

Robert TOCZKIEWICZ\*  
Politechnika Wroclawska

## MODELE ANALITYCZNE I NUMERYCZNE DŹWIGARA PODATNIE ZESPOLONEGO

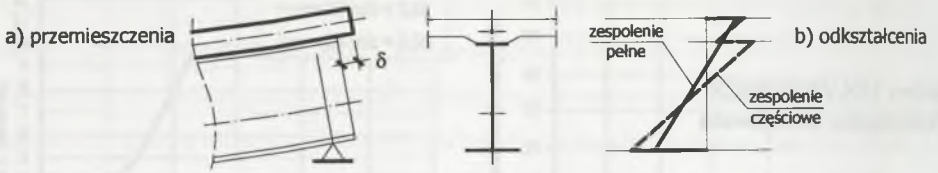
**Streszczenie.** W artykule przedstawiono zjawisko zespolenia podatnego występujące w dźwigarach zespolonych przy zastosowaniu łączników sworzniowych. Na podstawie przeprowadzonych analiz pokazano wpływ stopnia sztywności zespolenia na wybrane wielkości statyczne, wyężenie oraz przemieszczenia dźwigara. Przedstawiono parametry określające stopień zespolenia, model analityczny, opisujący zjawisko oraz zaproponowano modele MES belki zespolonej podatnie.

## ANALYTICAL AND NUMERICAL MODELS OF COMPOSITE BEAM WITH FLEXIBLE CONNECTION

**Summary.** The paper concerns partial interaction in steel-concrete composite beams with flexible shear studs. Analysis regarding influence of various levels of partial interaction between steel beam and concrete slab on internal forces, strength and displacements of beam are presented. Parameters characterizing level of interaction are given. Analytical model of the phenomenon and FEM models of the beam with flexible connection are proposed.

### 1. Wprowadzenie

Konstrukcja zespolona składa się z elementów wykonanych z materiałów o różnych cechach fizycznych, trwale współpracujących ze sobą dzięki łącznikom. Klasycznym układem zespolonym jest mostowy dźwigar utworzony z belki stalowej współpracującej z żelbetową płytą pomostową. Elementami decydującymi o skuteczności współdziałania obu tych części jako przekroju zespolonego są łączniki przenoszące siły powstające w styku. Stosowane obecnie powszechnie sworznie zalicza się do tzw. łączników podatnych. Ich sztywność nie zapobiega możliwości powstania poślizgu, rozumianego jako przemieszczenie się płyty żelbetowej względem powierzchni pasa belki stalowej [1] (rys. 1).



Rys. 1. Deformacje belki podatnie zespolonej  
Fig. 1. Deformations of composite beam with flexible connection

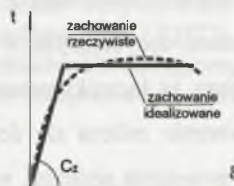
Sztywność połączenia definiuje się jako stosunek siły działającej w styku do wartości powstałego przemieszczenia. Konsekwencją podatności zespolenia jest redystrybucja sił wewnętrznych pomiędzy częściami przekroju i redukcja sztywności giętej dźwigara. Na sztywność połączenia wpływa wiele czynników, m. in.: ukształtowanie łączników, własności betonu płyty pomostowej [2], rodzaj obciążenia [1, 3], udział sił przyczepności i tarcia.

## 2. Opis stopnia zespolenia

Podstawowym parametrem określającym sztywność połączenia jest stosunek siły w styku,  $t$  rozłożonej na długości połączenia, do wywołanego nią poślizgu  $\delta$ , co wyraża zależność

$$C_z = \frac{t}{\delta} \quad (1)$$

Wartość  $C_z$  jest trudna do jednoznacznego określenia i, jak wspomniano, wpływa na nią wiele czynników o charakterze losowym. Sztywność zmienia się także wraz z poziomem obciążenia. O ile w zakresie obciążeń użytkowych (znacznie mniejszych od nośności styku) można ją traktować jako stałą, o tyle przy większych obciążeniach (bliskich niszczącym połączenie) jej wartość szybko maleje (wskutek uplastycznienia sworznia narasta wartość poślizgu w styku). W analizach przyjęto model bilinearny opisujący funkcję  $\delta(t)$  jak na rys.2, a analizę zagadnienia przeprowadzono w obszarze liniowosprężystym.



