ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994
Seria: AUTOMATYKA z.114 Nr kol. 1250

Krzysztof PIEŃKOSZ, Eugeniusz TOCZYŁOWSKI
Instytut Automatyki Politechniki Warszawskiej

WYKORZYSTANIE METOD AGREGACJI DO WYZNACZANIA PORCJI PRODUKCYJNYCH

Streszczenie: W pracy przedstawiono metodologię wykorzystania metod i technik agregacji do rozwiązywania ogólnego, minimalnokosztowego problemu harmonogramowania produkcji porcjami, w którym uwzględnia się ograniczenia na wielkość produkcji i stan zapasów wyrobów.

AN APPLICATION OF AGGREGATION METHODS TO LOT SIZE SCHEDULING

Summary: The paper considers a methodology of application of aggregation and disaggregation of a family of similar items into a single aggregate product in a general single-stage dynamic capacitated lot size scheduling problem with limited upper bounds on inventory and production levels.

AUSNUTZUNG DER AGREGATIONSMETHODEN ZUR BESTIMMUNG DER PRODUKTIONSPARTIEN

Zusammenfassung: Im Beitrag wird die Methodologie der Ausnutzung der Aggregationsmethoden zur Lösung des Problems der Harmonogrammbildung für die Produktion in Partien vorgestellt. In diesem Problem werden die Produktions- und Vorratsrestriktionen berücksichtigt.

1. Wprowadzenie

W pracy jest rozważane zagadnienie harmonogramowania produkcji w systemie, w którym zmiana produkowanego typu wyrobu wymaga przezbrojeń jednostek wytwórczych, np. zmiany oprzyrządowania, co powoduje dodatkowe koszty oraz zużycie zasobów. W celu zredukowania liczby przezbrojeń produkcja realizowana jest w porcjach, tzn. przez określony przedział czasu jest wytwarzana pewna porcja jednego typu wyrobów, po czym następuje przezbrojenie, produkowana jest porcja kolejnego typu wyrobów itd. Problem polega na wyznaczeniu wielkości porcji wyrobów i ustaleniu terminów rozpoczęcia ich produkcji, tak aby - przy ograniczonych środkach wytwórczych - zaspokoić zapotrzebowania klientów oraz minimalizować koszty związane z produkcją, przezbrojeniami i magazynowaniem. W praktycznych przypadkach pojawiają się trudności w rozwiązywaniu takich zadań wynikające, zarówno z samej strukturalnej złożoności problemów (są to problemy $\mathcal{NP}$-trudne), jak również z bardzo dużej liczby wyrobów i ograniczeń, jakie w rzeczywistych sytuacjach należy uwzględnić podczas harmonogramowania.

Rozważane w pracy podejście polega na wyznaczaniu harmonogramu poprzez agregację problemu pierwotnego, rozwiązanie problemu zagregowanego i dezagregację rozwiązania zagregowanego. Takie podejście było stosowane przez wielu autorów [1, 2, 4, 5, 9]. Umożliwia ono redukcję wymiarów modeli harmonogramowania i w rezultacie ich uproszczenie. Agregacja polega na grupowaniu produktów według ich podobieństwa technologicznego i zastępowaniu wyrobami zagregowanymi. W praktyce agregacja często przeprowadzana jest w sposób niejawny już w fazie formułowania modelu zadania. Typowy schemat agregacji jako operacja uśredniająca, wiąże się jednak z utratą pewnej części informacji i może prowadzić do modeli *relaksacyjnych*. W rezultacie rozwiązania modeli zagregowanych mogą nie dać się zdezagregować w dopuszczalne harmonogramy szczegółowe. Taka sytuacja jest typowa, np. gdy w zadaniu harmonogramowania występują ograniczenia na wielkość porcji produkcyjnych i pojemności magazynów.

