

Krzysztof KOZŁOWSKI

Politechnika Poznańska, Katedra Automatyki, Robotyki i Informatyki

MODELOWANIE MANIPULATORÓW Z OGNIWAMI ELASTYCZNYMI

Streszczenie: W artykule przedstawiono wyprowadzenie równań ruchu manipulatora o dwóch ogniwach elastycznych. Do wyprowadzenia równań ruchu zastosowano równania Lagrange'a, zaś do badania elastyczności wykorzystano metodę elementów skończonych. Podano też koncepcję rozszerzenia algorytmu w przypadku zwiększenia liczby elementów skończonych pojedynczego ogniwa. Przeprowadzono badania symulacyjne zagadnienia prostego dynamiki.

MODELLING OF FLEXIBLE MANIPULATORS

Summary: This paper presents equations of motion for a manipulator with two flexible links. The equations are derived basing on the Lagrange principle and flexibility of the links is considered basing on the finite elements method. It is shown how to extend the results to the case of any number of finite elements for a single link. Forward dynamics problem simulation results are presented.

MODELLIERUNG DER MANIPULATOREN MIT ELASTISCHEN GELENKEN

Zusammenfassung: In diesem Beitrag wurden die Bewegungsgleichungen des Manipulators mit zwei elastischen Gelenken vorgestellt. Für die Ausführung der Bewegungsgleichungen wurde die Lagrange'schen Gleichung genutzt und für die Forschung der Elastizität wurde die Finite-Element-Methode angewendet. Es wurde auch das Verbreitungskonzept des Algorithmus für den Fall mit mehreren Elementen einzelnes Gelenkes angegeben. Auch die Simulation der Direktgaben der Dynamik ist durchgeführt worden.

1. Wstęp

W artykule przedstawiono eksperyment symulacyjny dla manipulatora o dwóch ogniwach elastycznych. Dla robotów o ogniwach elastycznych rozważać będziemy, podobnie jak dla sztywnych konstrukcji, zagadnienie odwrotne oraz proste dynamiki. Zagadnienie odwrotne polega na wyznaczeniu sił uogólnionych działających w złączach manipulatora

przy założeniu, że znane są przyspieszenia uogólnione, przy czym na przyspieszenia te składają się przyspieszenia "związane z elastycznością" oraz przyspieszenia złączy manipulatora. Problemem dualnym jest zagadnienie proste dynamiki, które polega na wyznaczeniu przyspieszeń uogólnionych przy założeniu, że znane są siły uogólnione. Problemami modelowania elastycznych struktur ramion robotów zajmowało się wielu autorów już od blisko 20 lat. Jako kilka reprezentatywnych prac o tej tematyce można wskazać chociażby [1, 6, 7, 8, 9]. Do opisu dynamicznych zachowań elastycznych ogniw stosuje się dużą liczbę znanych metod, przy czym do najczęściej stosowanych należy podejście związane z modami drgań, tzw. analizą modalną [5] oraz metoda sztywnych lub elastycznych elementów skończonych [3]. Równania ruchu można budować, podobnie jak dla ogniw sztywnych, wykorzystując równania Lagrange'a [1, 8, 9] lub Newtona-Eulera [4].

W pracy zastosowano równania Lagrange'a w połączeniu z metodą elementów skończonych. Przeprowadzone badania są rozszerzeniem wyników zamieszczonych w pracy [9]. W artykule zaproponowano metodę analityczno-numeryczną generacji równań modelu matematycznego dynamiki manipulatora o ogniwach elastycznych, która pozwala w konsekwencji na uzyskanie równań w postaci jawnej. W równaniach uwzględniono składnik $M\dot{q}$, tj. iloczyn pochodnej macierzy mas pomnożonej przez wektor prędkości uogólnionych, którego nie uwzględniono w pracy [9]. Ponadto analizowano pełne postacie pochodnych macierzy mas względem współrzędnych uogólnionych [2]. Pozwoliło to na przeprowadzenie badań symulacyjnych zagadnienia prostego dynamiki dla rozważanego przykładu manipulatora o dwóch ogniwach elastycznych, z których każde podzielono na dwa elastyczne elementy skończone. Przeprowadzona analiza ma wszechstronny charakter i nadaje się do bezpośredniego zastosowania do równoległego wykonywania obliczeń zagadnienia prostego oraz odwrotnego.

