ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994
Seria: AUTOMATYKA z.114 Nr kol. 1250

Jerzy KLAMKA
Politechnika Śląska

STEROWANIE Z MINIMALNĄ ENERGIĄ UKŁADAMI CIĄGŁO-DYSKRETNYMI

Streszczenie: W pracy sformułowano oraz rozwiązano problem sterowania z minimalną energią dla liniowych stacjonarnych układów dynamicznych typu 2-D ciągło-dyskretnych. Rozwiązanie zagadnienia sterowania z minimalną energią uzyskano przy założeniu lokalnej sterowalności w ustalonym prostokącie układu dynamicznego typu 2-D ciągło-dyskretnego. Otrzymane rezultaty stanowią uogólnienie na przypadek układów dynamicznych typu 2-D ciągło-dyskretnych wcześniejszych wyników dotyczących dyskretnych układów dynamicznych typu 2-D.

MINIMUM ENERGY CONTROL OF CONTINUOUS-DISCRETE DYNAMICAL SYSTEMS

Summary: In the paper minimum energy control problem for linear time-invariant discrete-continuous 2-D dynamical systems has been formulated and completely solved. This solution has been derived under the assumption that 2-D discrete-continuous dynamical system is locally controllable in a given rectangular. The obtained results are generalization to the case of linear discrete-continuous 2-D dynamical systems, of the previous solutions of minimum energy control problems for different kinds of discrete 2-D dynamical systems.

MINIMUM-ENERGIE-STEUERUNG FÜR KONTINUIERLICHE-DISKRETE DYNAMISCHE SYSTEME

Zusammenfassung: In der Arbeit wird das Problem der Minimum-Energie-Steuerung für lineare kontinuierliche-diskrete dynamische Systeme mit zeitinvarianten Koeffizienten vorgestellt. Es werden die lokale Steuerbarkeit auf bestimmten Rechteck und die notwendige und ausreichende Bedingung für Steuerbarkeit definiert. Die genaue Lösung für das Problem der Minimum-Energie-Steuerung wird präsentiert. Diese Arbeit bildet eine Verallgemeinerung von früheren Veröffentlichungen zum Thema: Minimum-Energie-Steuerung.

1. Wprowadzenie

Zagadnienie sterowania z minimalną energią różnego typu układami dynamicznymi rozpatrywane było w literaturze wielokrotnie [3],[4],[7],[8],[9]. Problem ten polega na wyznaczeniu postaci sterowania przeprowadzającego zadany stan początkowy układu dynamicznego do żądanego stanu końcowego w ustalonym czasie. Tak sformułowane zagadnienie może posiadać rozwiązanie dla dowolnych stanów początkowych oraz końcowych jedynie przy dodatkowym założeniu sterowalności rozpatrywanego układu dynamicznego [7],[9],[10]. Tak więc przed przystąpieniem do rozwiązywania problemu sterowania z minimalną energią należy sformułować efektywne kryteria badania sterowalności rozpatrywanego układu dynamicznego.

W niniejszej pracy sformułowane zostanie zagadnienie sterowania z minimalną energią dla liniowego stacjonarnego dyskretno-ciągłego układu dynamicznego typu 2-D to znaczy dla układu dynamicznego opisanego uporządkowanym zbiorem równań różniczkowych zwyczajnych liniowych o stałych współczynnikach [1],[2],[3],[4],[5].

W ostatnim okresie w związku z możliwymi licznymi aplikacjami tego typu układy dynamiczne rozpatrywane były w wielu publikacjach [3],[5],[6],[12]. W pracach [5] oraz [6] wyprowadzono ogólny wzór na postać rozwiązania dla liniowego dyskretno-ciągłego układu typu 2-D ze stałymi współczynnikami oraz zadanymi niezerowymi warunkami początkowymi i brzegowymi. Publikacja [2] zawiera warunki konieczne i wystarczające lokalnej sterowalności w zadanym prostokącie dla liniowego dyskretno-ciągłego układu dynamicznego typu 2-D, przy założeniu, że sterowania są funkcjami przedziałami stałymi. Natomiast w pracy [8] sformułowano i udowodniono warunki konieczne i wystarczające lokalnej sterowalności w ustalonym prostokącie lecz przy założeniu, że sterowania są funkcjami całkowalnymi z kwadratem w zadanym obszarze. Warunki te zostaną dokładnie przedstawione w następnych rozdziałach. W pracy [3] rozwiązano zagadnienie sterowania z minimalną energia dla liniowego dyskretno-ciągłego układu typu 2-D, lecz przy dodatkowym założeniu, że sterowania są przedziałami stałymi funkcjami czasu.