W pracy przedstawiono pewną metodologię konstrukcji modeli zagregowanych i technik agregacji gwarantujących uzyskanie realizowalnych harmonogramów dla ogólnej klasy zadań harmonogramowania produkcji porcjami, w których występują górne ograniczenia na wielkość produkcji i na stan zapasów w magazynach. W proponowanym podejściu stawia się nacisk na sformułowanie warunków koniecznych i dostatecznych dopuszczalnej dezagregacji. Na ich podstawie uzyskuje się modele, które są pożądane z praktycznego punktu widzenia, gdyż zawsze generują realizowalne harmonogramy szczegółowe. Prezentowane zagadnienia są rozpatrywane bardziej szczegółowo w pracy [7], gdzie można znaleźć dowody przytaczanych twierdzeń.

2. Agregacja wyrobów w systemach jednostopniowych

Agregacja modeli harmonogramowania produkcji bazuje na obserwacji, że w praktycznych przypadkach wiele spośród produkowanych typów wyrobów jest bardzo podobnych do siebie. Różnią się one drobnymi detalami, np. kolorem, profilem, wyposażeniem itd., które są ważne dla użytkownika, ale mało istotne z technologicznego punktu widzenia.

Będziemy więc zakładać, że zbiór wszystkich produktów $\mathcal{N}$ można pogrupować w rodziny produktów podobnych $\mathcal{N}_k$, $k \in \mathcal{K}$ obejmujących wyroby o zbliżonych wymaganiach produkcyjnych oraz kosztach produkcji i magazynowania. Koszty przezbrojeń między produktami należącymi do tej samej rodziny można uznać wówczas za pomijalne.

Problem wyznaczania porcji produkcyjnych dla wyrobów finalnych (system jednostopniowy) jest formułowany następująco.

Problem PJ

$$\min \sum_{t=1}^{T}\Big(\sum_{k\in K} S_{kt}V_k(t) + \sum_{i=1}^{n}(c_{it}x_i(t) + h_{it}I_i(t))\Big) \tag{1}$$

przy ograniczeniach

$$I_i(t-1) + x_i(t) - I_i(t) = d_{it} \quad , \quad i \in \mathcal{N}; t = 1,...,T \tag{2}$$

$$x_i(t) \leq M_i V_k(t), \quad V_k(t) \in \{0,1\} \quad , \quad i \in \mathcal{N}_k; k \in \mathcal{K}; t = 1,...,T \tag{3}$$

$$\sum_{k\in K} E_{krt}V_k(t) + \sum_{i=1}^{n} p_{irt}x_i(t) \leq Q_{rt} \quad , \quad r \in \mathcal{R}; t = 1,...,T \tag{4}$$

$$0 \leq x_i(t) \leq \bar{x}_{it} \quad , \quad i \in \mathcal{N}; t = 1,...,T \tag{5}$$

$$0 \leq I_i(t) \leq \bar{I}_{it} \quad , \quad i \in \mathcal{N}; t = 1,...,T-1 \tag{6}$$

$$I_i(0) = I_{i0} = 0, \quad I_i(T) = \bar{I}_{iT} = 0 \quad , \quad i \in \mathcal{N} \tag{7}$$

W zadaniu występują zmienne decyzyjne: $x_i(t)$ - wielkość produkcji wyrobu i w okresie t; $I_i(t)$ - stan zapasu produktu i na koniec okresu t; $V_k(t)$ - zmienna binarna równa jeden wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{i\in N_k} x_i(t) > 0$. Parametrami są: T - horyzont harmonogramowania; S_{kt} - koszt wznawiania produkcji wyrobów rodziny k w okresie t; c_{it}, h_{it} - jednostkowy koszt produkcji i magazynowania wyrobu i w okresie t; d_{it} - zapotrzebowanie zewnętrzne na produkt i w okresie t; E_{krt} - liczba jednostek zasobu r wymaganych przez przezbrojenie dla rodziny k w okresie t; p_{irt} - liczba jednostek zasobu r wymaganych przy produkcji jednostki produktu i w okresie t; Q_{rt} - łączna dostępność zasobu r w okresie t; $\bar{x}_{it}$ - maksymalna dopuszczalna wielkość produkcji wyrobu i w okresie t; $\bar{I}_{it}$ - maksymalny dopuszczalny poziom zapasów produktu i pod koniec okresu t; M_i - liczba większa od największej porcji produkcyjnej grupy wyrobów.