W rozdziale drugim przedstawiono założenia teoretyczne obliczeń przez sformułowanie wyrażeń określających energię kinetyczną i potencjalną poszczególnych ogniw. Zaprezentowano też ogólną koncepcję obliczeń analityczno - numerycznych rozważanego przykładu. Ponadto w rozdziale tym przedstawiono szczegółowy wykaz oznaczeń. W rozdziale trzecim przedstawiono wyniki badań symulacyjnych rozwiązania zagadnienia prostego dla badanego manipulatora. W kolejnym rozdziale przedstawiono wnioski końcowe.

2. Teoretyczne założenia eksperymentu

Eksperyment obliczeniowy opracowano na podstawie pracy [9]. Układ składa się z m ogniw elastycznych, przy czym i -te ogniwo składa się z n_i elementów o długości l_i . Każdy z elementów ij (j oznacza tutaj numer elementu w i -tym ogniwie) ma energię kinetyczną T_{ij} oraz potencjalną V_{ij} , które są funkcją wektora $(n \times 1)$ współrzędnych uogólnionych $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ oraz wektora prędkości \dot{q} .

Całkowitą energię kinetyczną i potencjalną manipulatora określimy następująco

$$T(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} T_{ij}, \quad V(q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} V_{ij}, \quad (1)$$

oraz lagrangian manipulatora

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T - V, \quad (2)$$

gdzie m jest liczbą ogniw, zaś n_i jest liczbą elementów skończonych i -tego ogniwa.

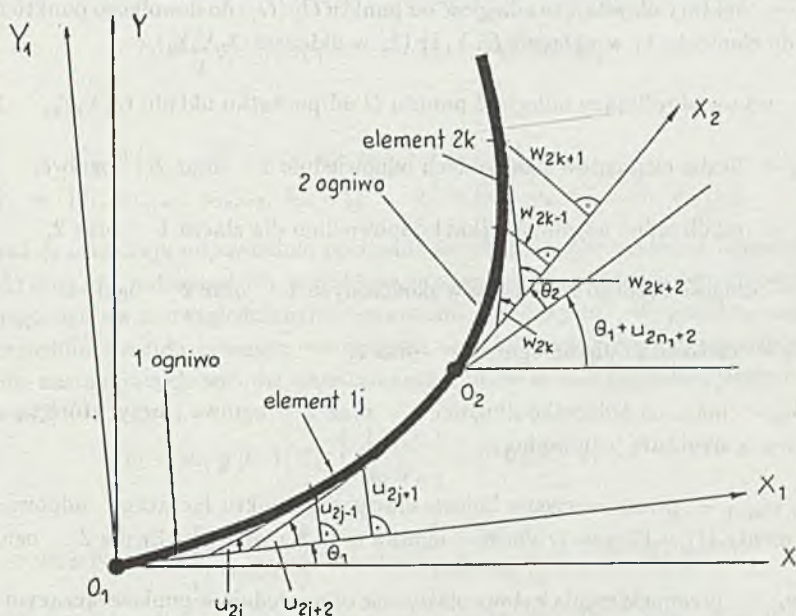
Z równania Lagrange'a

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

można, uwzględniając warunki brzegowe, uzyskać równanie opisujące dynamikę układu

$$M\ddot{q} - f = Q, \quad (4)$$

gdzie $M = M(q)$ jest nieliniową funkcją wektora q i nazywa się macierzą mas. Q reprezentuje siły uogólnione w przegubach oraz siły działające pomiędzy dwoma elementami skończonymi, natomiast f reprezentuje wektor funkcji nieliniowych, które są zależne od q oraz \dot{q} . Wspomniana powyżej macierz M jest dodatnio określona.



Rys. 1. Odształcenie manipulatora o dwóch ogniwach elastycznych
Fig. 1. Deformations of a manipulator with two flexible links

Wyprowadzenie równań modelu matematycznego ograniczono do przypadku manipulatora o dwóch ogniwach elastycznych przedstawionych na rysunku 1. Pierwsze ogniwo podzielono na elementy o numerach $11, 12, \dots, 1j, \dots, 1n_1$ o jednakowej długości l_1 , natomiast drugie ogniwo na elementy o numerach $21, 22, \dots, 2j, \dots, 2n_2$ o jednakowej długości l_2 . Ponadto posługiwać się będziemy następującymi oznaczeniami (niektóre z nich zaznaczono na rysunku 1).