W niniejszej pracy rozwiązane zostanie zagadnienie sterowania z minimalną energią takim samym układem dynamicznym jak w pracy [3], lecz bez dodatkowych założeń ograniczających klasę sterowań dopuszczalnych. Rozwiązanie tego problemu uzyskane zostanie w oparciu o warunki konieczne i wystaczające lokalnej sterowalności w ustalonym prostokącie w klasie sterowań dopuszczalnych będacych funkcjami całkowalnymi z kwadratem. Warunki te wraz z dowodami zostały opublikowane w pracy [8].

Należy wyraźnie podkreślić, że zarówno kryteria lokalnej sterowalności, jak i rozwiązanie zadania sterowania z minimalną energią w istotny sposób zależą od wybranej przestrzeni sterowań dopuszczalnych. W przypadku sterowań przedziałami stałych warunki lokalnej sterowalności są bardziej restryktywne w odniesieniu do układu dynamicznego, gdyż przestrzeń sterowań dopuszczalnych jest mniejsza niż w przypadku sterowań całkowalnych z kwadratem. Podobnie także rozwiązania zagadnienia sterowania z minimalną energią w istotny sposób zależą od tego, jaka jest klasa sterowań dopuszczalnych. Tak więc postać sterowania z minimalną energią uzyskana w niniejszej pracy dla przypadku sterowań całkowalnych z kwadratem jest różna od postaci sterowania z minimalną energią otrzymaną w publikacji [3] dla takiego samego układu dynamicznego, ale przy założeniu że sterowania dopuszczalne są przedziałami stałymi funkcjami czasu.

2. Model matematyczny układu

Niech będzie dany liniowy dyskretno-ciągły układ dynamiczny o stałych współczynnikach opisany następującymi równaniami różniczkowymi zwyczajnymi

$$x'_{k+1}(t) = A_0x_k(t) + A_1x_{k+1}(t) + Bu_k(t) \tag{1}$$

określonymi dla $t \in R^+$ oraz $k \in Z^+$,

gdzie R^+ jest zbiorem nieujemnych liczb rzeczywistych,

Z^+ jest zbiorem nieujemnych liczb całkowitych,

$x_k(t) \in R^n$ jest wektorem stanu,

$u_k(t) \in R^m$ jest wektorem sterowań,

A_0, A_1 oraz B są stałymi macierzami o odpowiednich wymiarach.

W celu wyznaczenia rozwiązania układu równań różniczkowych (1) należy zadać warunki brzegowe postaci następującej

$$x_0(t) = p(t) \quad \text{dla} \quad t \in R^+ \quad \text{oraz} \quad x_k(0) = q(k) \quad \text{dla} \quad k \in Z^+ \tag{2}$$

gdzie $p(t)$ oraz $q(k)$ są danymi funkcjami takimi, że $p(0) = q(0)$.

Ponadto zakłada się, że sterowania dopuszczalne są całkowalnymi z kwadratem wektorowymi funkcjami czasu, tzn. $u_k \in L_2([0,\infty),R^m)$.

W dalszej części pracy układ dynamiczny opisany równaniami (1) rozpatrywany będzie w następującym prostokącie:

$$[M,N] = \{ (t,k) \in R^+ \times Z^+ : 0 \le t \le M ,\ 0 \le k \le N \} \tag{3}$$

Wykorzystując rezultaty przedstawione w pracach [2],[3],[5] oraz [8] można podać ogólną postać rozwiązania układu równań (1)

$$x_k(t) = \exp(A_1(t))q(k) + \sum_{i=0}^{i=k-1} (H^i(t)q(i) + G_t^i(p(s))) + \sum_{i=0}^{i=k-1} C_t^i(u_i(s)) \tag{4}$$

gdzie $H^i(t)$ jest $n \times n$ -wymiarową macierzą określoną następującym wzorem

$$H^i(t) = \int_0^t \exp(A_1(t-s_1))A_0 \int_0^{s_1} \exp(A_1(s_1-s_2))A_0 \int_0^{s_2} \exp(A_1(s_2-s_3))\ldots$$
$$\ldots A_0 \int_0^{s_{k-i-1}} \exp(A_1(s_{k-i-1}-s_{k-i}))A_0 \exp(A_1 s_{k-i})ds_{k-i-1}\ldots ds_1 \tag{5}$$