Warto zaznaczyć, że do powyższej postaci sformułowania można sprowadzić także zadania harmonogramowania, w których stan początkowy $I_i(0)$ oraz dolne ograniczenia na poziom zapasów w nierównościach (6) są większe od zera. Pokazano to w pracy [8] wykorzystując ideę regularyzacji modelu zadania opisaną w [10].

Przy założeniu że w idealnym przypadku podobieństwo technologiczne wyrobów wyraża się równością kosztów produkcji i magazynowania oraz współczynników zużycia zasobów, czyli

$$c_{it} = C_{kt}, \ h_{it} = H_{kt} \text{ oraz } p_{irt} = P_{krt} \qquad \forall\, i \in \mathcal{N}_k; \qquad k \in \mathcal{K}; r \in \mathcal{R}; t = 1,...,T. \tag{8}$$

typowy schemat agregacji problemu PJ polega na zsumowaniu ograniczeń odpowiadających poszczególnym produktom podobnym i wprowadzeniu zmiennych zagregowanych

$$X_k(t) = \sum_{i \in N_k} x_i(t) \quad , \quad F_k(t) = \sum_{i \in N_k} I_i(t) \qquad k \in K;\ t = 1, ..., T \tag{9}$$

W ten sposób otrzymujemy model zagregowany.

Problem AJ

$$\min \sum_{t=1}^{T} \sum_{k \in K} \big(S_{kt}V_k(t) + C_{kt}X_k(t) + H_{kt}F_k(t)\big) \tag{10}$$

przy ograniczeniach

$$F_k(t-1) + X_k(t) - F_k(t) = D_{kt} \quad , \quad k \in \mathcal{K}; t = 1, ..., T \tag{11}$$

$$X_k(t) \le M_k V_k(t), \qquad V_k(t) \in \{0,1\} \quad , \quad k \in \mathcal{K}; t = 1, ..., T \tag{12}$$

$$\sum_{k \in K} (E_{krt}V_k(t) + P_{krt}X_k(t)) \le Q_{rt} \quad , \quad r \in \mathcal{R}; t = 1, ..., T \tag{13}$$

$$0 \le X_k(t) \le \bar{X}_{kt} \quad , \quad k \in \mathcal{K}; t = 1, ..., T \tag{14}$$

$$0 \le F_k(t) \le \bar{F}_{kt} \quad , \quad k \in \mathcal{K}; t = 1, ..., T-1 \tag{15}$$

$$F_k(0) = 0, \quad F_k(T) = 0 \quad , \quad k \in \mathcal{K} \tag{16}$$

gdzie: $D_{kt} = \sum_{i \in N_k} d_{it}, \quad M_k = \sum_{i \in N_k} M_i, \quad \bar{X}_{kt} = \sum_{i \in N_k} \bar{x}_{it}, \quad \bar{F}_{kt} = \sum_{i \in N_k} \bar{I}_{it}$.

Problem AJ ma taką samą strukturę ograniczeń jak problem pierwotny PJ, ale występuje w nim mniej zmiennych i ograniczeń. W związku z tym łatwiej go rozwiązać stosując jedną z metod przedstawioną w [3]. Aby zdezagregować rozwiązanie zagregowane $(X_k(t), F_k(t))_{k \in K, t=1,..,T}$ w rozwiązanie problemu pierwotnego, należy znaleźć $x_i(t)$, $I_i(t)$), $i \in N, t = 1, ..., T$ spełniające ograniczenia (2), (5), (6), (7), (9). Odpowiada to znalezieniu przepływu dopuszczalnego w odpowiednio skonstruowanej sieci (patrz [7, 8]).

Niestety, jak pokazano w [7], model AJ ma charakter relaksacyjny i w ogólnym przypadku mogą pojawiać się rozwiązania, których nie można zdezagregować. Taki model zagregowany nie gwarantuje więc nam uzyskania realizowalnych harmonogramów.