OXY – bazowy układ współrzędnych,

$O_i X_i Y_i$ – układ współrzędnych związany z i -tym ogniwem. Oś $O_1 X_1$ jest zgodna z kierunkiem nieodkształconego (traktowanego jako ciało sztywne) ogniwa 1 oraz oś $O_2 X_2$ jest zgodna z kierunkiem nieodkształconego ogniwa 2,

$O_{ij} X_{ij} Y_{ij}$ – układ współrzędnych związany z elementem ij ogniwa i -tego o początku O_{ij} , przyporządkowanym nieodkształconemu i -temu ogniwu, wynikającym z przecięcia osi $O_i X_i$ w punkcie $(j-1)l_1$ oraz prostej łączącej ten punkt z punktem wspólnym między elementami $i(j-1)$ oraz ij . Oś $O_{ij} X_{ij}$ leży na osi $O_i X_i$ oraz $O_{ij} Y_{ij}$ jest równoległa do osi $O_i Y_i$,

x_{ij}, y_{ij} – współrzędne odległości w układzie $O_{ij} X_{ij} Y_{ij}$ dla dowolnego punktu j -tego elementu i -tego ogniwa,

r – wektor określający odległość od punktu O do dowolnego punktu P manipulatora,

r_1, r_2 – wektory określające odległość od punktu O_1 (O_2) do dowolnego punktu należącego do elementu $1j$ w układzie $O_1 X_1 Y_1$ ($2j$ w układzie $O_2 X_2 Y_2$),

r_{02} – wektor określający odległość punktu O od początku układu $O_2 X_2 Y_2$,

n_1, n_2 – liczba elementów skończonych odpowiednio 1 oraz 2 ogniwa,

θ_1, θ_2 – współrzędne uogólnione (kąt) odpowiednio dla złącza 1 oraz 2,

l_1, l_2 – długość każdego z elementów skończonych 1 oraz 2 ogniwa,

L_1, L_2 – całkowita długość ogniw 1 oraz 2,

m_1, m_2 – masa na jednostkę długości 1 oraz 2 ogniwa (pręty, które są ogniwami mają strukturę jednorodną),

u_{2j-1}, w_{2j-1} – przemieszczenia liniowe elastyczne punktu łączącego odpowiednio elementy $1(j-1)$ oraz $1j$ dla 1 ogniwa oraz $2(j-1)$ oraz $2j$ dla 2 ogniwa,

u_{2j}, w_{2j} – przemieszczenia kątowe elastyczne odpowiednio w punkcie łączącym elementy $1(j-1)$ oraz $1j$ dla 1 ogniwa oraz elementy $2(j-1)$ oraz $2j$ dla 2 ogniwa. Kąty te są mierzone odpowiednio względem osi $O_1 X_1$ oraz $O_2 X_2$,

M_1, M_2 – macierze mas 1 oraz 2 ogniwa,

K_1, K_2 – macierze sztywności 1 oraz 2 ogniwa,

E – moduł Younga,

I_1, I_2 – momenty bezwładności figury płaskiej będącej przekrojem 1 oraz 2 ogniwa.

2.1. Lagrangian oraz równania ruchu

Postaci wyrażen na energie kinetyczną oraz potencjalną można znaleźć w pracy [2]. Wektor sił uogólnionych obliczamy z równania Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

gdzie

$$\mathcal{L} = T - V = T_1 + T_2 - V_1 - V_2. \quad (6)$$

Zanim przejdziemy do dalszych rozważań związanych z lagrangianem, uwzględnimy warunki brzegowe dla rozważanego przykładu. Biorąc pod uwagę fakt, że złącze ogniwa 1 jest ograniczone w ten sposób, że ma zerowe przemieszczenie oraz obraca się o kąt θ_1 względem bazowego układu odniesienia, możemy zapisać: $u_1(t) = 0$ oraz $u_2(t) = 0$. Podobna sytuacja ma miejsce dla ogniwa 2, wobec tego mamy $w_1(t) = w_2(t) = 0$. Uwzględniając warunki brzegowe dla energii kinetycznej T_1 oraz T_2 możemy zapisać [2]

