

Irena BAGIŃSKA*
Politechnika Wrocławska

WYKORZYSTANIE UOGÓLNIONEJ METODY ELEMENTÓW KINEMATYCZNYCH DO OCENY STATECZNOŚCI ZBOCZY

Streszczenie. W pracy zaprezentowano wykorzystanie uogólnionej Metody Elementów Kinematycznych, bazującej na twierdzeniach stanu granicznego do opisu stateczności zboczy. Przedstawiono algorytm postępowania przy obliczaniu MEK. Wyniki porównano z dwiema innymi metodami opartymi na twierdzeniach nośności granicznej, posługującymi się mechanizmem rotacyjnym i translacyjnym. Rozwiązanie opisano bezwymiarowym wskaźnikiem stateczności $\gamma H_{kr}/c$.

GENERAL KINEMATICAL ELEMENT METHOD USE TO STABILITY ANALYSIS OF SLOPES

Summary. The paper present the use of upper bound technique of general Kinrmatical Element Method of limit analysis to stability slopes. The algorithm of KEM calculation was introduced. The result was compare with two ways of constructing the kinematically admissible collapse mechanisms made of rigid-block were shown. The solution was described with dimensionless the stability factors $\gamma H_{kr}/c$ for KEM and both translational and rotational failure mechanisms.

1. Wstęp

Metody wykorzystywane do oceny stateczności generalnie można podzielić na dwie grupy. Pierwszą z nich stanowią metody równowagi granicznej (metody pasków), które analizują dla przyjętego schematu zniszczenia równowagę graniczną statycznego rozkładu sił wewnętrznych. Na dokładność oceny dokonanej tymi metodami zasadniczy wpływ ma rodzaj przyjętego schematu oraz poczynione uproszczenia i założenia [4, 6].

Drugą grupę stanowią metody oszacowań, wykorzystujące twierdzenia teorii nośności granicznej. W zależności od zastosowanego twierdzenia możliwe jest oszacowanie dolne lub

górną interesującej nas wielkości, co sprawia, iż zawsze wiemy, po której stronie rozwiązania ściśle jest otrzymany wynik [5].

Oszacowanie dolne otrzymamy na mocy pierwszego twierdzenia, które mówi, iż każde statycznie dopuszczalne pole naprężeń, spełniające warunki równowagi wewnętrznej i nie naruszające warunku plastyczności, dostarcza dolnej oceny granicznej. Drugie twierdzenie mówi, iż górną ocenę graniczną otrzymamy przyjmując dowolne kinematycznie dopuszczalne pole prędkości, które spełnia warunki brzegowe [2].

W tym artykule skupiono się na przedstawieniu Metody Elementów Kinematycznych, dającej górną ocenę wskaźnika stateczności zbczy jednorodnych przy założeniu płaskiego stanu odkształcenia. Uzyskane wyniki zostaną porównane z wynikami innych metod oszacowania górnego [1,7].

2. Metoda Elementów Kinematycznych

Metoda Elementów Kinematycznych wraz z jej komputerową implementacją dla prostych zadań została zaproponowana przez P.Gussmanna w 1986 roku [3].

Metoda Elementów Kinematycznych należy do grupy metod wywodzących się z teorii plastyczności i powstała w nawiązaniu do Metody Elementów Skończonych. Dzięki niej możliwe jest, zdaniem Gussmanna [3], określenie górnego oszacowania poszukiwanych wielkości.

Założenia Metody Elementów Kinematycznych:

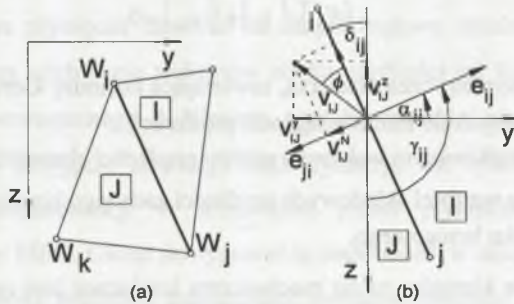
- dobrany mechanizm zniszczenia jest układem sztywnych bloków, będących wyidealizowanym obrazem plastycznych stref deformacji,
- rozważane pole prędkości spełnia kinematyczne warunki brzegowe,
- w mechanizmie nie występują nieciągłości i deformacje związane z powstaniem w ośrodku szczelin i pustek,
- ruch sztywnych brył rozpatrywanego mechanizmu odbywa się jedynie wzdłuż płaszczyzn nieciągłości prędkości,
- na wszystkich płaszczyznach poślizgu składowa normalna wektora skoku prędkości zostaje pominięta, czyli zakłada się, że dylatacja wynosi zero,
- założono, że występujące przemieszczenia są małe, co pozwala rozpatrywać warunki równowagi statycznej w ujęciu chwilowym dla stanu nieodkształconego.

