

Tadeusz SZKODNY

Politechnika Śląska

PODPRZESTRZENIE MANIPULATORÓW

Streszczenie: W pracy przedstawiono oryginalną metodę opisu podprzestrzeni typowych manipulatorów [1] o liczbie stopni swobody $N < 6$. Metoda ta pozwala na uproszczenie sprawdzania czy zadany punkt pozycjonowania jest z podprzestrzeni manipulatora. Proponowana metoda jest znacznie prostsza od stosowanych dotychczas.

MANIPULATORS' SUBSPACES

Summary: In the paper an original method of the description of manipulator subspace when the number of degrees of freedom is less than 6 is presented. This method will allow to simplify the testing if the checked point of positioning belongs to manipulator's subspace. The described method is more simple than other methods that has been presented by now.

UNTERRÄUME DER MANIPULATOREN

Zusammenfassung: In der Arbeit wird die originelle Methode der Beschreibung der typischen Manipulatoren mit Freiheitsgradzahl $N < 6$ vorgestellt. Diese Methode erlaubt die Vereinfachung der Prüfung, ob gegebenen Positionierungspunkt im Unterraum des Manipulators liegt. Die vorgeschlagene Methode ist beachtlich einfacher als bisher existierten Methoden.

1. Wstęp

Istotnymi elementami współczesnych elastycznych systemów produkcji są roboty przemysłowe mogące współpracować z systemami sterowania komputerowo zintegrowanej produkcji CIM. Współpracę tę umożliwia oprogramowanie robotów na poziomie zadań TLP [1,6]. Bazą do oprogramowania TLP jest komputerowy model otoczenia i manipulatora robota. Do opracowania komputerowego modelu otoczenia i manipulatora robota jest niezbędny ich opis analityczny. W niniejszej pracy skupimy się na analitycznym opisie podprzestrzeni typowych manipulatorów.

Jednym z podstawowych warunków osiągnięcia przez manipulator zadanych punktów docelowych lub przejściowych [1] jest ich przynależność do podprzestrzeni tego manipulatora. W podręczniku [1], przy omawianiu zadań odwrotnych kinematyki manipulatorów o liczbie stopni swobody $N < 6$, zaleca się badanie proporcji liczbowych między 12 elementami macierzy T lub X [4] opisujących odpowiednio człon roboczy lub element wykonawczy. Dla manipulatorów o 5 stopniach swobody o strukturze takiej, jak manipulatory IRb-6, proponuje się w [1] sprawdzenie, czy zadany punkt jest z ich podprzestrzeni, za pomocą 4 równań (4.84) - (4.87) bez konieczności sprawdzania proporcji liczbowych.

W [3] przedstawiono oryginalne równanie więzów członu roboczego manipulatora IRb-6 o pięciu stopniach swobody. To jedno równanie pozwala zbadać, czy zadany punkt (opisany współrzędnymi kartezjańskimi) jest z podprzestrzeni tego manipulatora. W [4] przedstawiono także 2 równania więzów członu roboczego manipulatora PR-02 o czterech stopniach swobody. Spełnienie tych 2 równań przez współrzędne kartezjańskie zadanego punktu gwarantuje jego przynależność do podprzestrzeni takiego manipulatora PR-02.

Dla manipulatorów o liczbie stopni swobody $N < 6$ można napisać $6-N$ lub mniej równań członu roboczego, w których występują tylko jego współrzędne kartezjańskie. Równania te pełnią rolę "klucza" do podprzestrzeni manipulatorów dla zadanych punktów pozycjonowania. Równania te są uzupełnieniem opisu kinematyki istotnym dla manipulatorów o liczbie stopni swobody $N < 6$ i będziemy je nazywać dalej "kluczowymi".

Do badań przynależności zadanego punktu do podprzestrzeni manipulatora IRb-6 o pięciu stopniach swobody korzystniej będzie stosować jedno równanie "kluczowe" niż wyżej wspomniane 4 równania z podręcznika [1]. Ogólnie można stwierdzić, że badanie równań "kluczowych" jest korzystniejsze od badania proporcji liczbowych między 12 elementami macierzy T_N lub X , gdy liczba równań wynikających z tych proporcji jest większa od liczby równań "kluczowych". Zatem najkorzystniejszymi są równania "kluczowe" dla manipulatorów o 3, 4 lub 5 stopniach swobody. Równania "kluczowe" manipulatorów o 3 stopniach swobody autor tej pracy omawia na wykładach z Podstaw Robotyki dla studentów V semestru na kierunku Automatyka i Robotyka Wydziału Automatyki, Elektroniki i Informatyki Politechniki Śląskiej w Gliwicach.

Celem niniejszej pracy jest próba przedstawienia sposobu tworzenia równań "kluczowych" na przykładzie wybranych manipulatorów o 3, 4 i 5 stopniach swobody.

W drugim punkcie przedstawiony zostanie sposób tworzenia równań "kluczowych" podprzestrzeni opisanych za pomocą układu współrzędnych: kartezjańskiego, sferycznego i cylindrycznego. W trzecim punkcie przedstawione zostaną równania "kluczowe" podprzestrzeni wybranych manipulatorów. W czwartym punkcie sformułowane zostaną wnioski końcowe.