$$T_1 = \frac{1}{2} \dot{q}_1^T M_1 \dot{q}_1, \quad T_2 = \frac{1}{2} \dot{q}_2^T M_2 \dot{q}_2, \quad (7)$$

przy czym

$$q_1^T = [\theta_1, \Psi_1^T], \quad \Psi_1^T = [u_3, u_4, u_5, \dots, u_{2n_1+2}], \quad (8)$$

$$q_2^T = [\theta_1, u_{2n_1+1}, u_{2n_1+2}, \theta_2, \Psi_2^T], \quad \Psi_2^T = [w_3, w_4, w_5, \dots, w_{2n_2+2}], \quad (9)$$

gdzie \dot{q}_1 oraz \dot{q}_2 oznaczają odpowiednio pochodne względem czasu wektorów określonych wzorami (8) oraz (9), natomiast M_1 oraz M_2 są macierzami mas odpowiednio pierwszego oraz drugiego ogniwa z uwzględnionymi warunkami brzegowymi. W podobny sposób należy uwzględnić warunki brzegowe we wzorach określających energię potencjalną, co prowadzi do następujących wzorów określających całkowitą energię potencjalną 1 i 2 ogniwa [2]

$$V_1 = m_1 g [0 \ 1] T_0^1 \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} n_1^2 l_1^2 \\ R_0 \Psi_1 \end{array} \right] + \frac{1}{2} \Psi_1 K_1 \Psi_1, \quad (10)$$

$$V_2 = m_2 g [0 \ 1] T_0^1 \left[\left[\begin{array}{c} L_1 \\ u_{2n_1+1} \end{array} \right] n_2 l_2 + T_1^2 \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} n_2^2 l_2^2 \\ R_1 \Psi_2 \end{array} \right] \right] + \frac{1}{2} \Psi_2^T K_2 \Psi_2, \quad (11)$$

przy czym Ψ_1 oraz Ψ_2 zdefiniowane są za pomocą wzorów (8) i (9), natomiast R_0 oraz R_1 są pewnymi wektorami odległości [2]. K_1 oraz K_2 są macierzami sztywności odpowiednio pierwszego oraz drugiego ogniwa.

Biorąc teraz pod uwagę wzory (7) do (11) przekształcimy lagrangian 1 i 2 ogniwa badanego manipulatora do postaci

$$\mathcal{L} = T_1 + T_2 - V_1 - V_2 = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} - V(q), \quad (12)$$

przy czym

$$q^T = [\theta_1, u_3, u_4, u_5, \dots, u_{2n_1+1}, u_{2n_1+2}, \theta_2, w_3, w_4, \dots, w_{2n_2+2}], \quad (13)$$

zaś M jest macierzą mas całego manipulatora, która wynika z superpozycji macierzy mas M_{ij} .

Wyrażenie (12) jest skalarem, którego wartość zależy od współrzędnych uogólnionych q_i oraz ich prędkości \dot{q}_i . Korzystając z definicji różniczkowania skalara względem wektora \dot{q} otrzymamy

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = M \dot{q}, \quad (14)$$

przy czym uwzględniono fakt, że energia potencjalna nie jest zależna od wektora \dot{q} . Różniczkując obustronnie względem czasu wyrażenie wektorowe (14) otrzymamy

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} [M \dot{q}] = \dot{M} \dot{q} + M \ddot{q}. \quad (15)$$

Różniczkowanie lagrangianu względem wektora q prowadzi do następującego wzoru

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial M}{\partial q_1} \dot{q} - \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial M}{\partial q_i} \dot{q} - \frac{\partial V}{\partial q_i}, \dots, \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial M}{\partial q_N} \dot{q} - \frac{\partial V}{\partial q_N} \right]^T, \quad (16)$$

przy czym N jest całkowitą liczbą stopni swobody (z uwzględnieniem warunków brzegowych) manipulatora, tj. $N = 2n_1 + 2n_2 + 2$. Wprowadzając oznaczenie

$$\frac{\partial M}{\partial q} = \left[\frac{\partial M}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial M}{\partial q_i}, \dots, \frac{\partial M}{\partial q_N} \right]^T, \quad (17)$$

oraz uwzględniając wzory (14), (15) oraz (16) otrzymujemy następujące równanie ruchu manipulatora

$$M \ddot{q} + \dot{M} \dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial M}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial V}{\partial q} = Q, \quad (18)$$

przy czym Q jest wektorem sil uogólnionych działających w układzie.