Rys. 2. Zależność  $\delta(P)$  połączenia podatnego  
Fig. 2.  $\delta(P)$  dependence for flexible connection

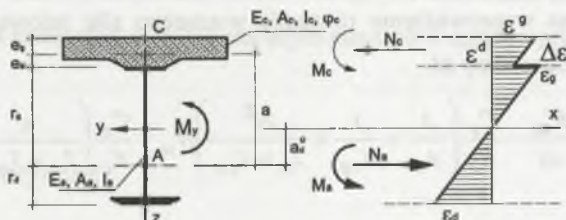
Parametrem opisującym poziom podatności połączenia, który wykorzystano w analizie rozpatrywanego zjawiska, jest współczynnik określony na podstawie różnicy odkształceń w styku części stalowej i betonowej  $\Delta\varepsilon$  odniesionych do odkształceń  $\varepsilon_g$  powstałych na górnej krawędzi dźwigara stalowego, jak na rys. 3, a więc wyrażony za pomocą wzoru

$$\beta = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_g} . \quad (2)$$

Zmiana sztywności zespolenia wpływa na rozkład sił wewnętrznych zarówno w belce, jak i płycie betonowej. Parametr określający stosunek sił wewnętrznych w dźwigarze stalowym (siły osiowej  $N_a$  oraz momentu zginającego  $M_a$ ) w przekroju można zdefiniować jako

$$\mu = \frac{a \cdot N_a}{M_a} . \quad (3)$$

### 3. Model analityczny zagadnienia



Rys. 3. Geometria, siły i odkształcenia w przekroju zespolonym

Fig. 3. Geometry, forces and strains in composite cross-section

Do analizy redystrybucji sił wewnętrznych w dźwigarze przyjęto następujące założenia:

- zasada płaskich przekrojów spełniona jest odrębnie dla każdej części przekroju;
- beton płyty pomostowej nie ulega zarysowaniu;
- części składowe dźwigara są pryzmatyczne.

Geometrię przekroju poprzecznego odniesiono do środków ciężkości belki stalowej i płyty pomostowej, znajdujących się w odległości  $a$  jak na rys. 3. Na dwa układy (płytę i belkę) rozdzielono również wypadkowe siły przekrojowe. Charakterystyki geometryczne przekroju zespolonego odniesiono do parametrów belki stalowej przez zastosowanie współczynnika

$$n_\varphi = \frac{E_a}{E_c} (1 + \rho\varphi_c) \quad (4)$$

uwzględniającego zmienną w czasie wartość modułu sprężystości betonu [1], gdzie  $\rho$  jest współczynnikiem Trosta, a  $\varphi_c$  miarą pełzania betonu płyty.

Siły osiowe i momenty zginające w płycie i belce wywołują odkształcenia jednostkowe w styku tych elementów o wartościach

$$\varepsilon_g = \frac{N_a}{E_a A_a} - \frac{M_a r_g}{E_a I_a} \quad (5)$$

oraz

$$\varepsilon^d = \frac{N_c}{E_c A_c} + \frac{M_c e_d}{E_c I_c} \quad (6)$$

Przyjęcie warunku odkształceń w styku płyty i belki

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_g - \varepsilon^d = \frac{d\delta}{dx} \quad (7)$$

oraz wykorzystanie równania zgodności krzywizn dźwigara zginanego

$$\frac{M_y}{E_a I_y} = \frac{M_a}{E_a I_a} = \frac{M_c}{E_c I_c} (1 + \rho\varphi_c) \quad (8)$$

przy jednoczesnym uwzględnieniu warunków równowagi sił wewnętrznych w obu częściach przekroju pozwala na wyprowadzenie równania wiążącego siłę osiową  $N_a$  z momentem zginającym przekrój zespolony  $M_y$

$$\frac{d^2 N_a}{dx^2} - \frac{1}{C_z} \frac{dN_a}{dx} \frac{dC_z}{dx} - \frac{C_z}{E_a} \left( \frac{1}{A_a} + \frac{1}{A_c \varphi} + \frac{a^2}{I_a + I_c \varphi} \right) N_a + \frac{C_z}{E_a} \left( \frac{a}{I_a + I_c \varphi} \right) M_y = 0 \quad (9)$$

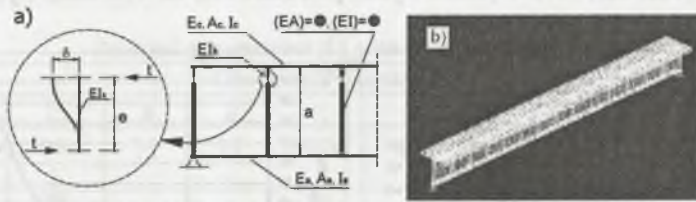
Równanie (9) jest podstawą rozwiązania zagadnienia zginania dźwigara zespolonego z łącznikami podatnymi, o zmiennej na długości belki sztywności połączenia  $C_z(x)$ . Stworzona w środowisku Matlab aplikacja numeryczna (oparta na metodzie różnic skończonych) umożliwiła otrzymanie rozwiązania dyskretnego zadania (oznaczonego jako model M1).

