

Krzysztof KLUSZCZYŃSKI

PRZESTRZEŃ ZEROWA ŹRÓDEŁ NAPIĘCIOWYCH W LINIOWYCH OBWODACH ELEKTRYCZNYCH

Streszczenie. Wykazano, że obwody elektryczne liniowe można podzielić na dwie klasy: obwody, w których wymiar przestrzeni liniowej prądów źródeł jest równy liczbie źródeł i obwody, w których jest mniejszy. Zależy to od grafu obwodu, liczby sił elektromotorycznych oraz ich rozmieszczenia. W obwodach klasy pierwszej dany rozptyw prądów jest wymuszony przez jeden i tylko jeden wektor sił elektromotorycznych. W obwodach klasy drugiej istnieje nieskończenie wiele takich wektorów.

ZERO SPACE OF VOLTAGE SOURCES IN LINEAR ELECTRICAL CIRCUITS

Summary. It is shown that electrical circuits can be divided into two classes: circuits in which the dimension of linear space of the currents of sources is equal to the number of electromotive forces - and circuits in which it is less. It depends on the graph of the circuit, the number of electromotive forces and their distribution. In circuits of the first class a current vector i and e.m.f. vector e are in one-to-one correspondence, in circuits of second class there are infinitely many of e.m.f. vectors which produce just the same current vector i .

НУЛЕВОЕ ПРОСТРАНСТВО ИСТОЧНИКОВ НАПРЯЖЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

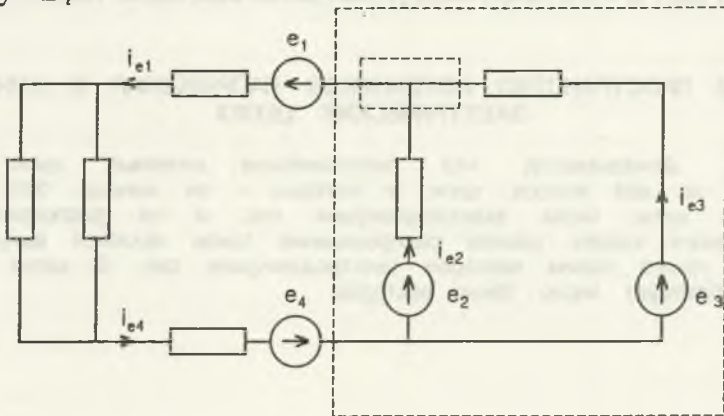
Резюме. Доказывается, что электрические линейные цепи можно разделить на два класса: цепи, в которых - он меньше. Это зависит от графа цепи, числа электродвижущих сил, и их расположения. В цепях первого класса данное распределение токов является вынужденным одним и только одним вектором электродвижущих сил. В цепях второго класса существует число таких векторов.

1. WYMIAR PRZESTRZENI, PRĄDÓW I ŹRÓDEŁ

Rozważmy płaską, mocno spójną i rozwiązalną liniową sieć elektryczną o g gałęziach, zawierającą n autonomicznych idealnych źródeł napięciowych: $e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t)$. Pośród prądów gałęziowych i_i ($i = 1, 2, \dots, g$) można wyróżnić n prądów źródeł, a więc prądów, płynących przez gałęzie, zawierające źródła napięciowe, które oznaczać będziemy przez i_{ek} ($k = 1, 2, \dots, n$) oraz $g-n$ prądów, związanych z gałęziami nie zawierającymi źródeł energii. Wymiar przestrzeni liniowej sił elektromotorycznych E , której elementami są wektory $[e(t)] = [e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t)]$, jest równy liczbie źródeł i wynosi n :

$$\dim E = n \quad (1)$$

Łatwo zauważyć, że wymiar przestrzeni prądów źródeł I_e , którą tworzą wektory $[i_e] = [i_{e1}, i_{e2}, \dots, i_{en}]$, może być w ogólnym przypadku niższy od wymiaru przestrzeni E , albowiem prądy źródeł nie mogą być dowolne: muszą przyjmować wartości zgodnie z równaniami ułożonymi na podstawie I prawa Kirchhoffa dla wszystkich, dających się wyodrębnić części sieci elektrycznej, łączących się z resztą obwodu wyłącznie poprzez gałęzie zawierające źródła. Przykładowo w obwodzie przedstawionym na rys.1 prądy źródeł spełniają równania Kirchhoffa dla dwóch konturów zaznaczonych linią przerywaną:



Rys. 1. Przykład obwodu elektrycznego o $\dim I_e = 2$

Fig. 1. Exemplary electrical circuit having $\dim I_e = 2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [i_{e1} \ i_{e2} \ i_{e3} \ i_{e4}]^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Jeśli w sieci o określonej strukturze topologicznej i zadanym rozmieszczeniu źródeł

napięciowych liczba ułożonych w taki sposób niezależnych liniowo równań wynosi k , wówczas:

$$\dim I_e = n - k \quad (3)$$

Postępowanie, prowadzące do wyodrębnienia wszystkich części obwodu, łączących się z resztą sieci tylko poprzez gałęzie, zawierające źródła można oprzeć na konstrukcji jednego z drzew sieci.

Z konstrukcji takiej wynikają następujące wnioski:

$$\text{jeśli } n \geq s, \text{ to } \dim I_e \leq n \quad (4)$$

$$\text{jeśli } n > s, \text{ to } \dim I_e \leq s \quad (5)$$

gdzie: s - liczba strun sieci.

Nierówność (4) przechodzi w równość tylko wówczas, gdy wszystkie źródła mieszczą się w dopełnieniu jednego z możliwych drzew sieci. Fakt, że w obwodach elektrycznych może zachodzić: $\dim I_e = n$ lub $\dim I_e < n$, posiada istotne znaczenie dla ich własności.

2. SKŁADOWA AKTYWNA I ZEROWA WEKTORA SIŁ ELEKTROMOTORYCZNYCH

Oznaczmy przez Y przekształcenie liniowe, którego dziedziną jest zbiór wektorów sił elektromotorycznych, a obrazem - zbiór wektorów prądów źródeł:

$$Y(e) = i_e \quad (6)$$

gdzie: $e \in E$, $i_e \in I_e$

Jeśli tylko $\dim I_e = k < n$, wówczas istnieje przestrzeń zerowa E_0 przekształcenia Y , czyli zbiór takich wektorów, których obrazem w przekształceniu Y jest wektor zerowy: $Y(e_0) = 0$ (7)

gdzie: $e_0 \in E_0^{n-k}$

Oznacza to, że przestrzeń wymuszeń E^n można przedstawić w postaci sumy prostej dwóch podprzestrzeni: podprzestrzeni zerowej E_0^{n-k} oraz jej ortogonalnego dopełnienia E_1^k , które jest tożsame z przestrzenią I_e :

$$E^n = E_0^{n-k} \oplus E_1^k = E_0^{n-k} \oplus I_e \quad (8)$$

gdzie: $E_0^{n-k} \perp E_1^k$

Z (8) wynika, że każdy wektor $e \in E^n$ można w każdej chwili czasowej t rozłożyć na dwa wzajemnie ortogonalne wektory składowe, z których pierwszy przynależy do

podprzestrzeni $E_{\perp}^k$, a drugi - do podprzestrzeni E_0^{n-k} :

$$e = e_{\perp} + e_0 \quad (9)$$

Nazwijmy składową $e_{\perp}$ składową aktywną wektora sił elektromotorycznych, a składową e_0 - składową zerową. Dla norm tych wektorów (gdzie: norma $\|e\| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2}$) zachodzi:

$$\|e\|^2 = \|e_{\perp}\|^2 + \|e_0\|^2, \quad (10)$$

$$\text{a stąd: } \|e_{\perp}\| \leq \|e\|, \quad (11)$$

przy czym równość ma miejsce tylko wówczas, gdy: $e_0 = 0$.