Założono, że grunt jest sztywno-idealnie plastyczny, a jego warunek plastyczności jest wypukły w przestrzeni naprężeń (Coulomba-Mohra). Ponadto, przyjęto stowarzyszone prawo płynięcia.

Pierwszym etapem jest określenie topologii mechanizmu zniszczenia, czyli założenie liczby, rodzaju i wzajemnego ułożenia elementów mechanizmu zniszczenia.

Przyjęty podział wykorzystany jest do wyznaczenia pola powierzchni elementów mechanizmu jako sumy powierzchni elementów podstawowych oraz długości linii kontaktu elementów, będących liniami nieciągłości prędkości, czyli liniami poślizgu.

Dla skuteczności obliczeń ważne jest, aby mechanizm zniszczenia był złożony z niedużej liczby stosunkowo prostych elementów, tak by przy spełnionym warunku kinematycznej zgodności możliwe było przeprowadzenie optymalizacji geometrii. Optymalizacja geometrii polega na znalezieniu położenia poszczególnych punktów siatki mechanizmu, dla których założona funkcja celu osiąga swoje minimum.



Rys. 1. Przykładowy mechanizm zniszczenia dla MEK (a); linia nieciągłości prędkości (b)
Fig. 1. Hypothetical failure mechanism to The MEK (a); line of discontinuity velocity (b)

Drugim etapem jest wyznaczenie składowych prędkości przesuwu elementów wyrażonych w funkcji współrzędnych węzłów siatki mechanizmu zniszczenia.

Dla mechanizmu złożonego z n elementów należy wyznaczyć $2n$ składowych prędkości. Każda płaszczyzna poślizgu daje jedno równanie, dlatego dla rozwiązania kinematyki układu rozpatrywany mechanizm musi składać się z $2n$ płaszczyzn poślizgu. Po uwzględnieniu warunków brzegowych w m płaszczyznach mechanizm powinien zawierać łącznie $2n-m$ płaszczyzn poślizgu.

Dla każdej linii poślizgu zapisywane jest równanie opisujące rzutowanie składowych wektora skoku prędkości na kierunek normalny do linii kontaktu.

$$v_{IJ}^y \cdot \cos \alpha_{ij} + v_{IJ}^z \cdot \cos \gamma_{ij} = v_{IJ}^N \quad (1)$$

W równaniach tych:

$v_{I,J}^y = v_J^y - v_I^y$ - to składowe wektorów skoku prędkości;

$v_{I,J}^z = v_J^z - v_I^z$

$\cos \alpha_{ij} = \frac{z_j - z_i}{d_{ij}} = l_{ij} = -l_{ji}$ - to kosinusy kierunkowe wektorów normalnych;

$\cos \gamma_{ij} = -\frac{y_j - y_i}{d_{ij}} = n_{ij} = -n_{ji}$

$d_{ij} = \sqrt{(z_j - z_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$ - to długość poszczególnych linii poślizgu.

Zgodnie z założeniem, że na wszystkich płaszczyznach poślizgu składowa normalna wektora skoku prędkości zostaje pominięta, a dylatacja wynosi zero, elementarne równanie układu równań (1) można zapisać jako

$$v_I^y \cdot l_{ij} + v_I^z \cdot n_{ij} + v_J^y \cdot l_{ji} + v_J^z \cdot n_{ji} = 0. \quad (2)$$

Po zapisaniu równania (2) dla wszystkich linii kontaktu elementów w płaskim mechanizmie zniszczenia otrzymamy układ równań:

$$[K_K] \cdot \{v\} + \{v_N\} = 0, \quad (3)$$

gdzie:

$[K_K]$ - jest niesymetryczną macierzą, zawierającą kosinusy kierunkowe wektorów normalnych do linii nieciągłości prędkości;

$\{v\}$ - jest poszukiwanym wektorem rzutów prędkości elementów v^y, v^z ;

$\{v_N\}$ - zawiera wartości składowych prędkości zadanego kinematycznego warunku brzegowego.