#### 4. Modele MES dźwigara podatnie zespolonego

Zaproponowano cztery modele MES geometrii dźwigara podatnie zespolonego.

Model klasy  $e^1$ ,  $p^1$  (M2) złożony z elementów belkowych. Przekrój zespolony został rozdzielony na części składowe, usytuowane w osiach ciężkości odpowiednio belki stalowej i płyty betonowej. Wraz z poprzecznymi elementami łączącymi o nieskończonej sztywności osiowej i giętej tworzą one schemat statyczny belki Vierendella (rys. 4a). Sztywność  $EI_k$

elementów o długości  $e$  modelujących połączenie została dobrana w sposób zapewniający osiągnięcie żądanej sztywności zespolenia  $C_z$ .



Rys. 4. Modele MES: a) model M2; b) model M5  
 Fig. 4. FEM models: a) M2 model; b) M5 model

**Modele klasy  $e^1+e^2, p^3$  (M3 i M4)** stanowiące modernizację układu wyjściowego. Zmiany polegają kolejno na wprowadzeniu czworokątnych elementów modelujących płytę pomostową (M3), a następnie również dźwigar blachownicowy (M4).

**Model klasy  $e^1+e^2+e^3, p^3$  (M5)**, w którym płyta betonowa została utworzona z trójwymiarowych elementów bryłowych o ośmiu węzłach (trzy translacyjne stopnie swobody w węźle). Dźwigar stalowy zbudowano na czworokątnych elementach skończonych (rys. 4b). Do zamodelowania połączenia belki z płytą użyto elementów sprężystych dwuwęzłowych.

## 5. Analizy numeryczne

Analizy przeprowadzono dla jednoprzęsłowego dźwigara o rozpiętości  $L = 28,0$  m. Parametry geometryczne przekroju i własności fizyczne materiałów przedstawiono w tabl. 1.

Tablica 1

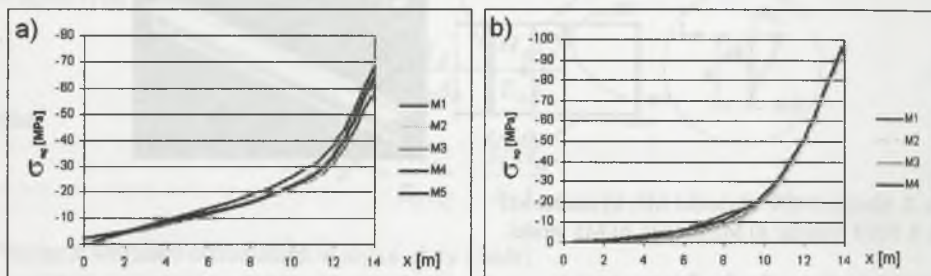
Parametry geometryczne analizowanego przekroju

Element	$A_c, A_a$ [m <sup>2</sup> ]	$I_c, I_a$ [m <sup>4</sup> ]	$e_r, r_r$ [m]	$e_d, r_d$ [m]	$E_c, E_a$ [MPa]
płyta pomostowa	0,582	0,002	0,095	0,145	32600
belka stalowa	0,0448	0,0191	0,990	0,640	205000

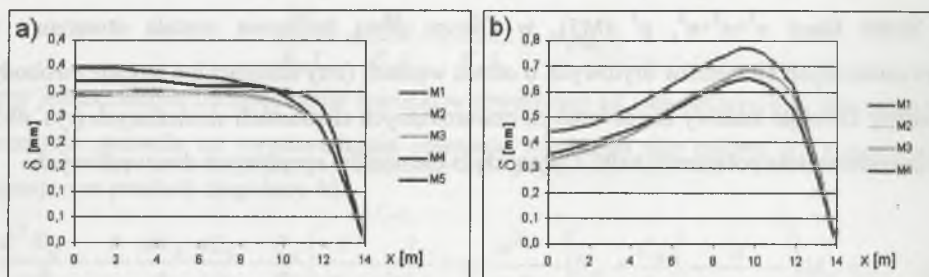
### 5.1. Analiza porównawcza modeli

Przyjęto obciążenie układu siłą skupioną ( $P = 1$  MN) przyłożoną w środku rozpiętości dźwigara. Rozpatrzono dwa przypadki rozkładu sztywności zespolenia na długości dźwigara, przyjmując przykładowe (odpowiadające zespoleniu częściowemu wynikającemu z charakterystyk stosowanych łączników podatnych) wartości liczbowe:

- stała sztywność  $C_z = 1000 \text{ MN/m}^2$  (modele M1, M2, M3, M4, M5),
- zmienna sztywność:  $C_{zp} = 0 \text{ MN/m}^2$  dla  $x = L/2$ ,  $C_{zk} = 1000 \text{ MN/m}^2$  dla  $x = 0$  (podpora) (modele M1, M2, M3, M4). Wybrane wyniki przedstawiono na wykresach (rys. 5, rys. 6).