Natomiast $G_t^i(p(s)) : L_2([0,t],R^n) \to R^n$ jest liniowym ograniczonym operatorem zdefiniowanym w sposób następujący:

$$G_t^i(p(s)) = \int_0^t \exp(A_1(t-s_1))A_0 \int_0^{s_1} \exp(A_1(s_1-s_2))A_0 \int_0^{s_2} \exp(A_1(s_2-s_3))\ldots$$
$$\ldots A_0 \int_0^{s_{k-1}} \exp(A_1(s_{k-1}-s_k))A_0 p(s_k)ds_k ds_{k-1}\ldots ds_1 \tag{6}$$

$C_t^i : L_2([0,t],R^m) \to R^n$ jest liniowym ograniczonym operatorem określonym następującym wzorem

$$C_t^i(u_i(t)) = \int_0^t \exp(A_1(t-s_1))A_0 \int_0^{s_1} \exp(A_1(s_1-s_2))A_0 \int_0^{s_2} \exp(A_1(s_2-s_3))\ldots$$
$$\ldots A_0 \int_0^{s_{k-i-1}} \exp(A_1(s_{k-i-1}-s_{k-i}))Bu_i(s_{k-i})ds_{k-i}ds_{k-i-1}\ldots ds_1 \tag{7}$$

Ponieważ układ dynamiczny (1) jest układem liniowym, więc jego rozwiązanie dane wzorem (4) zależy liniowo zarówno od warunków brzegowych, jak i od sterowania.

3. Lokalna sterowalność układu

W niniejszym rozdziale przytoczony zostanie bez dowodu znany z literatury warunek konieczny i wystarczający lokalnej sterowalności układu dynamicznego (1) w ustalonym prostokącie [8]. Założenie o lokalnej sterowalności układu dynamicznego (1) odgrywa bardzo ważną rolę przy formułowaniu i rozwiązywaniu zadania sterowania z minimalną energią.

Definicja 1

Układ dynamiczny (1) nazywa sią lokalnie sterowalnym w prostokącie *[M,N]* jeżeli dla dowolnych warunków brzegowych (2) oraz dowolnego wektora $x_f \in R^n$ istnieją sterowania $u_i(t) \in L_2([0,M],R^m)$, $i \in [0,N-1]$ takie, że zachodzi następujący warunek :

$$x_N(M) = x_f \tag{8}$$

Twierdzenie 1

Układ dynamiczny (1) jest lokalnie sterowalny w prostokącie *[M,N]* wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następujący warunek

$$rzad\,|\,W_0 \mid W_1 \mid \ldots \mid W_i \mid \ldots \mid W_{N-1}\,| = n \tag{9}$$

gdzie $W_i = C_M^i (C_M^i)^*$, $i = 0,1,2,\ldots N-1$ są $n \times n$ - wymiarowymi stałymi symetrycznymi macierzami, natomiast $(C_M^i)^* : R^n \to L_2([0,M],R^m)$, $i = 0,1,2,\ldots N-1$ są operatorami sprzężonymi określonymi w sposób następujący:

$$\begin{aligned}(C_M^i)^* = B^T \exp(A_1^T(s_{k-i-1} - s_{k-i}))A_0^T \exp(A_1^T(s_{k-i-2} - s_{k-i-1}))\ldots \\ \ldots A_0^T \exp(A_1^T(s_1 - s_2))A_0^T \exp(A_1^T(t - s_1))\end{aligned} \tag{10}$$

Pełny dowód twierdzenia 1 zamieszczony jest w publikacji [8].

4. Sterowanie z minimalną energią

Niech będzie dany liniowy układ dyskretno-ciągły postaci (1) z warunkami brzegowymi (2). Dodatkowo zakłada się, że układ ten jest lokalnie sterowalny w zadanym prostokącie *[M,N]*. Ponadto określony jest wskaźnik jakości następującej postaci:

$$J(u_0(t),u_1(t),\ldots,u_i(t),\ldots,u_{N-1}(t)) = J(u) = \sum_{i=0}^{i=N-1} u_i^T(t)Qu_i(t) \tag{11}$$

gdzie Q jest $m \times m$ -wymiarową, symetryczną, dodatnio określoną macierzą.