2. Podprzestrzenie podstawowych układów współrzędnych

Przestrzeń położeń i orientacji możemy opisać za pomocą 6 współrzędnych niezależnych. W naszych rozważaniach zastosujemy do opisu tej przestrzeni współrzędne kartezjańskie położeń i współrzędne kątowe z-y-z Eulera orientacji. Prostokątny prawoskrętny układ współrzędnych $x'y'z'$ przemieszczony i przeorientowany względem prostokątnego prawoskrętnego układu współrzędnych xyz będziemy opisywać za pomocą macierzy przekształceń jednorodnych T .

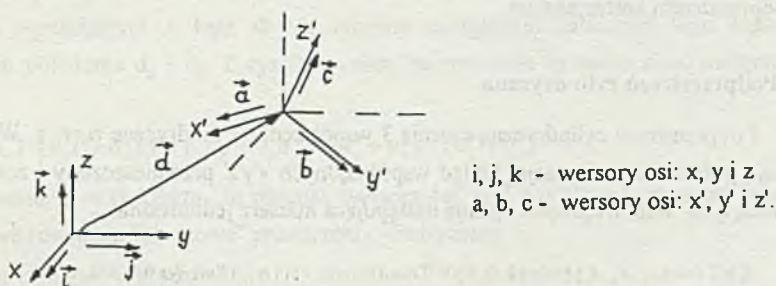
$$T = \text{Trans}(d_x, d_y, d_z) \text{ Euler}(\Phi, \Theta, \Psi) = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{gdzie: } a_x &= \cos\Phi \cos\Theta \cos\Psi - \sin\Phi \sin\Psi, \\ a_y &= \sin\Phi \cos\Theta \cos\Psi + \cos\Phi \sin\Psi, \\ a_z &= -\sin\Theta \cos\Psi. \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} b_x &= -\cos\Phi \cos\Theta \sin\Psi - \sin\Phi \cos\Psi, \\ b_y &= -\sin\Phi \cos\Theta \sin\Psi + \cos\Phi \cos\Psi, \\ b_z &= \sin\Theta \sin\Psi. \end{aligned} \quad (2b)$$

$$\begin{aligned} c_x &= \cos\Phi \sin\Theta, \\ c_y &= \sin\Phi \sin\Theta, \\ c_z &= \cos\Theta. \end{aligned} \quad (2c)$$

Elementy $a_x + a_z$, $b_x + b_z$, $c_x + c_z$ opisują rzuty wektorów \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} równoległych do osi x' , y' i z' . Elementy d_x , d_y , d_z są rzutami wektora położenia \vec{d} początku układu $x'y'z'$. Wersory te i wektor \vec{d} rzutujemy na osie układu odniesienia. Rys.1 ilustruje te układy współrzędnych.



Rys.1. Ilustracja układu współrzędnych xyz i $x'y'z'$
Fig.1. Coordinate system xyz and $x'y'z'$

Każdą przestrzeń położeń i orientacji opisaną mniej niż 6 współrzędnymi będziemy nazywać podprzestrznią. Położenia i orientacje opisane za pomocą współrzędnych:

kartezjańskich, cylindrycznych i sferycznych są odpowiednio z podprzestrzeni: kartezjańskiej, cylindrycznej i sferycznej. Podprzestrzenie te opisują po 3 współrzędne niezależne.

2.1. Podprzestrzeń kartezjańska

Podprzestrzeń kartezjańską opisują trzy współrzędne kartezjańskie x , y , i z . Współrzędne te opisują tylko położenie. Jeśli przyjmiemy, że przy przemieszczaniu układu $x'y'z'$ nie zmienia się orientacja względem układu odniesienia, to postać jednorodna takiego przekształcenia jest następująca:

$$T = \text{Trans}(d_x, d_y, d_z) \text{Euler}(\Phi, \Theta, \Psi) = \text{Trans}(x, y, z) \text{Euler}(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

Macierz (3) opisuje podprzestrzeń kartezjańską. Każdy układ współrzędnych opisany względem układu odniesienia za pomocą macierzy przekształceń jednorodnych o podobnej postaci jest z podprzestrzeni kartezjańskiej. Podobieństwo to polega na zerowych wartościach a_y , a_z , b_x , b_z , c_x , c_y oraz na jedynkowych wartościach a_x , b_y i c_z .

Zamiast badać wartości tych 9 elementów możemy zbadać, czy 3 elementy a_x , b_y i c_z są równe jedynce. Z równań (2.8e,f) w pracy [5] wynika, że tym wartościom elementów a_x , b_y i c_z odpowiadają 2 równania "kluczowe", wynikające z zerowych kątów Eulera.

$$z \Theta = 0 \text{ wynika } c_z = 1, \quad (4a)$$

$$a z \Theta = \Psi = 0 \text{ wynika } b_y = 1. \quad (4b)$$

Równania te jakby zatrzymują 3 stopnie swobody, które pozwalały orientować układ $x'y'z'$. Każdy układ współrzędnych $x'y'z'$, który spełnia równania "kluczowe" (4a) i (4b), jest z podprzestrzeni kartezjańskiej.