Jedynie w szczególnych przypadkach, np. gdy górne ograniczenia $\bar{I}_{it}, \bar{x}_{it}$ nie są istotne, tzn. $\bar{I}_{it} = \infty, \bar{x}_{it} = \infty \ \ \forall i, t$, model zagregowany AJ jest równoważny problemowi pierwotnemu PJ. Dla zapewnienia dopuszczalności dezagregacji w pozostałych przypadkach niezbędne jest spełnienie dodatkowych warunków.

Oznaczmy symbolem $G_i(\mathcal{L})$ gdzie $\mathcal{L} \subseteq \{1, ..., T\}$ maksymalną wielkość zapotrzebowań wyrobu i, jaką można zaspokoić poprzez produkcję tylko w okresach $t \in \mathcal{L}$ (dla $\mathcal{L} = \emptyset$ przyjmujemy $G_i(\mathcal{L}) = 0$). Wartość $G_i(\mathcal{L})$ oczywiście zależy od parametrów $\bar{x}_{it}, \bar{I}_{it}, d_{it}$. Warunki konieczne i dostateczne dla dopuszczalnej dezagregacji rozwiązań problemu AJ można wówczas sformułować w następujący sposób [7]:

Twierdzenie 1. *Rozwiązanie dopuszczalne (optymalne)* $(X_k(t), F_k(t), V_k(t))_{k\in\mathcal{K}, t=1,\ldots,T}$ *problemu AJ można zdezagregować w rozwiązanie dopuszczalne (optymalne) problemu PJ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $k \in \mathcal{K}$, $\mathcal{L} \subset \{1,\ldots,T\}$ *spełnione są warunki*

$$\sum_{\tau\in\mathcal{L}} X_k(\tau) \geq \sum_{i\in N_k} \max_{t=1,\ldots,T}\Big(0, \sum_{\tau=1}^{t} d_{i\tau} - G_i(\{1,\ldots,t\}\setminus\mathcal{L})\Big) \tag{17}$$

W oparciu o powyższe twierdzenie można skonstruować równoważny model zagregowany, którego rozwiązania dadzą się zawsze zdezagregować. Model taki oprócz ograniczeń (11)-(16) problemu AJ powinien zawierać dodatkowe ograniczenia (17). Zauważmy przy tym, że część z nich wyraża w istocie dolne i górne ograniczenia na zmienne $\bar{X}_k(t)$ i $\bar{F}_k(t)$, np. gdy $\mathcal{L} = \{t\}$ czy $\mathcal{L} = \{1,...,t\}$, $t = 1,...,T$, które można uwzględnić bezpośrednio w nierównościach (14) i (15). Niemniej jednak ogólna liczba dodatkowych ograniczeń zależy w sposób wykładniczy od T i w praktycznych przypadkach może być na tyle duża, że stosowanie równoważnego modelu zagregowanego staje się nieefektywne.

W takiej sytuacji można zaproponować podejście iteracyjne. Metoda iteracyjnej agregacji wykorzystuje fakt, że dla ustalonego rozwiązania modelu równoważnego zwykle tylko niektóre z dodatkowych ograniczeń są aktywne. W związku z tym zamiast uwzględniać od razu wszystkie dodatkowe ograniczenia, warto w kolejnych iteracjach wprowadzać do modelu tylko te, które stają się aktywne.

Algorytm IA (Iteracyjnej Agregacji)

1. Utwórz model zagregowany A postaci AJ.
2. Rozwiąż problem A.
   - Jeżeli A nie ma rozwiązania dopuszczalnego, to również problem PJ nie ma rozwiązania dopuszczalnego; KONIEC;
   - Jeżeli rozwiązanie problemu A można zdezagregować, to w efekcie uzyskujemy optymalne rozwiązanie problemu PJ; KONIEC;
   - Jeżeli rozwiązania problemu A nie można zdezagregować, idź do 3.
3. Określ, które z ograniczeń (17) jest naruszone przez rozwiązanie problemu A. Dołącz to ograniczenie do modelu A. Idź do 2.

Przedstawiony schemat rozwiązywania może wymagać w praktyce uwzględnienia tylko niewielkiej liczby ograniczeń (17), na co wskazują eksperymenty obliczeniowe opisane w rozdziale 4.