Problem sterowania z minimalną energią można sformułować następująco: dany jest lokalnie sterowalny układ dynamiczny (1) z warunkami (2) oraz wskaźnikiem jakości (11). Należy wyznaczyć sekwencję sterowań $\{u_0(t),u_1(t),\ldots,u_i(t),\ldots,u_{N-1}(t)\}$ przeprowadzających układ dynamiczny (1) z dowolnych warunków brzegowych postaci (2) do zadanego stanu końcowego $x_f = x_N(M)$ oraz minimalizujących wskaźnik jakości (11). Należy zaznaczyć, że bez założenia o lokalnej sterowalności układu dynamicznego (1) rozwiązanie tak postawionego zadania sterowania optymalnego nie zawsze jest możliwe, gdyż wówczas pewne podprzestrzenie liniowe stanów końcowych nie są przez układ dynamiczny (1) osiągalne. Wskaźnik jakości (11) reprezentuje ważoną energię sekwencji sterowań.

W celu efektywnego rozwiązania zadania sterowania z minimalną energia definiuje się następującą macierz:

$$W_Q = \sum_{i=0}^{i=N-1} W_{Q,i} = \sum_{i=0}^{i=N-1} C_M^i Q (C_M^i)^* \tag{12}$$

gdzie $W_{Q,i}$, $i=0,1,2,\ldots,N-1$ są $n \times n$ -wymiarowymi symetrycznymi i dodatnio określonymi macierzami o postaci następującej:

$$\begin{aligned} W_{Q,i} = & \int_0^M \exp(A_1(M-s_1))A_0 \int_0^{s_1} \exp(A_1(s_1-s_2))A_0 \int_0^{s_2} \exp(A_1(s_2-s_3)) \ldots \\ & \ldots A_0 \int_0^{s_{N-i-1}} \exp(A_1(s_{N-i-1}-s_{N-i}))BQB^T \exp(A_1^T(s_{N-i-1}-s_{N-i}))A_0^T \ldots \\ & \ldots \exp(A_1^T(s_2-s_3))A_0^T \exp(A_1^T(s_1-s_2))A_0^T \exp(A_1^T(M-s_1)) ds_{N-i} ds_{N-i-1} \ldots ds_1 \end{aligned} \tag{13}$$

Należy zaznaczyć, że lokalna sterowalność układu dynamicznego (1) w prostokącie *[M,N]* jest równoważna odwracalności macierzy W_Q.

Dla skrócenia zapisu wprowadza się następujące oznaczenie :

$$x_b = \exp(A_1 M) q(N) + \sum_{i=0}^{i=N-1} (H^i(M) q(i) + G_M^i(p(s)) \tag{14}$$

Wektor $x_b \in R^n$ zależy wyłącznie od warunków brzegowych (2).

Wykorzystując wprowadzone wcześniej symbole i oznaczenia definiuje się sterowanie o postaci następującej:

$$u_i^0(t) = Q^{-1}(C_M^i)^* W_Q^{-1}(x_f - x_b) \qquad dla \quad i=0,1,2,\ldots,N-1 \quad oraz \quad t \in [0,M] \tag{15}$$

Obecnie sformułowane zostanie zasadnicze twierdzenie rozwiązujące efektywnie zagadnienie sterowania z minimalną energią układem dynamicznym (1).

Twierdzenie 2

Jeżeli układ dynamiczny (1) jest lokalnie sterowalny w danym prostokącie *[M,N]*, wówczas sterowanie zdefiniowane wzorem (15) przeprowadza układ dynamiczny (1) z zadanych warunków brzegowych (2) do żądanego stanu końcowego o postaci wektora $x_f \in R^n$ w punkcie *[M,N]*, oraz minimalizuje wskaźnik jakości (11).