W celu określenia kierunku ruchu mechanizmu konieczne jest zadanie minimum jednej prędkości v_N , wynikającej z przyjętych warunków brzegowych.

Optymalizacje geometrii przeprowadza się w oparciu o odpowiednio zdefiniowaną funkcję celu wielu zmiennych, której parametrami są współrzędne wierzchołków elementów $W_i(y, z)$. Wszystkim punktom W_i można przyporządkować do dwóch stopni geometrycznej swobody. Każdy stopień swobody będzie kolejną zmienną w funkcji celu. Trójkąt jako najprostsz element może mieć 6 stopni swobody, co przy stosunkowo niedużej liczbie elementów może dać minimalizowanej funkcji celu dużą liczbę zmiennych.

Funkcje celu wyznacza się przy użyciu równania bilansu mocy, w którym moc obciążeń zewnętrznych wraz z siłami ciężkości w stanie statecznym jest mniejsza lub równa mocy dysypowanej wewnątrz ośrodka. W ten sposób powstały bilans mocy, zawierający dysypację niezależną od dopuszczalnego mechanizmu zniszczenia, daje zawsze górną ocenę interesującej nas wielkości.

Równanie bilansu mocy zgodne ze stowarzyszonym prawem płynięcia dla kryterium Coulomba-Mohra można zapisać jako:

$$\sum d_{ij} \cdot c \cdot v_{i,j} \cdot \cos \phi \geq \sum Q \cdot v_i^o + \sum X_i \cdot v_i^z, \quad (4)$$

gdzie:

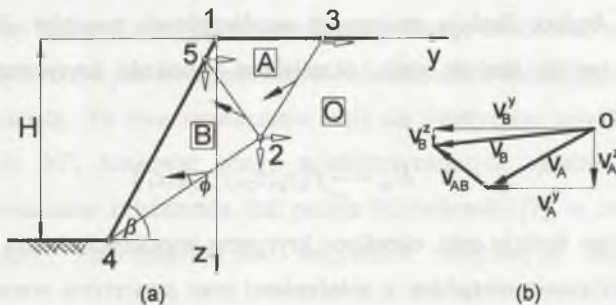
$\sum d_{ij} \cdot c \cdot v_{i,j} \cdot \cos \phi$ - to dysypacja powstała na wszystkich liniach poślizgu;

$\sum Q \cdot v_i^o$ - to praca sił zewnętrznych działających na kierunku prędkości v_i^o ;

$\sum X_i \cdot v_i^z$ - to praca sił masowych działających na pionowych składowych wektorów prędkości poszczególnych elementów.

3. Uogólnienie Metody Elementów Kinematycznych

Kinematycznie dopuszczalny mechanizm zniszczenia zbudowany jest z bloków oddzielonych od siebie liniami nieciągłości prędkości. Konsekwentne zastosowanie stowarzyszonego prawa płynięcia, zarówno na etapie budowy mechanizmu, jak również bilansu mocy, wymusza odchylenie wektorów skoku prędkości od linii nieciągłości o kąt równy kątowi tarcia wewnętrznego ϕ . Niestety, postulat ten kłóci się z jednym z założeń MEK, który mówi o przyjęciu zerowego kąta dylatacji, ale tylko na etapie budowy mechanizmu. Brak konsekwencji w stosowaniu prawa płynięcia może powodować niewiarygodność oceny MEK. Chcąc skorygować tę nieścisłość, w miejsce zerowej wartości składowej normalnej skoku prędkości umieszczono równanie opisujące tę wielkość w funkcji kosinusów kierunkowych wektora normalnego oraz kąta tarcia wewnętrznego.