2.2. Podprzestrzeń cylindryczna

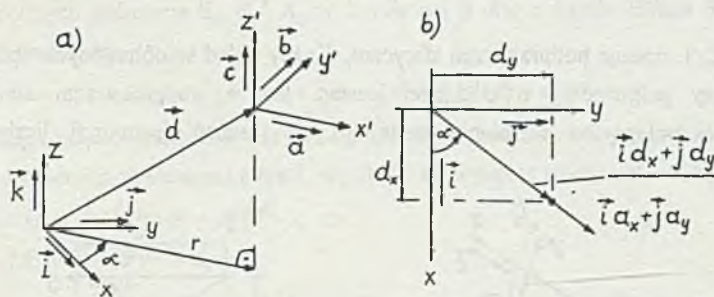
Podprzestrzeń cylindryczną opisują 3 współrzędne cylindryczne α , r , z . Współrzędne te opisują położenie i orientację. Układ współrzędnych $x'y'z'$ przemieszczony i zorientowany za pomocą tych współrzędnych opisuje następująca macierz jednorodna:

$$T = \text{Trans}(d_x, d_y, d_z) \text{Euler}(\Phi, \Theta, \Psi) = \text{Trans}(r \cos \alpha, r \sin \alpha, z) \text{Euler}(\alpha, 0, 0) = \\ = \text{Cyl}(z, \alpha, r) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & r \cos \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & r \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Macierz $Cyl(z, \alpha, r)$ opisuje podprzestrzeń cylindryczną. Każdy układ współrzędnych opisany za pomocą macierzy jednorodnej o podobnej postaci jest z podprzestrzeni cylindrycznej. Podobieństwo to polega na spełnieniu następujących równań (proporcji liczbowych) wynikających z rys.2:

$$\begin{aligned} a_z = 0, \quad b_z = 0, \quad c_z = 1, \quad a_x = b_y, \quad a_y = -b_x, \\ b_y (d_x^2 + d_y^2)^{1/2} = d_x, \quad a_y (d_x^2 + d_y^2)^{1/2} = d_y. \end{aligned} \quad (6)$$

Równania te otrzymaliśmy z macierzy $Cyl(z, \alpha, r)$ przez zastąpienie funkcji geometrycznych kąta α wyrażeniami wynikającymi z pierwszych trzech wierszy czwartych kolumn równania macierzowego (5). Przykładowo $\sin \alpha = d_y / (d_x^2 + d_y^2)^{1/2}$.



Rys.2. Układ współrzędnych cylindryczny

Fig.2. Cylindrical coordinates

Zamiast 7 równań (6) możemy napisać równania "kluczowe" wynikające z zależności współrzędnych położenia d_x , d_y od kąta α i z kątów Eulera $\Phi = \alpha$, $\Theta = 0$ i $\Psi = 0$. Z formuł (2.8e,f) w [5] wynika, że dla $\Theta = 0$ $c_z = 0$. Z równań (2a) wynika, że dla $\Theta = 0$ i $\Psi = 0$ $a_z = 0$. W równaniu wynikającym z kąta $\Phi = \alpha$ musimy uwzględnić zależność tego kąta od współrzędnych położenia d_x i d_y . Z rys.2b wynika, że równanie to może mieć następującą postać:

$$(a_x \vec{i} + \vec{j} a_y) \cdot (d_x \vec{i} + d_y \vec{j}) = a_x d_y + a_y d_x = (a_x^2 + a_y^2)^{1/2} (d_x^2 + d_y^2)^{1/2}$$

Po uwzględnieniu $a_z = 0$ i faktu, że długość wektora $(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)^{1/2} = 1$, możemy napisać ostatecznie dwa równania "kluczowe" przestrzeni cylindrycznej.

$$a_x d_y + a_y d_x = (d_x^2 + d_y^2)^{1/2}, \quad (7a)$$

$$c_z = 1. \quad (7b)$$

Równania te jakby zatrzymują 3 stopnie swobody, które pozwalały orientować niezależnie od położenia.

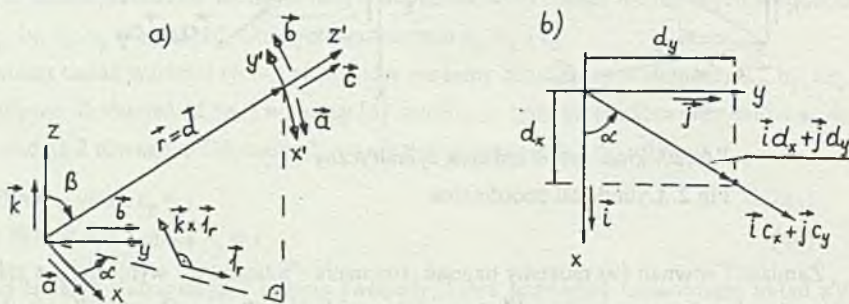
Każdy układ $x'y'z'$ spełniający tylko 2 równania "kluczowe" (7a) i (7b) jest z podprzestrzeni cylindrycznej.