Ponadto odpowiadająca temu sterowaniu minimalna wartość wskaźnika jakości wyraża się następującym wzorem :

$$J(u_0^0(t),u_1^0(t),\dots,u_i^0(t),\dots,u_{N-1}^0(t)) = J(u^0) = (x_f - x_b)^T W_Q^{-1}(x_f - x_b) \tag{16}$$

Dowód

Dowód twierdzenia składa się z trzech zasadniczych części, a mianowicie :

1) wykazania, że sterowanie określone wzorem (15) przeprowadza układ dynamiczny (1) z zadanych warunków brzegowych (2) do żądanego stanu końcowego x_f,
2) wykazania,że sterowanie określone wzorem (15) minimalizuje wskaźnik jakości dany zależnością (11),
3) wykazania prawdziwości wzoru (16) określającego minimalną wartość optymalnego sterowania określonego relacją (15).

ad 1) Podstawiając relację (15) do wzoru na ogólną postać rozwiązania (4) oraz wykorzystując wprowadzone oznaczenia (7),(12) i (13) uzyskuje się następujące równości:

$$x_N(M) = x_b + \sum_{i=0}^{i=N-1} C_M^i(u_i^0(t)) = x_b + \sum_{i=0}^{i=N-1} C_M^i Q^{-1}(C_M^i)^* W_Q^{-1}(x_f - x_b) =$$
$$= x_b + W_Q W_Q^{-1}(x_f - x_b) = x_b + x_f - x_b = x_f$$

Zatem sterowanie dane relacją (15) przeprowadza układ dynamiczny (1) z zadanych warunków brzegowych (2) do żądanego stanu końcowego x_f.

ad 2) W celu wykazania,że sterowanie dane wzorem (15) minimalizuje wartość wskaźnika jakości (11),załóżmy,że $u^d(t)$ jest dowolnym innym sterowaniem również realizującym przejście od zadanych warunków brzegowych (2) do żądanego stanu końcowego x_f. Zatem na mocy relacji (4) zachodzi następująca równość:

$$\sum_{i=0}^{i=N-1} C_M^i(u_i^d(t) - u_i^0(t)) = 0 \tag{17}$$

Zatem prawdziwa jest następująca relacja :

$$\sum_{i=0}^{i=N-1} C_M^i(u_i^d(t) - u_i^0(t)) = 0 \tag{18}$$

Na podstawie zależności (15) oraz (18) uzyskuje się równości :

$$\sum_{i=0}^{i=N-1}(u_i^d(t)-u_i^0(t))^T(C_M^i)^*W_Q^{-1}(x_f-x_b)=\sum_{i=0}^{i=N-1}(u_i^d(t)-u_i^0(t))^TQu_i^0(t)=0 \tag{19}$$

Wykorzystując równość (19) otrzymuje się następujące zależności:

$$\sum_{i=0}^{i=N-1}u_i^d(t)^TQu_i^d(t)=\sum_{i=0}^{i=N-1}u_i^0(t)^TQu_i^0(t)+\sum_{i=0}^{i=N-1}(u_i^d(t)-u_i^0(t))^TQ(u_i^d(t)-u_i^0(t)) \tag{20}$$

Ponieważ ostatni składnik po prawej stronie równości (20) jest zawsze nieujemny, więc biorąc pod uwagę postać wskaźnika jakości (11) natychmiast otrzymuje się następującą nierówność:

$$J(u^d)\geq J(u^0) \tag{21}$$

Zatem sterowanie dane wzorem (15) minimalizuje wskaźnik jakości (11).

ad 3) Wyprowadzenie zależności (16) polega na podstawieniu optymalnego sterowania o postaci (15) do wzoru (11) określającego wskaźnik jakości. Stąd otrzymuje się następujące równości:

$$J(u^0)=\sum_{i=1}^{i=N-1}\int_0^M u_i^T(t)Qu_i(t)dt=\sum_{i=0}^{i=N-1}\int_0^M(Q^{-1}(C_M^i)^*W_Q^{-1}(x_f-x_b))^TQQ^{-1}(C_M^i)^*W_Q^{-1}(x_f-x_b)dt=$$

$$=\sum_{i=0}^{i=N-1}\int_0^M(x_f-x_b)^TW_Q^{-1}C_M^iQ^{-1}(C_M^i)^*W_Q^{-1}(x_f-x_b)dt=$$

$$=(x_f-x_b)^TW_Q^{-1}\sum_{i=0}^{i=N-1}\int_0^M C_M^iQ^{-1}(C_M^i)^*dt\,W_Q^{-1}(x_f-x_b)=(x_f-x_b)^TW_Q^{-1}(x_f-x_b)$$

Zatem wzór (16) określający optymalne sterowanie został wyprowadzony, co jednocześnie kończy dowód całego twierdzenia.