Proces agregacji nieco się upraszcza, gdy ograniczenia na wielkość produkcji przestają być krytyczne, tzn. $\bar{x}_{it} = \infty\ \forall i, t$. Wówczas warunki dopuszczalnej dezagregacji przyjmują następującą postać:

Twierdzenie 2 ([8]). *Jeżeli $\bar{x}_{it} = \infty$ $\forall i,t$, to rozwiązanie dopuszczalne (optymalne) $(X_k(t), F_k(t), V_k(t))_{k\in\mathcal{K},t=1,..,T}$ problemu AJ można zdezagregować w rozwiązanie dopuszczalne (optymalne) problemu PJ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki*

$$\sum_{t=r}^{s} X_k(t) \geq \sum_{i\in N_k} \max(0, \sum_{t=r}^{s} d_{it} - \tilde{I}_{i,r-1}) \quad \text{dla każdego } k \in \mathcal{K}; 1 < r \leq s \leq T. \tag{18}$$

gdzie $\tilde{I}_{it}$ jest określone rekurencyjną zależnością

$$\tilde{I}_{it} = \begin{cases} \bar{I}_{iT} = 0 & t = T \\ \min(\bar{I}_{it}, \tilde{I}_{i,t+1} + d_{i,t+1}) & 1 \leq t < T \end{cases} \tag{19}$$

Porównując twierdzenia 1 i 2 warto zaznaczyć, że warunków (18) jest zdecydowanie mniej niż (17). Potencjalnie jest ich $|\mathcal{K}|T(T-1)/2$. W związku z tym stosowanie równoważnych modeli zagregowanych dla przypadku, gdy $\bar{x}_{it} = \infty$ $\forall i,t$ staje się bardziej uzasadnione, zwłaszcza że spora część z dodatkowych ograniczeń (18) bywa redundancyjna i nie musi występować w modelu równoważnym.

Twierdzenie 3. *Jeżeli dla pewnych k, r, s $k \in \mathcal{K}$, $1 < r \leq s < T$ zachodzi warunek*

$$\sum_{t=r}^{s} d_{it} - \tilde{I}_{i,r-1} \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{N}_k \qquad \text{lub} \qquad \sum_{t=r}^{s} d_{it} - \tilde{I}_{i,r-1} \leq 0 \quad \forall i \in \mathcal{N}_k \tag{20}$$

to w modelu równoważnym ograniczenie (18) jest redundancyjne dla indeksów k, r, s.

Oczywiście można również zastosować iteracyjną agregację. Obie powyższe metody dają rozwiązanie optymalne, ale wymagają uwzględnienia w modelu zagregowanym pewnej liczby dodatkowych ograniczeń.

Dla zachowania pierwotnej struktury ograniczeń modelu AJ proponowane jest podejście restrykcyjne [6]. W metodzie restrykcyjnej agregacji wymusza się spełnienie warunków (18) poprzez odpowiednie zawężenie (restrykcję) od góry ograniczeń magazynowych (15). Nowe wartości $\bar{F}_{kt}$ otrzymuje się w wyniku obniżenia górnych ograniczeń $\bar{I}_{it}$ do poziomu zapewniającego spełnienie warunków (20) i powodującego redundancyjność (18), a następnie ich agregacji (zsumowania). Restrykcyjny model zagregowany ma prostą strukturę, gdyż nie zawiera dodatkowych ograniczeń, ale w wyniku restrykcji może nastąpić odcięcie pewnych rozwiązań dopuszczalnych problemu pierwotnego, w szczególności rozwiązania optymalnego. Jest to więc metoda przybliżona, która nie gwarantuje optymalności. Należy jednak podkreślić, że każde rozwiązanie restrykcyjnego modelu zagregowanego, o ile istnieje, może być zawsze zdezagregowane w dopuszczalne rozwiązanie problemu pierwotnego. Z tego powodu podejście restrykcyjne jest atrakcyjną metodą znajdowania przybliżonych rozwiązań.