2.3. Podprzestrzeń sferyczna

Podprzestrzeń sferyczną opisują 3 współrzędne sferyczne α , β , r . Współrzędne te opisują położenie i orientację. Układ $x'y'z'$ przemieszczony i zorientowany za pomocą tych współrzędnych opisuje następująca macierz jednorodna:

$$\begin{aligned}
 T &= \text{Trans}(d_x, d_y, d_z) \text{Euler}(\Phi, \Theta, \Psi) = \\
 &= \text{Trans}(r \cos \alpha \sin \beta, r \sin \alpha \sin \beta, r \cos \beta) \text{Euler}(\alpha, \beta, 0) = \\
 &= \text{Sph}(\alpha, \beta, r) = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha & \cos \alpha \sin \beta & r \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha & \sin \alpha \sin \beta & r \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & r \cos \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{8}$$

Macierz $\text{Sph}(\alpha, \beta, r)$ opisuje podprzestrzeń sferyczną. Każdy układ współrzędnych opisany za pomocą macierzy jednorodnej o podobnej postaci jest z podprzestrzeni sferycznej; podobieństwo to polega na spełnieniu następujących równań (proporcji liczbowych) wynikających z rys.3:



\vec{r} - wersor równoległy do wektora $d_x \vec{i} + d_y \vec{j}$

Rys.3. Układ współrzędnych sferyczny

Fig.3. Spherical coordinates

$$a_x (d_x^2 + d_y^2)^{1/2} (d_x^2 + d_y^2 + d_z^2)^{1/2} = d_x d_z,$$

$$a_y (d_x^2 + d_y^2)^{1/2} (d_x^2 + d_y^2 + d_z^2)^{1/2} = d_y d_z,$$

$$a_z (d_x^2 + d_y^2 + d_z^2)^{1/2} = -(d_x^2 + d_y^2)^{1/2},$$

$$b_x (d_x^2 + d_y^2)^{1/2} = -d_y,$$

$$b_y (d_x^2 + d_y^2)^{1/2} = d_x,$$

$$b_z = 0$$

$$\begin{aligned}
 c_x(d_x^2 + d_y^2)^{1/2}(d_x^2 + d_y^2 + d_z^2)^{1/2} &= d_x(d_x^2 + d_y^2)^{1/2}, \\
 c_y(d_x^2 + d_y^2)^{1/2}(d_x^2 + d_y^2 + d_z^2)^{1/2} &= d_y(d_x^2 + d_y^2)^{1/2}, \\
 c_z(d_x^2 + d_y^2 + d_z^2)^{1/2} &= d_z.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Równania te otrzymaliśmy z macierzy $Sph(\alpha, \beta, r)$ przez zastąpienie funkcji trygonometrycznych kątów a i b odpowiednimi wyrażeniami, wynikającymi z pierwszych trzech wierszy czwartych kolumn równania macierzowego (8). Np.

$$\cos \beta = d_z / (d_x^2 + d_y^2 + d_z^2)^{1/2} \quad \text{itp.}$$

Zamiast 9 równań (9) możemy napisać równania "kluczowe" wynikające z zależności współrzędnych położenia d_x, d_y, d_z od kątów α i β oraz z kątów Eulera $\Phi = \alpha, \Psi = 0$. Z rys.3b widać, że

$$(c_x \vec{i} + c_y \vec{j}) \cdot (d_x \vec{i} + d_y \vec{j}) = c_x d_x + c_y d_y = (c_x^2 + c_y^2)^{1/2} (d_x^2 + d_y^2)^{1/2} \tag{10}$$

Jest to zapis zależności kąta $\Phi = \alpha$ od współrzędnych położenia. Kąt $\Theta = \beta$ jest także zależny od współrzędnych położenia i z rys.3 wynikają następujące równania:

$$\cos \beta = d_z / (d_x^2 + d_y^2 + d_z^2)^{1/2} = c_z \Rightarrow \tag{11}$$

$$c_z (d_x^2 + d_y^2 + d_z^2)^{1/2} = d_z \tag{12}$$

Kąt Ψ wyznaczają wersory \vec{b} i $\vec{k} \times \vec{l}$ zilustrowane na rys.3. Ponieważ $\Psi = 0$, to wersory te są równe i słuszne jest następujące równanie:

$$\vec{b} \cdot (\vec{k} \times \vec{l}) = \vec{b} \cdot \left(\vec{k} \times \frac{d_x \vec{i} + d_y \vec{j}}{(d_x^2 + d_y^2)^{1/2}} \right) = 1 \Rightarrow \tag{13}$$

$$b_y d_x - b_x d_y = (d_x^2 + d_y^2)^{1/2} \tag{14}$$

Równania (10) i (12) można zapisać w postaci jednego następującego równania:

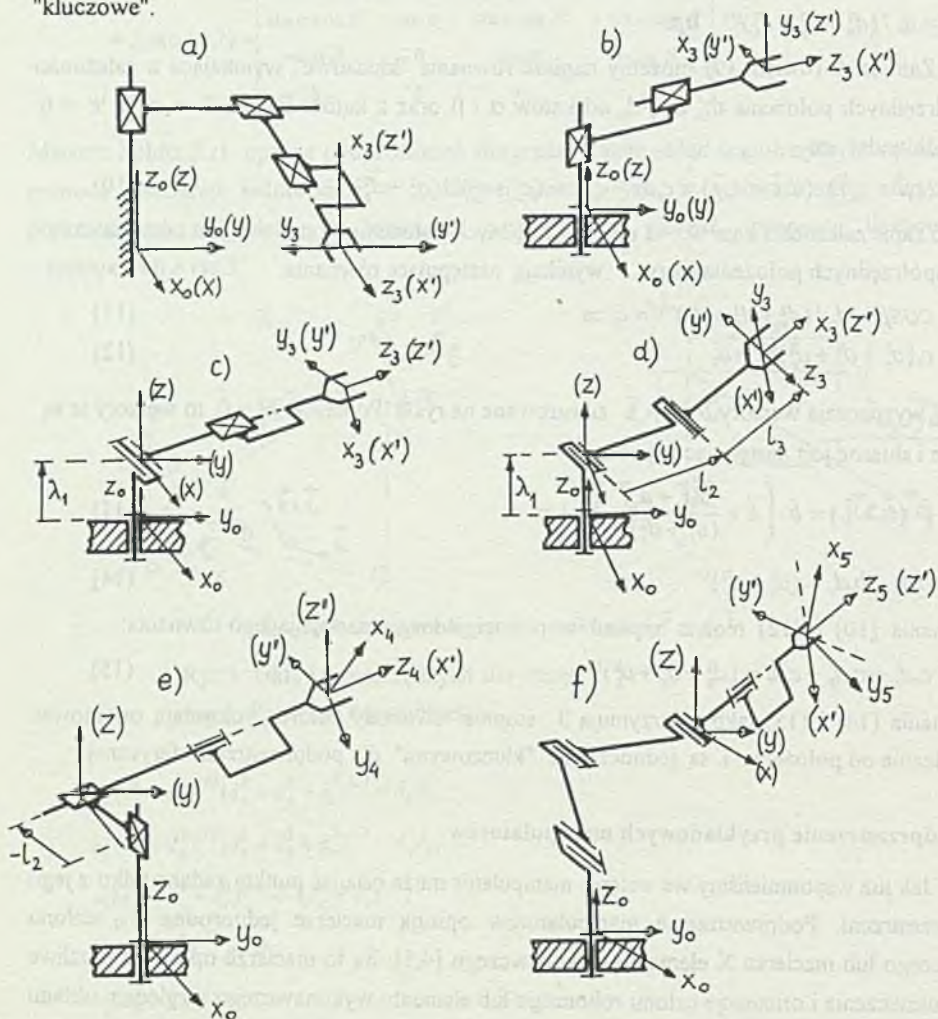
$$c_x d_x + c_y d_y + c_z d_z = (d_x^2 + d_y^2 + d_z^2)^{1/2} \tag{15}$$

Równania (14) i (15) jakby zatrzymują 3 stopnie swobody które pozwalają orientować niezależnie od położenia i są jednocześnie "kluczowymi" dla podprzestrzeni sferycznej.

3. Podprzestrzenie przykładowych manipulatorów

Jak już wspomnieliśmy we wstępie manipulator może osiągać punkty zadane tylko z jego podprzestrzeni. Podprzestrzenie manipulatorów opisują macierze jednorodne T_N członu roboczego lub macierze X elementu wykonawczego [4,5]. Są to macierze opisujące możliwe przemieszczenia i orientacje członu roboczego lub elementu wykonawczego względem układu bazowego. Macierze te opisuje N współrzędnych naturalnych członów [4,5]. Zadane punkty które ma osiągnąć manipulator opisujemy za pomocą współrzędnych kartezjańskich d_x, d_y, d_z i kątów Eulera Φ, Θ i Ψ (patrz równanie (1), macierz T), niezależnie od jego struktury

kinematycznej. Jak sprawdzić, czy zadany punkt jest z podprzestrzeni manipulatora? Można sprawdzić, czy są spełnione pewne proporcje liczbowe między elementami pierwszych trzech wierszy macierzy T (patrz równania (1) i (2a:c)), opisanej za pomocą znanych współrzędnych danego punktu. Proporcje te wynikają ze struktury macierzy T opisanej za pomocą współrzędnych naturalnych członów manipulatora. Sposób tworzenia takich równań dla podprzestrzeni kartezjańskiej, cylindrycznej i sferycznej (równania (6) i (9)) poznaliśmy w poprzednim punkcie. Proszym opisem tych podprzestrzeni są odpowiednie równania "kluczowe".