6. Przypadek szczególny

W niniejszym rozdziale rozpatrzymy przypadek szczególny liniowego dyskretno-ciągłego układu dynamicznego (1), dla którego macierz A_1 jest zerowa. Rozpatrzmy zatem układ dynamiczny opisany następującymi równaniami:

$$\dot{x}_{k+1}(t)=A_0x_k(t)+Bu_k(t)\quad,\ t\in R^+\quad,k\in Z^+ \tag{22}$$

Warunki brzegowe dla równania (22) mają postać (2), a więc są takie same jak w przypadku układu dynamicznego (1).

Wykorzystując zależności przedstawione w rozdziale 2 można stosunkowo prosto wyrazić rozwiązanie równania (22) za pomocą oznaczeń wprowadzonych uprzednio.

$$x_k(t) = A_0^k \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{k-1}} p(s_1) ds_1 ds_2 \dots ds_k + \\ + \sum_{i=0}^{i=k-1} \left[\frac{(A_0 t)^i}{i!} q(k-i) + A_0^{k-i-1} B \int_0^t \int_0^{s_k} \dots \int_0^{s_{i+2}} u_i(s_{i+1}) ds_{i+1} \dots ds_k \right] \tag{23}$$

Liniowy operator $C_M^i : L_2([0,M], R^m) \to R^n$ ma w tym szczególnym przypadku następującą postać:

$$C_M^i(u_i(t)) = A_o^{k-i-1} B \int_0^M \int_0^{s_k} \dots \int_0^{s_{i+2}} u_i(s_{i+1}) ds_{i+1} \dots ds_k \tag{24}$$

Zatem operator sprzężony jest dany wzorem:

$$(C_M^i)^* = B^T (A_0^{k-i-1})^T \frac{M^{k-i-1}}{(k-i-1)!} \tag{25}$$

Wykorzystując zależności (24) oraz (25) można podać wzór na macierze W_i, $i=0,1,2,\dots,N-1$, a mianowicie

$$W_i = A_0^{k-i-1} B B^T (A_0^{k-i-1})^T \frac{M^{k-i-1}}{(k-i-1)!} \tag{26}$$

Zatem biorąc pod uwagę zależności podane w rozdziale 3 oraz 4 można podać formułę określającą macierz W_Q.

$$W_Q = \sum_{i=0}^{i=N-1} \frac{M^{N-i-1}}{(N-i-1)!} A_0^{N-i-1} B Q^{-1} B^T (A_0^{N-i-1})^T \tag{27}$$

W rozpatrywanym szczególnym przypadku wektor x_b przyjmuje następującą stosunkowo prostą postać:

$$x_b = A_0^{N-1} \int_0^M \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_2} p(s_1) ds_1 ds_2 \dots ds_{N-1} + \sum_{i=0}^{i=N-1} \frac{(A_0 M)^i}{i!} q(k-i) \tag{28}$$

Wykorzystując zależności (25),(26),(27),(28) oraz twierdzenie 2 można podać rozwiązanie zadania sterowania z minimalną energią dla układu dynamicznego (22).

Wniosek

Sterowanie z minimalna energia dla układu dynamicznego (22) jest dane zależnością (4) z modyfikacjami wynikającymi ze wzorów (25),(26),(27) oraz (28).

6. Podsumowanie

W artykule przedstawiono rozwiązanie zadania sterowania z minimalną energią dla liniowego dyskretno-ciągłego układu dynamicznego o stałych współczynnikach. Przy rozwiązywaniu tego zagadnienia wykorzystano metody teorii operatorów liniowych oraz rachunku macierzowego. W rezultacie otrzymano postać sterowania minimalno-energetycznego oraz wzór określający minimalną wartość energii sterowania. Przy wyznaczaniu rozwiązania istotną rolę odgrywa lokalna sterowalność układu dynamicznego w ustalonym prostokącie. Z tego względu w pracy zamieszczono również podstawową definicję oraz warunek konieczny i wystarczający lokalnej sterowalności. Warunek ten polega na badaniu rzędu pewnej odpowiednio zdefiniowanej macierzy sterowalności lokalnej.

W pracy rozpatrzono także pewien przypadek szczególny dyskretno-ciągłego układu dynamicznego, dla którego jedna z macierzy jest zerowa. W tym szczególnym przypadku wzory określające sterowanie minimalno-energetyczne znacznie się upraszczają i swoją formą są zbliżone do klasycznych wzorów obowiązujących dla liniowych ciągłych układów dynamicznych.