3. Agregacja wyrobów w systemach wielostopniowych

Wyniki uzyskane dla systemów jednostopniowych można w pewnym stopniu wykorzystać do agregacji w systemach wielostopniowych, gdzie oprócz wyrobów finalnych rozpatruje się produkcję ich podzespołów i części. Niech $G(\mathcal{N},\mathcal{E})$ będzie grafem acyklicznym reprezentującym strukturę zapotrzebowań materiałowych wyrobów. Łuki $(i,j) \in \mathcal{E}$ mają wagę r_{ij} i występują wtedy, gdy r_{ij} jednostek produktu i jest wymaganych bezpośrednio do produkcji (np. montażu) wyrobu j (jeżeli $r_{ij} = 0$, to $(i,j) \notin \mathcal{E}$). Model zadania wyznaczania porcji produkcyjnych w systemie wielostopniowym ma następującą postać.

Problem PW

min (1) przy ograniczeniach (3), (4), (5), (6), (7) oraz

$$I_i(t-1) + x_i(t) - I_i(t) = d_{it} + \sum_{j \in \mathcal{S}_i} r_{ij} x_j(t) \qquad i \in \mathcal{N};\, t = 1, \ldots, T \tag{21}$$

gdzie $\mathcal{S}_i$ – zbiór bezpośrednich następników produktu i w grafie $G(\mathcal{N},\mathcal{E})$.

W odróżnieniu od systemów jednostopniowych, zapotrzebowania na detale są kształtowane tutaj przez dwa czynniki – zapotrzebowania zewnętrzne d_{it} wynikające np. z zamówień na części zamienne oraz wymagania materiałowe wyrobów montowanych z tych detali. Dla przeprowadzenia agregacji w systemach wielostopniowych będziemy zakładać, że oprócz warunków (8), wyroby podobne spełniają tzw. warunki regularnej agregacji

$$\forall\, k, l \in \mathcal{K} \quad \forall\, j, m \in \mathcal{N}_l \qquad \sum_{i \in \mathcal{N}_k} r_{ij} = \sum_{i \in \mathcal{N}_k} r_{im} = R_{kl} \tag{22}$$

Warunki te wymagają, aby dla każdego wyrobu z danej rodziny $\mathcal{N}_l$, $l \in \mathcal{K}$, liczba części pochodzących z dowolnej innej rodziny $\mathcal{N}_k$, $k \in \mathcal{K}$ była identyczna.

Przy założeniach (8) i (22) model zagregowany ma postać:

Problem AW

min (10) przy ograniczeniach (12), (13), (14), (15), (16) oraz

$$F_k(t-1) + X_k(t) - F_k(t) = D_{kt} + \sum_{l \in \mathcal{S}_k^A} R_{kl} X_l(t) \qquad k \in \mathcal{K};\, t = 1, \ldots, T \tag{23}$$

gdzie $\mathcal{S}_k^A = \{\, l \mid l \in \mathcal{K}$ oraz istnieją $i \in \mathcal{N}_k$ i $j \in \mathcal{N}_l$, takie że $(i,j) \in \mathcal{E} \,\}$.

Oczywiście jest to model relaksacyjny i nie gwarantuje dopuszczalności dezagregacji. Dezagregacja polega na znalezieniu rozwiązania dopuszczalnego spełniającego ograniczenia (21), (5), (6), (7), (9), przy czym w odróżnieniu od systemów jednostopniowych, rodziny produktów nie mogą być w ogólnym przypadku dezagregowane niezależnie. Zauważmy bowiem, że zapotrzebowanie podzespołów $i \in \mathcal{N}_k$ zależy od wielkości produkcji $x_j(t)$ wyrobów nadrzędnych z rodziny $l \in \mathcal{S}_k^A$. Proces dezagregacji można jednak zdekomponować na podproblemy jednostopniowe, jeżeli najpierw będą dezagregowane rodziny zawierające wyroby finalne, potem rodziny ich podzespołów itd., a na końcu rodziny surowców. W oparciu o taką dekompozycję można zaproponować schemat iteracyjnej agregacji dla systemów wielostopniowych.

