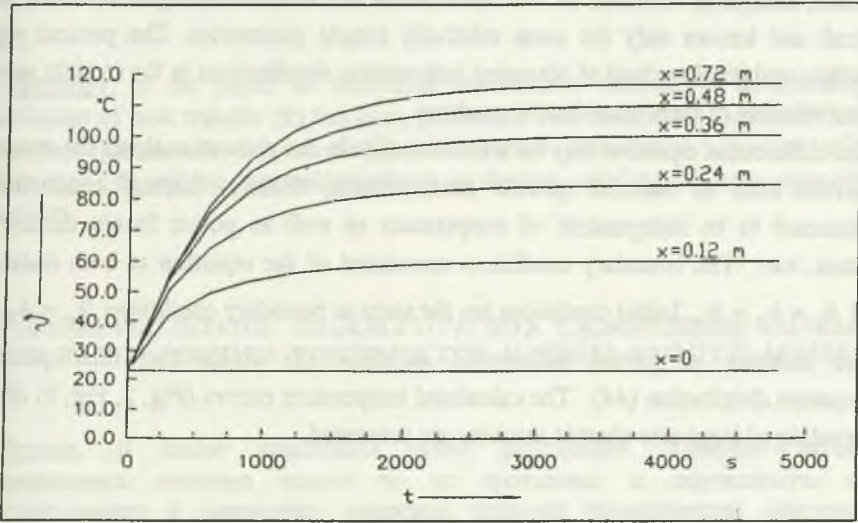
długość pręta	$l = 1,44\text{m}$
wysokość pręta	$h = 0,029\text{m}$
szerokość pręta	$b = 0,013\text{m}$
gęstość masy miedzi	$\gamma = 8930 \text{ kg / m}^3$
ciepło właściwe miedzi	$c = 399 \text{ W}\cdot\text{s/kg}\cdot\text{K}$
przewodność cieplna miedzi	$\lambda = 360 \text{ W/m}\cdot\text{K}$
cieplny współczynnik rezystancyjny miedzi	$\alpha = 0,00427 \text{ 1/K}$
współczynnik oddawania ciepła do otoczenia	$k = 25,5 \text{ W/ m}^2\cdot\text{K}$
prąd obciążenia	$I = 1800 \text{ A}$
temperatura początkowa	$\vartheta_p = \vartheta_0 = 22^\circ\text{C}$
temperatura otoczenia	$\vartheta_{ot} = \vartheta_0 = 22^\circ\text{C}$
temperatury na krawędziach bocznych pręta	$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_0 = 22^\circ\text{C}$





Rys. 2. Rozkład temperatury w stanie cieplnie nieustalonym w prętowym uzwojeniu maszyny elektrycznej dużej mocy przy  $I = 1800 \text{ A}$ ,  $k = 25,5 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$

Fig. 2. Temperature as a function of length of the straight part of the bar winding



Rys.3. Zależność temperatury w funkcji czasu w określonych punktach na długości uzwojenia przy  $I = 1800 \text{ A}$ ,  $k = 25,5 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$

Fig. 3. Temperature as a function of time in selected points of the length of bar winding

## LITERATURA

- [1] Kącki E.: Termokinetyka. WNT, Warszawa 1967.
- [2] Różycki A.: Zastosowanie ETO do rozwiązywania stanów cieplnie nieustalonych w maszynach elektrycznych. Przegląd Elektrotechniczny Nr 4, 1968, ss. 121-125.
- [3] Tołstow G.: Szeregi Fouriera. PWN, Warszawa 1954.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Jerzy Hickiewicz

Wpłynęło do Redakcji dnia 25 marca 1994 r.

## Abstract

Exact, analytical solutions of one dimensional transient thermal problems are very difficult and known only for some relatively simple geometries. The present paper describes analytical method of obtaining temperature distributions in the straight part of the bar winding of large size electric machine.

The differential equation may be written as (2). In the present analysis the material properties such as material specific heat, material density, thermal conductivity, are assumed to be independent of temperature as well as power losses density in constant, too. The boundary conditions associated of the equation at both ends are fixed  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_0$ . Initial conditions are the same as boundary conditions  $\vartheta_p = \vartheta_0$ .

The solution of partial differential equation (2) yields the time - position temperature distribution (44). The calculated temperature curves (Fig. 2, Fig. 3) of the bar winding of large size electric machine are presented.