$$Z(7) \text{ i } (9) \text{ wynika, że: } i_e = Y(e) = Y(e_{\perp} + e_0) = Y(e_{\perp}) + Y(e_0) = Y(e_{\perp}) \quad (12)$$

W świetle relacji (11) i (12) oczywisty staje się sens fizyczny obu składowych wektora e . Składowa aktywna $e_{\perp}$ wektora e jest to wektor o najmniejszej normie, wywołujący taki sam rozpył prądów sieci jak rzeczywisty wektor e . Składowa zerowa e_0 wektora e jest to wektor sił elektromotorycznych wzajemnie równoważących się, nie wywołujących przepływu prądu w obwodzie.

3. KLASY OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH

W zależności od wymiaru przestrzeni I_e obwody elektryczne można podzielić na dwie klasy - obwody, dla których: $\dim I_e = n$ oraz obwody, dla których: $\dim I_e < n$. To, czy obwód należy do pierwszej czy drugiej klasy, zależy od topologii sieci, liczby źródeł napięciowych oraz od ich rozmieszczenia. Zgodnie z (5) do klasy drugiej należą m.in. wszystkie obwody, w których liczba źródeł przewyższa liczbę strun.

Obwody klasy pierwszej i drugiej różnią się własnościami energetycznymi. W obwodach elektrycznych klasy pierwszej ($\dim I_e = n$) dany rozpył prądów jest wywołany przez jeden i tylko jeden wektor sił elektromotorycznych. W obwodach klasy drugiej, spełniających warunek: $\dim I_e < n$, istnieje nieskończenie wiele wektorów sił elektromotorycznych o różnych normach, wywołujących identyczny rozpył prądów. Jeśli zadany rozpył prądów jest wymuszony przez wektor e , to jest również wymuszany przez każdy wektor o postaci $e + \lambda e_0$, gdzie: $\lambda \in \mathbb{R}$. Stąd też, w obwodach klasy drugiej celowe jest zbadanie, czy wektor sił elektromotorycznych, wymuszający dany rozpył prądów jest wektorem o minimalnej normie. Jeśli nie należy znaleźć taki wektor, czyli wyznaczyć składową aktywną $e_{\perp}$.

4. WYZNACZANIE SKŁADOWEJ AKTYWNEJ

Załóżmy, że rozważamy obwód klasy drugiej ($\dim I_e = n - k$, $\dim E_0 = k$), w którym prądy źródeł spełniają k niezależnych liniowo równań typu (2) o ogólnej postaci:

$$[c_{i1} \ c_{i2} \ \dots \ c_{in}][i_{e1} \ i_{e2} \ \dots \ i_{en}]^T = 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, k.$$

Powyższy układ jest jednorodnym układem równań liniowych. Jego rozwiązanie, zależne od $(n-k)$ parametrów prowadzi do wyznaczenia bazy podprzestrzeni aktywnej E_1^{n-k} . Bazę podprzestrzeni zerowej E_0^k stanowią wektory: $[c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in}]^T$ dla $i = 1, 2, \dots, k$. Zestawiając bazę podprzestrzeni aktywnej E_1^{n-k} z bazą podprzestrzeni zerowej E_0^k otrzymujemy nową bazę przestrzeni E^n . Rozkład wektora sił elektromotorycznych e w nowej bazie pozwala na wyznaczenie składowych: $e_\perp$ i e_0 . Składowa $e_\perp$ jest wektorem o najmniejszej normie, wymuszającym w obwodzie dany rozptyw prądów.

5. PRZYKŁAD

Jako przykład rozważmy obwód, przedstawiony na rys. 1. Załóżmy, że wartości sił elektromotorycznych są stałe i wynoszą $[e]^T = [e_1, e_2, e_3, e_4]^T = [2, 2, 4, 1]^T$ (13) Prądy źródeł spełniają układ równań (2), tak więc: $\dim E_0 = k = 2$ oraz $\dim E_1 = n - k = 2$. Bazę podprzestrzeni zerowej E_0^2 stanowią wektory: $[-1, 1, 1, 0]^T$ i $[-1, 0, 0, 1]^T$.