Algorytm IAW (Algorytm iteracyjnej agregacji dla systemów wielostopniowych)

1. Utwórz model zagregowany A postaci AW.
2. Rozwiąż problem A.
   - Jeżeli problem A jest niedopuszczalny, to albo problem PW jest niedopuszczalny, albo dokonano zbyt silnej restrykcji; KONIEC;
   - Jeżeli problem A ma rozwiązanie dopuszczalne, idź do 3.
3. Niech DW_k oznacza podproblem dezagregacji dla rodziny k, a $\hat{x}_i(t)$, $i \in \mathcal{N}_k, t = 1, ..., T$ wartości rozwiązań uzyskiwanych w wyniku dezagregacji. Dokonaj dezagregacji rozwiązań problemu A rozwiązując podproblemy DW_k w kolejności zgodnej ze strukturą zapotrzebowań materiałowych.
   - Jeżeli dla wszystkich $k \in \mathcal{K}$ podproblemy DW_k są dopuszczalne, to $\hat{x}_i(t), i \in \mathcal{N}, t = 1, ..., T$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym (przybliżonym) problemu PW; KONIEC;
   - Jeżeli dla pewnego k napotkano podproblem DW_k (jednostopniowy), który nie ma rozwiązania dopuszczalnego, to rozwiązanie $X_k(t)$, $t = 1, ..., T$ nie spełnia warunków (17) dla zapotrzebowań postaci $\Delta_{it} = d_{it} + \sum_{j \in S_i} r_{ij}\hat{x}_j(t)$. Określ, które warunki nie są spełnione, i idź do 4.
4. Dołącz do modelu A ograniczenia na zmienne $X_k(t)$ wymuszające spełnienie naruszonych warunków, idź do 2.

Algorytm IAW jest z pozoru bardzo podobny do algorytmu IA proponowanego dla systemów jednostopniowych, lecz różni się od niego zasadniczo. W wyniku stosowania algorytmu IA uzyskujemy zawsze rozwiązania optymalne, podczas gdy algorytm IAW w ogólności daje rozwiązania przybliżone. Dołączanie dodatkowych ograniczeń ma bowiem w tym algorytmie charakter tylko lokalnej poprawy dopuszczalności i może powodować restrykcję całego problemu.

4. Wyniki obliczeń

Dla przypadku zadań jednostopniowych, w których nie występują ograniczenia na wielkość produkcji, algorytmy agregacji były badane w pracy [6]. Stosunkowo dobre rezultaty przy niewielkim nakładzie obliczeń uzyskano stosując restrykcyjny model zagregowany. Koszty otrzymanych rozwiązań różniły się od kosztów optymalnych o zaledwie kilka procent. Również algorytm iteracyjnej agregacji był bardzo efektywny. Dopuszczalne i optymalne rozwiązanie uzyskiwano po kilku iteracjach.

Poniżej zamieszczono rezultaty zastosowania algorytmu iteracyjnej agregacji do problemów, w których występują ograniczenia na wielkość produkcji. Badano problem agregacji pięciu wyrobów finalnych przy horyzoncie harmonogramowania $T = 6, 9, 12$ i 18 oraz trzech poziomach ograniczeń: $\bar{x}_{it} = 100$, $\bar{x}_{it} = 150$ i $\bar{x}_{it} = 200$. W sumie rozpatrzono 15 różnych wariantów zadania. W każdym wariancie analizowano 20 scenariuszy zapotrzebowań. Zapotrzebowania d_{it} były losowane z przedziału $[0, 100]$. Przyjęto $S_t = 700$, $c_{it} = 0$ i $h_{it} = 1$ dla każdego i, t oraz pominięto ograniczenia zasobowe (4).

Problem *AJ* dawał się zdezagregować już w pierwszej iteracji w 37 przypadkach (na 300 rozpatrywanych). W pozostałych przypadkach algorytm iteracyjnej agregacji wymagał więcej niż jedną iterację do uzyskania dopuszczalnego rozwiązania. Tabela 1 przedstawia średnią liczbę wykonanych iteracji dla każdego z rozpatrywanych wariantów zadań.