Rys. 2. Mechanizm zniszczenia (a); hodograf prędkości (b)

Fig. 2. Failure mechanism (a); hodograph of velocity (b)

Stosując uogólnioną MEK, przeprowadzono analizę zmienności wskaźnika stateczności dla jednorodnych zboczy o zmiennym kącie nachylenia oraz zmiennych parametrach gruntowych. Przyjęto do obliczeń dwuelementowy schemat o pięciu stopniach swobody, tak

by w trakcie optymalizacji możliwa była redukcja mechanizmu dwuelementowego na jednoelementowy, co jest szczególnie istotne przy ocenie stateczności stromych zboczy.

Wykazując związek pomiędzy, zmiennym w trakcie optymalizacji (rys.1), kątem δ_j oraz kosinusami kierunkowymi wektora normalnego e_{ij} , można zapisać równanie opisujące składową normalną wektora skoku prędkości. Dla linii poślizgu pomiędzy nieruchomym zboczem a mechanizmem równanie przyjmuje postać:

$$v_{OA}^N = v_A^y \frac{\tan \phi}{\tan \phi \cdot l_{ij} + n_{ij}}; \quad v_{OB}^N = v_B^y \frac{\tan \phi}{\tan \phi \cdot l_{ij} + n_{ij}}, \quad (5)$$

natomiast dla linii pomiędzy elementami:

$$v_{AB}^N = -(v_B^y - v_A^y) \frac{\tan \phi}{\tan \phi \cdot l_{ij} - n_{ij}}. \quad (6)$$

Po zapisaniu układu równań wyznaczono składowe wektorów skoku prędkości, będące w funkcji współrzędnych punktów. Dla rozpatrywanego zadania wynik otrzymano po rozwiązaniu następującej macierzy:

$$\begin{bmatrix} l_{23} - \frac{\tan \phi}{\tan \phi \cdot l_{23} + n_{23}} & n_{23} & 0 & 0 \\ l_{52} - \frac{\tan \phi}{\tan \phi \cdot l_{52} - n_{52}} & n_{52} & -l_{52} + \frac{\tan \phi}{\tan \phi \cdot l_{52} - n_{52}} & -n_{52} \\ 0 & 0 & l_{42} - \frac{\tan \phi}{\tan \phi \cdot l_{42} + n_{42}} & n_{42} \\ l_{31} & n_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_A^y \\ v_A^x \\ v_B^y \\ v_B^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Składowe wektorów prędkości wykorzystuje się do zapisania bilansu mocy. Zgodnie z definicją przyrównując pracę sił zewnętrznych z mocą dysypacji (4), otrzymano równanie bilansu mocy, będące funkcją zmiennych współrzędnych punktów. Po przekształceniach zdefiniowana zostaje funkcja celu, określająca wysokość krytyczną zbocza, będącego w równowadze.

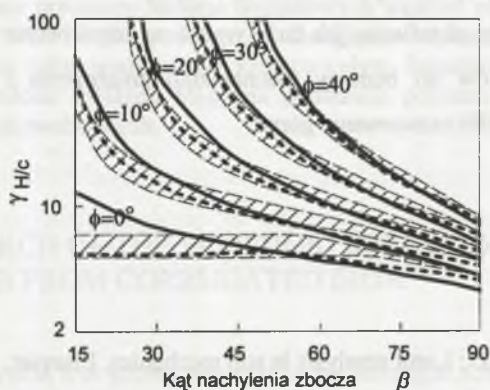
$$H_{kr} = \frac{c}{\gamma} f(y_2, z_2, y_3, y_5, z_5). \quad (8)$$

Optymalizując funkcje celu, określono krytyczną wysokości zbocza. W trakcie obliczeń pominięto rozwiązania niezgodne z założeniami oraz przyjętymi warunkami brzegowymi. Wynikiem są wartości współrzędnych węzłów siatki mechanizmu, dla których $H_{kr} = H_{min}$. Znajomość tej wysokości jest konieczna do obliczenia granicznej wartości bezwymiarowego wskaźnika stateczności [1].

$$N = \frac{H_{kr} \gamma}{c}. \quad (9)$$

4. Wnioski

Przedstawiona analiza stateczności zboczy opiera się na MEK. Posługując się wskaźnikiem stateczności, możliwe jest w dogodny sposób przedstawienie wyników analiz dla zboczy o różnych kątach nachylenia (rys. 3.). Powstały wykres pokazuje zależność zmienności granicznej wartości wskaźnika stateczności od kąta nachylenia zbocza przy zadanych warunkach gruntowych. Otrzymane wyniki wyznaczone uogólnioną MEK porównano z wynikami uzyskanymi przez Michałowskiego innymi metodami oszacowań [7].