Rozwiązanie jednorodnego układu równań liniowych (2) ma postać

$$[e_{11}, e_{12}]^T = \lambda_1 [0, -1, 1, 0]^T + \lambda_2 [1, 1, 0, 1]^T \quad (14)$$

gdzie: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Wektory: $[0, -1, 1, 0]^T$ i $[1, 1, 0, 1]^T$ stanowią bazę podprzestrzeni E_1^2 . Rozkład wektora e (13) ma w nowej bazie następującą postać:

$$[e_1, e_2, e_3, e_4]^T = [2, 2, 4, 1]^T = \underbrace{\frac{11}{5}[0, -1, 1, 0]^T - \frac{12}{5}[1, 1, 0, 1]^T}_{\text{składowa aktywna}} + \underbrace{\frac{9}{5}[-1, 1, 0, 1]^T - \frac{7}{5}[-1, 0, 0, 1]^T}_{\text{składowa zerowa}} \quad (15)$$

$$\text{Ostatecznie: } [e]^T = [e_\perp]^T + [e_0]^T = \left[\frac{12}{5}, \frac{1}{5}, \frac{11}{5}, \frac{12}{5} \right]^T + \left[-\frac{2}{5}, \frac{9}{5}, \frac{9}{5}, -\frac{7}{5} \right]^T \quad (16)$$

Norma wektora wymuszenia e (13) wynosi $\|e\| = 5$. Składowa aktywna:

$$[e_\perp] = \left[\frac{12}{5}, \frac{1}{5}, \frac{11}{5}, \frac{12}{5} \right]^T \quad \text{o } \|e_\perp\| = 0,2\sqrt{410} \cong 4,05 \quad \text{jest wektorem o najmniejszej}$$

normie, wymuszającym taki sam rozptyw prądów jak wektor e . Siły elektromotoryczne, określone przez składową zerową: $[e_0] = \left[-\frac{2}{5}, \frac{9}{5}, \frac{9}{5}, -\frac{7}{5} \right]^T$ wzajemnie się równoważą i nie wymuszają przepływu prądów w obwodzie.

LITERATURA

1. Jefimow N.W., Rozendorn E.R.: Algebra liniowa wraz z geometrią wielowymiarową; PWN, Warszawa 1974 .
2. Kluszczyński K.: Składowe aktywne i zerowe prądów w obwodach elektromagnetycznych, Rozprawy Elektrotechniczne 1981, nr 27, z.3.
3. Kluszczyński K.: Decomposition of current vector into active and zero-component in magnetic circuit. Proc. of European Conference on Circuit Theory and Design, ECCTD 87 Paryż 1987, ss. 603-607.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Maciej Siwczyński

Wpłynęło do Redakcji 25 marca 1994 r.

Abstract

It was shown that electrical circuits can be divided into two classes: circuits in which the dimension of linear space of the currents of the sources is equal to the number of electromotive forces and - circuits in which it is less. It depends on the graph of a circuit, the number of electromotive forces and their distribution. In a circuit of the first class a current vector i and e.m.f. vector e are in one-to-one correspondence, which means that the given distribution of currents can be generated by only one set of electromotive forces. In circuits of the second class there are infinitely many of e.m.f. vectors which produce just the same current vector i . So, in such circuits, e.m.f. vector can be divided, in the unique way into two orthogonal components: active component e_a and zero component e_0 (eqn.(9)). The active component e_a of an e.m.f. vector e is the vector of the least norm generating the same currents in circuit as the real vector e (eqn.(11), (12)). The zero component e_0 of an e.m.f. vector e does not generate currents in the circuit (eqn.(7)). In the paper the method which enables us to determine active and zero components of an e.m.f. vector e is presented. The example of a circuit of second order (Fig.1) is considered.