	$T = 6$	$T = 9$	$T = 12$	$T = 15$	$T = 18$
$\bar{x}_{it} = 100$	9.3	23.3	40.4	63.1	> 90
$\bar{x}_{it} = 150$	3.9	6.6	7.6	9.8	15.3
$\bar{x}_{it} = 200$	1.6	1.9	2.1	1.9	2.9

Tabela 1. Średnia liczba iteracji dla algorytmu iteracyjnej agregacji

Przeprowadzone doświadczenia pokazują, że algorytm iteracyjnej agregacji jest dość efektywny, gdy ograniczenia na wielkość produkcji są słabe (por. warianty z $\bar{x}_{it} = 200$). Wówczas algorytm iteracyjnej agregacji wymaga niewielkiej liczby iteracji. Jednak przy silnych ograniczeniach produkcyjnych liczba iteracji może być stosunkowo duża (por. warianty z $\bar{x}_{it} = 100$).

LITERATURA

[1] Axsäter S., Jönsson H.: Aggregation and Disaggregation in Hierarchical Production Planning, *European Journal of Operational Research* 17, 1984, 338-350.

[2] Axsäter S.: On the Feasibility of Aggregate Production Plans. *Operations Research* 34, 1986, 796-800.

[3] Bahl H.C., Ritzman L.P., Gupta J.N.D.: Determining Lot Sizes and Resource Requirements: A Review. *Operations Research* 35, 1987, 329-345.

[4] Bitran G.R., Haas E.A., Hax A.C.: Hierarchical Production Planning: A Two-Stage System, *Operations Research* 30, 1982, 232-251.

[5] Erschler J., Fontan G., Merce C.: Consistency of the Disaggregation Process in Hierarchical Planning. *Operations Research* 34, 1986, 464-469.

[6] Pieńkosz K., Toczyłowski E.: Warunki idealnej dezagregacji wyrobów w systemach jednostopniowych z ograniczonymi magazynami, *Zesz. Nauk. Pol. Śl., ser. Automatyka* 100, 1990, 223-231.

[7] Pieńkosz K.: *Metody agregacji wyrobów w zadaniach harmonogramowania produkcji realizowanej porcjami*, Rozprawa Doktorska, Politechnika Warszawska, 1992.

[8] Pieńkosz K., Toczyłowski E.: On Aggregation of Items in Single-Stage Production Systems with Limited Inventory Levels, *Operations Research* 41, 1993, 419-426.

[9] Rogers D.F., Plante R.D., Wong R.T., Evans J.R.: Aggregation and Disaggregation Techniques and Methodology in Optimization, *Operations Research* 39, 1991, 553-582.

[10] Toczyłowski E.: On Aggregation of Items in the Single-Stage Lot Size Scheduling Problem. *Large Scale Systems* 10, 1986, 157-164.

[11] Toczyłowski E., Pieńkosz K.: Restrictive aggregation of items in multistage production systems, *Operations Research Letters* 10, 1991, 159-163.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Franciszek Marecki

Wpłynęło do Redakcji do 30.04.1994 r.

Abstract

The paper considers the aggregation of a family of similar items into a single aggregate product in a general single-stage dynamic capacitated lot size scheduling problem with limited upper bounds on inventory and production levels. The production capacity is limited by availability of specific resource, such as qualified manpower, or limitations of a production process of a particular type. It is assumed that the items within a family have similar production and inventory costs, and that significant set-ups occur only when changing from one family of similar items to another. The minor set-ups among the items of a family are negligible.

In this paper we are investigating a solution of the lot-size scheduling problem by two-stage aggregation/disaggregation process, where at the first stage a single-item *aggregate* scheduling problem A is considered and, at the second stage, the aggregate plan is disaggregated into a *detailed* plan for individual items. The necessary and sufficient conditions of *consistent* aggregation, which guarantee that the optimal aggregate solution can be disaggregated into an optimal solution of the original problem, are presented and discussed. The most crucial drawback of the consistent model is a large number of additional constraints. However as shown in the paper, the consistent aggregated model can be a useful source of important information helping to design restrictive and iterative processes of seeking a disaggregate feasible solution.