Uzyskane w pracy rezultaty można stosunkowo łatwo uogólnić na przypadek liniowych dyskretno-ciągłych układów dynamicznych ze zmiennymi w czasie współczynnikami. Wymaga to jedynie wprowadzenia znanej z literatury macierzy tranzycji stanu [4]. Natomiast struktura podstawowych wzorów nie ulega w tym przypadku żadnym istotnym zmianom. Innym możliwym kierunkiem uogólmień jest rozpatrzenie liniowych .singularnych dyskretno-ciągłych układów dynamicznych.

LITERATURA

[1] Kaczorek T.:Singular 2-D continuous-discrete linear systems. Bulletin Polish Academy of Sciences,Technical Sciences,Electronics and Electrotechnics,vol.42,no.1,1994,(w druku).

[2] Kaczorek T.:Reachability and controllability of 2-D continuous-discrete linear systems, IEEE Transactions on Automatic Control ,(w druku)

[3] Kaczorek T.:Minimum energy control of 2-D continuous-discrete linear systems. Materiały Konferencji SPETO 1994 (w druku).

[4] Kaczorek T.:Local controllability and minimum energy control of continuous 2-D linear systems with variable coefficients. Multidimensional Systems and Signal Processing. (w druku).

[5] Kaczorek T.:Wyznaczanie odpowiedzi oraz osiągalność i sterowalność układów ciągło-dyskretnych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Automatyka,1994, (w druku).

[6] Kaczorek T.:Local controllability and minimum energy control of continuous 2-D linear systems. Bulletin Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, (w druku).

[7] Klamka J.:Controllability of Dynamical Systems. Kluwer Academic Publishers, Holandia, 1991.

[8] Klamka J.:Controllability of 2-D continuous-discrete linear systems.Materiały Konferencji SPETO 1994 (w druku).

[9] Klamka J., Kaczorek T.:Local controllability and minimum energy control of n-D linear systems. Bulletin Polish Academy of Sciences.Technical Sciences.vol.35,no.11-12,1987, str.679-685.

[10] Klamka J.,Kaczorek T.:Minimum energy control of 2-D linear systems with variable coefficients. International Journal of Control, vol.44, no.3, 1986. str.645-650.

[11] Kurek J.:The general state space model for a two-dimensional linear digital system. IEEE Transactions on Automatic Control, vol.AC-30,no.4, 1985, str.600-602.

[12] Kurek J.,Zaremba M.:Iterative learning control synthesis on 2-D system theory. IEEE Transactions on Automatic Control, vol.AC-38, no.1, 1993, str.121-125.

Recenzent: Prof. dr hab. inż Tadeusz Kaczorek

Wpłynęło do Redakcji do 30.04.1994 r.

Abstract

In the paper general mathematical model of linear continuous-discrete dynamical systems with constant coefficients is introduced. This model is represented by the set of linear differential equations with constant coefficients and with appropriate defined boundary conditions. Using standard pure algebraic approach general response formula to the regular continuous-discrete model is derived. The obtained solution depends linearly on boundary conditions and on controls functions.

It is generally assumed, that the admissible controls are square-integrable functions in some given finite time interval.Moreover, it is assumed, that the dynamical system is locally controllable in a given rectangle, i.e. it can be steered to an arbitrary final state using the admissible controls. The necessary and sufficient condition for local controllability in a given rectangle is presented without proof. This condition is a matrix-type condition and it is similar to the standard controllability condition. The concept of local controllability in a given rectangle plays an important role in minimum energy control problem.

The minimum energy control problem for linear continuous-discrete dynamical sysytem can be defined as follows: for a given mathematical model and boubdary conditions it is necessary to find a control function which steers our dynamical system to a desired final state and moreover,minimizes special quadratic performance index. This performance index represents the weighted energy of controls. In the paper,using the general pure algebraic approach, the minimum control problem for linear continuous-discrete dynamical sysytem with constant coefficients has been completely solved. This solution of the minimum control problem contains analytical formula for optimal control and moreover, gives the simple equality for the minimum value of the control energy. The solution of this problem has been obtained under the asssumption,that our dynamical system is locally controllable in a given rectangle and moreover, there are no any restrictions posed on the controls and trajectory .

The minimum energy control results givern in the paper extend to the case of square-integrable controls the previous results derived for piecewise constant controls. It should be pointed out, that it is possible to generalize these results in order to cover the case of linear singular continuous-discrete dynamical sysytems or systems with variable coefficients.