Rys. 3. Wykres zmiany wskaźnika stabilności dla jednorodnego zbocza
Fig. 3. Stability factor for homogeneous slopes

Zakresowany obszar powstał na podstawie obliczeń wykonanych metodą translacyjną przy przyjęciu kołowej linii poślizgu. Górna obwiednia pokazuje zmienność wskaźnika, gdy oddziaływanie międzyblokowe jest uwzględnione w obliczeniach, a dolna, gdy oddziaływanie międzyblokowe pominięto. Te dwa rozwiązania stają się identyczne, gdy kąt nachylenia zbocza zbliża się do 90° , ponieważ wtedy najefektywniejszym opisem jest przyjęcie jednoblokowego mechanizmu zniszczenia. Jak podaje Michałowski [7], w zakresowanym obszarze otrzymujemy rozwiązania dla wszystkich możliwych kombinacji sił międzyblokowych.

Przerwaną linią pokazano rozwiązanie bazujące na mechanizmie rotacyjnym o podstawie spirali logarytmicznej. Rozwiązanie to w znacznej części pokrywa się z zakresowanym obszarem rozwiązań mechanizmu translacyjnego. Dopiero przy stromych zboczach ($\beta > 50^\circ$) ocena rotacyjna przyjmuje mniejsze wartości wskaźnika stateczności przy podobnych warunkach gruntowych.

Wyniki uzyskane za pomocą uogólnionej MEK pokazano ciągłą linią, a jej charakter jest zbliżony do rozwiązań translacyjnych. Duże rozbieżności wyników zarówno w stosunku do metody rotacyjnej, jak i translacyjnej pojawiają się dla zboczy o małym kącie nachylenia. Mogą one wynikać z przyjęcia niewłaściwego, dwuelementowego mechanizmu zniszczenia, który, jak widać na wykresie, jest skuteczny jedynie dla zboczy stromych. Dla nich bowiem wartości wskaźnika stateczności są mniejsze niż w analizie translacyjnej oraz rotacyjnej.

Jeśli uznać, że wszystkie metody dają ocenę górną rzeczywistej wartości wskaźnika stateczności, to w przypadku stromych zboczy, gdzie $\beta > 60^\circ$, właśnie rozwiązania uzyskane uogólnioną MEK dają wyniki najbliższe rzeczywistym.

Warte zbadania jest określenie, jak duży wpływ na uzyskiwane wyniki ma zmiana ilości stosowanych elementów do budowy mechanizmu zniszczenia i czy zwiększanie ilości elementów zdoła uściślić oszacowanie górne.

LITERATURA

1. Chen W.F., Liu X.L.: Limit analysis in soil mechanics, Elsevier, Amsterdam 1990.
2. Derski W., Izbicki R.J., Kisiel I. (red.), Mróz Z.: Mechanika skał i gruntów, Mechanika techniczna, t. VII, PWN, Warszawa 1982.
3. Gussmann P.: Die Methode Der Kinematischen Elemente, Baugrundinstitut, Stuttgart 1986.
4. Izbicki R. J.: Kinematycznie dopuszczalna analiza stateczności skarp i zboczy, Arch. Hydr., t. XXIX, z. 3, 1982.
5. Izbicki R. J., Mróz Z.: Metody nośności granicznej w analizie stateczności zboczy, PWN, Warszawa 1976.
6. Madej J.: Metody sprawdzania stateczności zboczy, Wyd. Komunikacji i Łączności, Warszawa 1981.
7. Michalowski R.L.: Slope stability analysis: a kinematical approach, Geotechnique 45, No. 2, 1995, 283-293.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Antoni Florkiewicz