Rys. 4. Schematy kinematyczne manipulatorów o strukturach: a) PPP, b) OPP, c) OOP, d) OOO, e) OPPO, f) OOOOO. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, l_1, l_2, l_3$ - parametry Hartenberga - Denavita

Fig. 4. Kinematic details of manipulators of following structure: a) PPP, b) OPP, c) OOP, d) OOO, e) OPPO, f) OOOOO. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, l_1, l_2, l_3$ - Denavit - Hartenberg parameters

W tym punkcie przedstawimy przykładowe manipulatory mające podprzestrzenie: kartezjańską, cylindryczną, quasi-cylindryczną, sferyczną i quasi-sferyczną. Podprzestrzenie te opiszemy za pomocą równań "kluczowych" wynikających z równań (4a), (4b), (7a), (7b), (14) i (15). Rys.4 przedstawia schematy kinematyczne przykładowych manipulatorów. Na rysunku tym zilustrowano układy bazowe x_0, y_0, z_0 i układy współrzędnych opisujące człony robocze. Z członami roboczymi skojarzono układy współrzędnych zgodnie z zapisem Hartenberga - Denavita [2,4]. Do opisu podprzestrzeni z rys.4 przyjmujemy, że zadane punkty będzie opisywać macierz T (równanie (1) i rys.4a). Rys.4a ilustruje schemat manipulatora o trzech stopniach swobody o strukturze PPP. Ze struktury kinematycznej tego manipulatora wynika, że ma podprzestrzeń kartezjańską. Opis układu $x'y'z'$ względem układu xyz za pomocą równań (4a) i (4b) jest także opisem tej podprzestrzeni. Orientacja i położenie zadanego punktu powinny być możliwe do osiągnięcia przez układ x, y, z , i dlatego w równaniach (4a) i (4b) c_z musimy zastąpić przez a_z (osi z' odpowiada oś $-y_3$ na rys.4a), a b_y musimy zastąpić przez $-b_y$ (osi y' odpowiada oś $-y$). Po tych podstawieniach otrzymamy równania "kluczowe" manipulatora PPP w następującej postaci:

$$a_z = 1, b_y = -1. \quad (16)$$

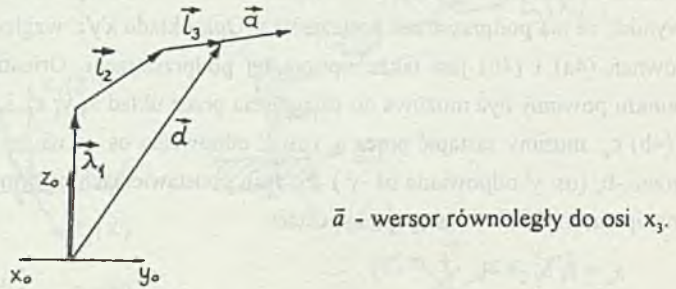
Rys.4b ilustruje schemat manipulatora o 3 stopniach swobody o strukturze OPP. Ze struktury kinematycznej tego manipulatora wynika, że ma on podprzestrzeń cylindryczną. Opis układu $x'y'z'$ względem układu xyz za pomocą równań (7a) i (7b) jest także opisem tej podprzestrzeni. Opis tej podprzestrzeni za pomocą układu $x_3y_3z_3$ otrzymamy po zastąpieniu rzutów wersora \bar{a} odpowiednimi składowymi wersora \bar{c} (osi x' odpowiada oś z_3 na rys.4b) i zastąpieniu c_z przez b_z (osi z' odpowiada oś y_3). Po tych podstawieniach w równaniach (7a) i (7b) otrzymamy następujące równania "kluczowe" tego manipulatora:

$$c_x d_x + c_y d_y = (d_x^2 + d_y^2)^{1/2}, \quad b_z = 1. \quad (17)$$

Rys.4c ilustruje schemat manipulatora o 3 stopniach swobody o strukturze OOP. Ze struktury kinematycznej tego manipulatora wynika, że ma on podprzestrzeń sferyczną. Opis układu $x'y'z'$ względem układu xyz za pomocą równań (14) i (15) jest także opisem tej podprzestrzeni. Z rys.4c wynika, że układ $x'y'z'$ odpowiada układowi x_3, y_3, z_3 . Układ xyz jest przesunięty o λ_1 wzdłuż osi z_0 układu bazowego. Ponieważ chcemy opisać podprzestrzeń tego manipulatora względem układu bazowego, to musimy w równaniach (14) i (15) zastąpić d_z przez $d_z - \lambda_1$. Po tym podstawieniu otrzymamy następujące równania "kluczowe" tego manipulatora:

$$b_x d_x - b_y d_y = (d_x^2 + d_y^2)^{1/2}, \quad c_x d_x + c_y d_y + c_z (d_z - \lambda_1) = [d_x^2 + d_y^2 + (d_z - \lambda_1)^2]^{1/2} \quad (18)$$

Rys.4d ilustruje schemat manipulatora o 3 stopniach swobody o strukturze OOO. Ze struktury kinematycznej tego manipulatora wynika, że ma on podprzestrzeń podobną do sferycznej lecz nie sferyczną. Z rys.4d widać, że układ $x'y'z'$ możemy opisać względem układu xyz za pomocą współrzędnych sferycznych. Układ współrzędnych xyz ma osie równoległe do odpowiednich osi układu bazowego, a położenie jego początku jest ruchome i porusza się po kuli o promieniu l_2 . Dlatego nazwijmy tę podprzestrzeń quasi sferyczną. Przed wykorzystaniem równań (14) i (15) musimy wyrazić wektor \vec{l}_3 i wersory układu $x'y'z'$ poprzez współrzędne układu $x_0y_0z_0$ w układzie bazowym.