Autorzy pracy [9] rozpatrują oddzielnie lagrangian \mathcal{L}_1 dla ogniwa 1 oraz \mathcal{L}_2 dla ogniwa 2, a następnie obliczają odpowiednie pochodne lagrangianu względem współrzędnych uogólnionych. Poza tym nie rozpatrują oni pochodnej macierzy mas względem czasu, występującej w równaniu (15). W artykule zaproponowano obliczenie lagrangianu w standardowy sposób dla całego manipulatora oraz włączono składnik związany z pochodną macierzy mas względem czasu. Z uwagi na duży rozmiar problemu, tj. znaczną liczbę stopni swobody manipulatora, równanie (18) jest dogodne na potrzeby symulacji, ponieważ w sposób jawny należy wyznaczyć macierz mas układu, a następnie dokonać formalnego różniczkowania macierzy mas względem czasu oraz współrzędnych uogólnionych. Zgodnie z równaniem (18), lepiej zastosować algebrę macierzy pomimo że pochodne macierzy względem wektora współrzędnych uogólnionych zawierają wiele zer. W takim przypadku proponuje się programowe wykrywanie zer w tych macierzach w celu uzyskania efektywnie mniejszej liczby operacji matematycznych.

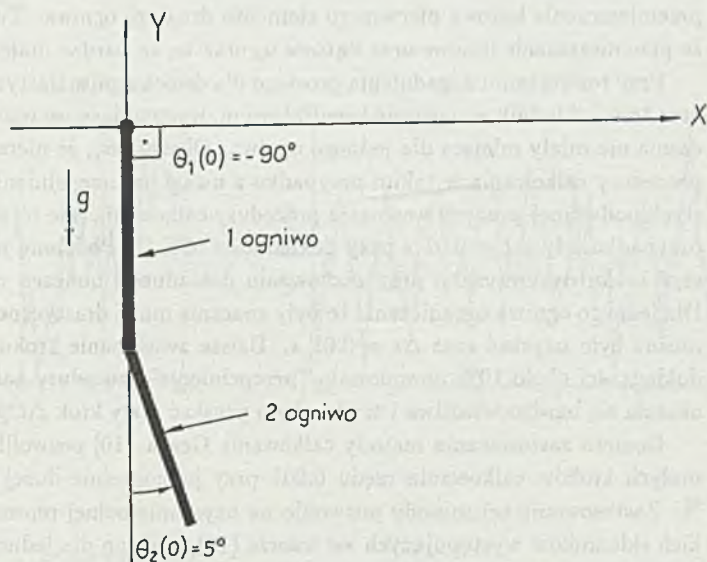
Z równania (18) możemy wyznaczyć wektor przyspieszeń współrzędnych uogólnionych według następującego wzoru

$$\ddot{q} = M^{-1} \left[Q - \dot{M} \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial M}{\partial q} \dot{q} - \frac{\partial V}{\partial q} \right], \quad (19)$$

który jest podstawą do rozwiązania zagadnienia prostego dynamiki przy założonych postaciach wymuszeń położeń, prędkości oraz sił uogólnionych działających w złączach manipulatora i w połączeniach elementów skończonych.

3. Wyniki badań symulacyjnych

Badania symulacyjne przeprowadzono dla dwóch manipulatorów: o jednym oraz o dwóch ogniwach elastycznych. Analizowano konfiguracje manipulatorów typu pojedyncze oraz podwójne wahadło fizyczne, zgodnie z rys. 1. Długość każdego z ogniw wynosi $L_1 = L_2 = 1 \text{ m}$, masa na jednostkę długości $m_1 = m_2 = 5 \text{ kg/m}$, momenty bezwładności $I_1 = I_2 = 5 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$ oraz moduł Younga jest jednakowy dla każdego z ogniw i wynosi $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$.



Rys. 2. Manipulator o dwóch ogniwach elastycznych

Fig. 2. Manipulator with two flexible links

Dla rozwiązania zagadnienia prostego dynamiki posłużono się równaniem (19), do którego zastosowano procedurę całkowania Rungego - Kuty 6 rzędu ze zmiennym krokiem całkowania. Dla manipulatora o jednym ogniwie przyjęto wartość początkową kąta $\theta_1(0) = -80^\circ$ przy założeniu, że siły uogólnione występujące po prawej stronie wzoru (18) są równe zero. Badano zatem przypadek zachowania się układu poddanego działaniu jedynie siły grawitacji. Ogniwo podzielono na dwa elementy skończone o jednakowej długości $l_1 = 0.5 \text{ m}$. Warunki początkowe dla pozostałych współrzędnych uogólnionych oraz wszystkich prędkości uogólnionych przyjęto równe zero. Czas obserwacji przebiegu przyjęto równy 5 s przy kroku dyskretyzacji $\Delta t = 0.01 \text{ s}$. Przypomnijmy w tym miejscu, że krok dyskretyzacji nie jest krokiem całkowania. W czasie Δt procedura całkowania jest

wywolowana wielokrotnie ze zmiennym krokiem całkowania. Przebiegi położenia oraz ich prędkości można znaleźć w pracy [2].

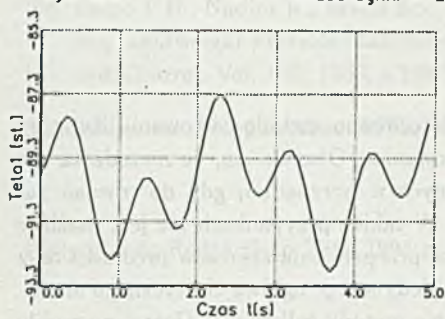
Następnie przebadano rozszerzenie zagadnienia prostego dla manipulatora o dwóch ogniwach elastycznych. Dla współrzędnych uogólnionych przyjęto następujące warunki początkowe: $\theta_1(0) = -90^\circ$, $\theta_2(0) = 5^\circ$, $u_3(0) = u_4(0) = u_5(0) = u_6(0) = w_3(0) = w_4(0) = w_5(0) = w_6(0) = 0$. Przyjęto zerowe prędkości początkowe wszystkich współrzędnych uogólnionych. Podobnie jak poprzednio przyjęto, że w układzie działa tylko siła grawitacji. Czas obserwacji przebiegu wynosił 5 s przy kroku dyskretyzacji $\Delta t = 0.1$ s. Przykładowe przebiegi zaprezentowano na rysunkach 3.1 do 3.6. Na rys.3.1 przedstawiono przebieg współrzędnej uogólnionej θ_1 , natomiast odpowiadającą prędkość na rys.3.2. Na rys.3.3 oraz rys.3.4 przedstawiono przemieszczenie liniowe oraz jego prędkość dla pierwszego elementu skończonego pierwszego ogniwa, natomiast na rys.3.5 oraz rys.3.6. zobrazowano przemieszczenie kątowe pierwszego elementu drugiego ogniwa. Zwróćmy uwagę na fakt, że przemieszczenie liniowe oraz kątowe u_3 oraz w_5 są bardzo małe.

Przy rozwiązaniu zagadnienia prostego dla dwóch ogniw elastycznych pominięto drugi oraz trzeci składnik w nawiasie kwadratowym, występujące we wzorze (19). Takie ograniczenia nie miały miejsca dla jednego ogniwa. Okazało się, że niemożliwe było wykonanie procedury całkowania w takim przypadku z uwagi na przepelnienie zmiennych rzeczywistych podwójnej precyzji wewnątrz procedury całkowania (nie miało to miejsca jedynie w przypadku, gdy $\Delta t = 0.01$ s przy dokładności 50%!). Podobnie nie można było zmniejszyć kroku dyskretyzacji przy zachowaniu dokładności obliczeń rzędu kilku procentów. Dla jednego ogniwa ograniczenia te były znacznie mniej drastyczne. Przy dokładności 3% można było uzyskać czas $\Delta t = 0.01$ s. Dalsze zwiększanie kroku, powyżej 0.05 s, przy dokładności około 10% powodowało "przepelnienie" procedury całkującej. Procedura ta okazała się bardzo wrażliwa i trudno było uzyskać mały krok Δt przy dużej dokładności.