Rys. 5. Opis wektorowy manipulatora z rys.4d

Fig. 5. Vectorical description of manipulator from fig. 4.d

Z rys.5 wynika, że

$$\vec{l}_2 = -\vec{\lambda}_1 + \vec{d} - \vec{l}_3 \quad (19a)$$

oraz $\vec{l}_3 \parallel \vec{a}$. Teraz w równaniach (14) i (15) wektorowi \vec{d} odpowiada wektor \vec{l}_3 , a wersorom $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ wersory $-\vec{b}, -\vec{c}, \vec{a}$ (patrz rys.4d). Dlatego równanie (15) będzie miało postać

$$\vec{l}_3 \cdot \vec{a} = l_3. \quad (19b)$$

Równanie to wykorzystamy do opisu powierzchni kuli, po której porusza się układ xyz .

Z równań (19a) i (19b) wynika

$$\vec{l}_2 = \vec{d} - l_3 \vec{a} - \vec{\lambda}_1 = (d_x - l_3 a_x) \vec{i}_0 + (d_y - l_3 a_y) \vec{j}_0 + (d_z - l_3 a_z - \lambda_1) \vec{k}_0,$$

gdzie $\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0$ - wersory układu bazowego. Zatem równanie tej kuli będzie miało postać

$$(d_x - l_3 a_x)^2 + (d_y - l_3 a_y)^2 + (d_z - l_3 a_z - \lambda_1)^2 = l_2^2. \quad (20a)$$

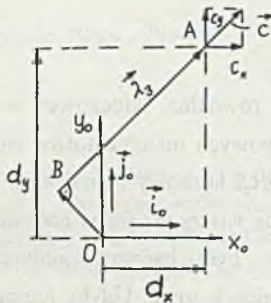
Drugie równanie opisujące podprzestrzeń manipulatora z rys.4d wynika z równania (14).

Wersor \vec{l}_1 z rys.3 możemy opisać identycznie jak w równaniu (13) i dlatego równanie (14) ma postać (oś y' odpowiada osi $-z_0$ na rys.4d)

$$c_x d_y - c_y d_x = (d_x^2 + d_y^2)^{1/2}. \quad (20b)$$

Równania (20a) i (20b) są "kluczowymi" dla manipulatora z rys.4d.

Rys.4e ilustruje schemat manipulatora o czterech stopniach swobody o strukturze OPPO. Ze struktury kinematycznej tego manipulatora wynika, że ma on podprzestrzeń podobną do cylindrycznej. Z rys.4e wynika, że układ $x'y'z'$ może być opisany za pomocą współrzędnych cylindrycznych względem układu xyz . Osie układu xyz są odpowiednio równoległe do osi układu bazowego $x_0y_0z_0$. Początek układu xyz może poruszać się po powierzchni bocznej walca o promieniu $-l_2$ ($l_2 < 0$) i osi pokrywającej się z osią z_0 . Dlatego nazwiemy tę podprzestrzeń quasi-cylindryczną. Z rys.6 wynika, że wektor $\vec{\lambda}_3$ pełni rolę wektora \vec{d} w równaniu (7a). Z rys.4e widać, że wersorowi \vec{a} w równaniu (7a) odpowiada wersor \vec{c} osi z_1 . Równanie (7b) jest tu nieprzydatne, gdyż struktura tego manipulatora nie krępuje obrotu wokół osi z_4 .



B - początek układu xyz z rys.4e
 A - początek układu $x'y'z'$ z rys.4e
 $\vec{OB} = -l_2 \cdot \vec{b}_0, \vec{j}_0$ - wersory układu $x y$

Rys.6. Ilustracja opisu schematu kinematycznego manipulatora z rys.4e

Fig.6. Description of the kinematic scheme of the manipulator presented on the fig. 4e

Z rys.6 wynika następujące równanie dla wektora $\vec{\lambda}_3$:

$$\vec{\lambda}_3 = (d_x - l_2 c_y) \vec{b}_0 + (d_y + l_2 c_x) \vec{j}_0.$$

Odpowiednikiem równania (7a) będzie iloczyn skalarny $\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{c} = \lambda_3$. Zatem równanie "kluczowe" dla manipulatora z rys.4e będzie miało postać

$$(d_x - l_2 c_y) c_x + (d_y + l_2 c_x) c_y = [(d_x - l_2 c_y)^2 + (d_y + l_2 c_x)^2]^{1/2} \tag{21}$$