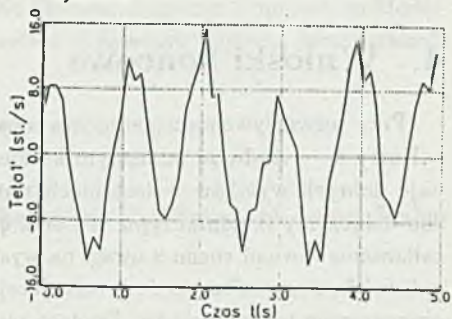
Dopiero zastosowanie metody całkowania Geara [10] pozwoliło na uzyskanie bardzo małych kroków całkowania rzędu 0.001 przy jednocześnie dużej dokładności poniżej 1%. Zastosowanie tej metody pozwoliło na uzyskanie pełnej reprezentacji, to jest wszystkich składników występujących we wzorze (19) zarówno dla jednego oraz dwóch ogniw i większej niż dwa liczby elementów skończonych dla ogniwa. We wszystkich przebiegach zakresy zmian współrzędnych uogólnionych elastycznych są rzędu 0.05 do 0.25 mm lub 0.01° do 0.1°, co jest zgodne z wynikami zawartymi w pracy [9].

Badania symulacyjne rozszerzono na większą liczbę elementów skończonych pojedynczego ogniwa (liczba ich jest ograniczona jedynie pojemnością pamięci operacyjnej). W tym celu wykorzystano elementy programowania obiektowego. Stworzono obiekt typu macierz. Zastosowanie obiektu typu macierz pozwoliło na zręczny zapis wielu skomplikowanych wzorów macierzowych, za pomocą których buduje się równania modelu matematycznego dynamiki robota. Na stworzonym obiekcie można wykonywać wiele operacji matematycznych, podobnie jak na zwykłych liczbach. Oprócz standardowych operacji, takich jak dodawanie, wprowadzono również operacje, które mają specjalistyczne zastosowanie. Przykładem może być operacja sum macierzy mas poszczególnych elementów skończonych, która umożliwia obliczenie macierzy mas całego ogniwa i dalej manipulatora. Uzyskano zadowalające wyniki takich konstrukcji, co potwierdzono w badaniach symulacyjnych.