Rys.4f ilustruje schemat manipulatora antropomorficznego o pięciu stopniach swobody o strukturze OOOO. Ze struktury kinematycznej tego manipulatora wynika, że ma on podprzestrzeń podobną do sferycznej. Z rys.4f widać, że układ $x'y'z'$ można opisać za pomocą współrzędnych sferycznych w układzie xyz . Dlatego tę podprzestrzeń nazwiemy quasi-sferyczną. Osie układu xyz są odpowiednio równoległe do osi układu bazowego. Położenie początku układu xyz jest dowolne (oczywiście w przestrzeni roboczej tego manipulatora). Zatem równanie (15) jest tu nieprzydatne. Struktura tego manipulatora pozwala na obrót wokół osi z' i dlatego równanie (14) jest tu też nieprzydatne. Układ $x_3y_3z_3$ może być orientowany wokół osi x' o kąt Eulera Φ , zależny od położenia jego początku, podobnie jak

układ $x'y'z'$ z rys.3 wokół osi z ($\Phi = \alpha$). Dlatego można by wykorzystać równanie (10). Równanie to nie dopuszcza żeby wektory $\vec{i}d_x + \vec{j}d_y$ i \vec{c} były skierowane przeciwnie, podczas gdy struktura kinematyczna manipulatora z rys.4f pozwala na to. Dlatego możemy napisać następujące proporcje dla układu x,y,z :

$$\frac{d_x}{d_y} = \frac{\pm c_x}{\pm c_y}$$

Znak + odpowiada zgodnie skierowanym wektorom $\vec{i}d_x + \vec{j}d_y$ i \vec{c} , znak - odpowiada przeciwnie skierowanym tym wektorom. Stąd otrzymamy następujące równanie "kluczowe" podprzestrzeni manipulatora z rys.4f:

$$c_x d_y - c_y d_x = 0 \quad (22)$$

4. Wnioski końcowe

Z pracy tej wynika, że przedstawione równania "kluczowe" w zasadniczy sposób upraszczają analityczny opis podprzestrzeni typowych manipulatorów stosowany dotychczas w literaturze [1]. Badanie odpowiednich proporcji liczbowych macierzy T opisującej zadany punkt jest szczególnie uciążliwe, gdy pojawia się więcej niż jedna para obrotowa w strukturze manipulatora. Potwierdzeniem tego może być badanie podprzestrzeni sferycznej w punkcie 2.3, gdzie występują dwie współrzędne kątowe. Gdyby nie równania "kluczowe" (14) i (15), należałoby sprawdzać 9 równań (9). Pisanie podobnych równań dla manipulatorów o 3 i więcej parach obrotowych jest trudne. Opis podprzestrzeni takich manipulatorów przedstawiliśmy za pomocą tylko dwu lub jednego równania "kluczowego".

Inną niewątpliwą zaletą równań "kluczowych" jest prostota ich tworzenia. Niepotrzebne są równania kinematyki, wystarczy tylko znajomość struktury kinematycznej manipulatora.

Z równania (21) i rys.4e wynika, że można uprościć opis podprzestrzeni manipulatora PR-02 omawianego przez autora tej pracy w [4].

Dotychczas nazywane w pracach [4,5,7] równania więzów członu roboczego można nazwać krótko równaniami "kluczowymi".

Równania "kluczowe" w postaci różniczkowej są również skutecznym narzędziem opisu różniczkowego podprzestrzeni manipulatorów.

Równania "kluczowe" pozwalają w istotny sposób upraszczać komputerowy model otoczenia robotów, a tym samym upraszczać projektowanie języka TLP.

LITERATURA

- [1] Craig J.J.: Wprowadzenie do robotyki. PWN, Warszawa 1993.
- [2] Olędzki A.: Podstawy teorii maszyn i mechanizmów. PWN, Warszawa 1987.

- [3] Szkodny T.: Kinematyczna dekompozycja różniczkowa ruchu członu roboczego robota IRb-6. ZN Pol.Śl., nr 96, Gliwice 1988.
- [4] Szkodny T.: Manipulatory robotów przemysłowych - modele matematyczne. Skrypt Pol.Śl., nr 1530, Gliwice 1990.
- [5] Szkodny T.: Modele matematyczne ruchu manipulatorów robotów przemysłowych na potrzeby sterowania. ZN Pol.Śl., nr 112, Gliwice 1993.
- [6] Szkodny T.: Wybrane problemy sterowania inteligentnym robotem przemysłowym w Elastycznych Systemach Produkcji. ZN AGH, s. Automatyka, nr 64, Kraków 1993.
- [7] Szkodny T.: Modelling of Kinematic of IRb-6 Manipulator. Journ. Computer & Mathematics with Applications, Washington Univ. (zaakceptowane do druku).

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Antoni Woźniak

Wpłynęło do Redakcji do 30.04.1994 r.

Abstract

In the paper an original method of a description of subspace of typical manipulators is presented. In his book, Craig discusses the problem of inverse kinematics for manipulators which number of degrees of freedom is less than 6. He also proposes research of numerical proportions between twelve elements of T_N or X matrix [4] which describes the end-effector or the actuator of robot.

For manipulators with number of degrees of freedom less than 6, it is possible to write 6-N or less equations of end-effector which includes only its Cartesian coordinates.

These equations are essential and complete the kinematics description for points of positioning which are given. The key-equations are more simple than the description proposed by Craig [1].

We show that manipulators with 3,4 or 5 degrees of freedom can be described at most with two-key-equations. Doubtless it is a simpler way of description of subspaces than by means of numerical proportions proposed by Craig.