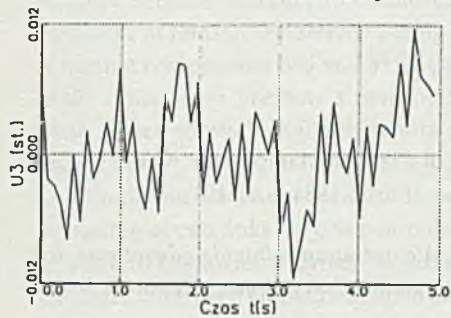
Rys. 3.1 Liczba ogniw = 2



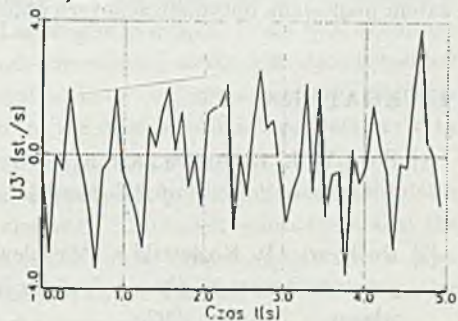
Rys. 3.2



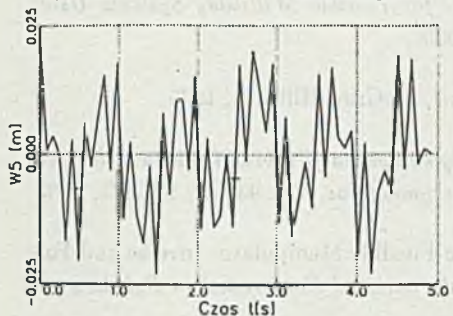
Rys. 3.3 Liczba ogniw = 2



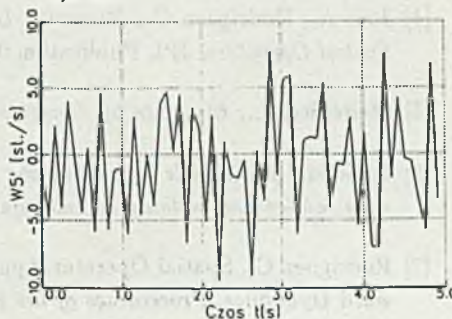
Rys. 3.4



Rys. 3.5 Liczba ogniw = 2



Rys. 3.6



Rys. 3. Wyniki badań symulacyjnych
Fig. 3. Simulation results

4. Wnioski końcowe

Przy rozwiązywaniu zagadnienia prostego zastosowano metodę całkowania Rungego – Kutty 6 rzędu ze zmiennym krokiem całkowania. Okazuje się, że metoda ta nie daje dobrych wyników w badaniach symulacyjnych w przypadku, gdy do równań ruchu dołączymy składniki typu $M\ddot{q}$ oraz $\dot{q}^T \frac{\partial M}{\partial q} \dot{q}$. W takich przypadkach nie jest możliwe całkowanie równań ruchu z uwagi na występujące przepelnienia zakresów prędkości oraz położenia "wewnątrz" procedury całkującej. Dla pojedynczego ogniwa elastycznego nie zaobserwowano takich efektów. Dopiero zastosowanie metody całkowania Geara pozwoliło na rozwiązanie poszczególnych problemów dla dwóch ogniw elastycznych.

Zaproponowane algorytmy nadają się wprost do przetwarzania równoległego, co również jest planowane w dalszych badaniach. Ponadto, badany układ jest układem o wielu stopniach swobody, co wymaga bardzo dużych nakładów obliczeniowych. Interesująca będzie zatem planowana optymalizacja tych obliczeń.

LITERATURA

- [1] Book W.J., Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms, *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 3, nr 3, 1984, s.87-101.
- [2] Dutkiewicz P., Kozłowski K., Wróblewski W., *Algorytmy zagadnienia odwrotnego oraz prostego dynamiki dla manipulatorów z elementami elastycznymi*, Raport z badań własnych, listopad 1992.
- [3] Gawroński W., Kruszewski J., Ostachowicz W., Tarnowski J., Wittbrodt E., *Metoda elementów skończonych w dynamice konstrukcji*, Arkady, Warszawa 1984.
- [4] Jain A., Rodriguez G., *Recursive Dynamics for Flexible Multibody Systems Using Spatial Operators*, JPL Publication 90-26, 1990.
- [5] Meirovitch L., *Elements of Vibration Analysis*, McGraw-Hill Inc., 1975.
- [6] Leniowski R., *Modele matematyczne i metody kompensacji wibracji robota z elastycznym ramieniem, badania symulacyjne i eksperymentalne*, Vol. 93, str. 170-177, 1993.
- [7] Rodriguez G., Spatial Operator Approach to Flexible Manipulator Inverse and Forward Dynamics, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1990, s.845-850.
- [8] Sasiadek J.Z., Srinivasan R., Dynamic Modelling and Adaptive Control of a Single-Link Flexible Manipulator, *J. Guidance*, 1989.

- [9] Usuro P.B., Nadira R., Mahil S.S., A Finite Element/Lagrange Approach to Modelling Lightweight Flexible Manipulators, *Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control*, Vol. 108, 1986, s.198-205.
- [10] Biblioteka matematyczna IMSL, 1985.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Leszek Trybus

Wpłynęło do Redakcji do 30.04.1994 r.

Abstract

This paper presents a finite element/Lagrangian approach to the mathematical modelling of flexible manipulators. Each link of the manipulator is considered as a number of finite elements. For each element, kinetic and potential energies are calculated, and next are summed in order to obtain total Lagrangian of the manipulator. Consequently, equations of motion are derived basing on the Lagrangian principle. In the final equations of motion components $M\dot{q}$ and $\dot{q}^T \frac{\partial M}{\partial \dot{q}} \dot{q}$ are included in contrary to the derivation presented in [9]. This paper presents a new method, based on numerical and analytical considerations, which solves forward dynamics problem for the class of planar manipulators with elastic links.

Simulation results for forward dynamics problem are discussed for planar manipulator consisting of two links with two or more finite elements. Simulation results show, that the solution to the forward dynamics problem is sensitive to the integration procedure. Two methods have been implemented: Runge-Kutha and Gear. The last one is less sensitive with respect o numerical errors and thus gives better results.