Rys. 5. Naprężenia normalne na krawędzi górnej belki stalowej: a)  $C_z = \text{const}$ ; b)  $C_z = C_z(x)$   
 Fig. 5. Normal stress - upper flange of the steel beam: a)  $C_z = \text{const}$ ; b)  $C_z = C_z(x)$



Rys. 6. Wartości poślizgu w styku: a)  $C_z = \text{const}$ ; b)  $C_z = C_z(x)$   
 Fig. 6. Shear slip: a)  $C_z = \text{const}$ ; b)  $C_z = C_z(x)$

Widoczna jest duża zgodność między wynikami otrzymanymi z rozwiązania dyskretnego (M1) a otrzymanymi z modeli MES. Największe różnice występują w wartościach poślizgu  $\delta(x)$ , przy czym ich przebieg na długości dźwigara jest podobny dla każdego z modeli.

## 5.2. Rozkłady parametrów $\beta$ i $\mu$

W tabelicy 2 zamieszczono wartości parametrów  $\mu$  oraz  $\beta$  w funkcji  $C_z(x)$  dla obciążenia siłą skupioną ( $P = 200 \text{ kN}$ ) przyłożoną w  $x = L/2$ . Przyjęto przykładowe sztywności zespolenia:

- o stałej wartości  $C_z = 1000 \text{ MN/m}^2$ ;
- o liniowo zmiennej wartości  $C_{zp}(x = L/2) = 200 \text{ MN/m}^2$ ,  $C_{zk}(x = 0) = 1000 \text{ MN/m}^2$ ;

- o wartości zmiennej według paraboli drugiego stopnia  $C_{zp}(x = L/2) = 200 \text{ MN/m}^2$ ,  $C_{zk}(x = 0) = 1000 \text{ MN/m}^2$ .

Tablica 2

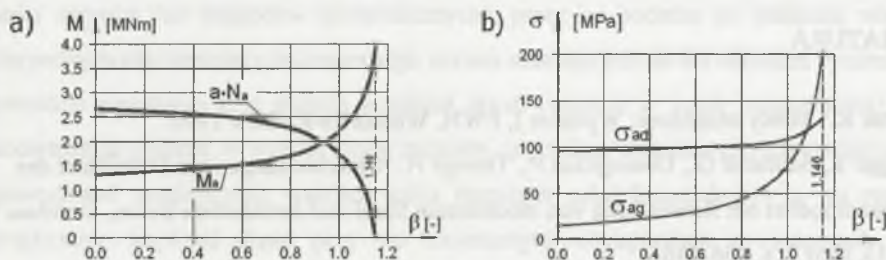
Rozkład parametrów  $\beta$  i  $\mu$  na długości dźwigara

Obciążenie siłą skupioną										
	pkt	$C_z$	$\beta$	$\mu$	$C_z$	$\beta$	$\mu$	$C_z$	$\beta$	$\mu$
	[-]	[MN/m <sup>2</sup> ]	[-]	[-]	[MN/m <sup>2</sup> ]	[-]	[-]	[MN/m <sup>2</sup> ]	[-]	[-]
	0	1000	-	-	1000	-	-	1000	-	-
	1		0,003	2,025		-3,568	2,447		3,270	3,117
	2		0,007	2,023		-1,556	2,331		8,181	2,754
	3		0,016	2,019		-0,947	2,258		-6,073	2,505
	4		0,044	2,008		-0,428	2,160		-0,760	2,228
	5		0,120	1,974		0,120	1,974		0,261	1,899
	6		0,306	1,871		0,563	1,662		0,660	1,548
	7	1000	0,628	1,588	200	0,834	1,260	200	0,862	1,201

Otrzymane wartości parametrów charakteryzują przebieg odkształceń (także różnic w odkształceniach) i sił na długości dźwigara w zależności od rozkładu sztywności zespolenia.

### 5.3. Zmienność sił, przemieszczeń i naprężeń

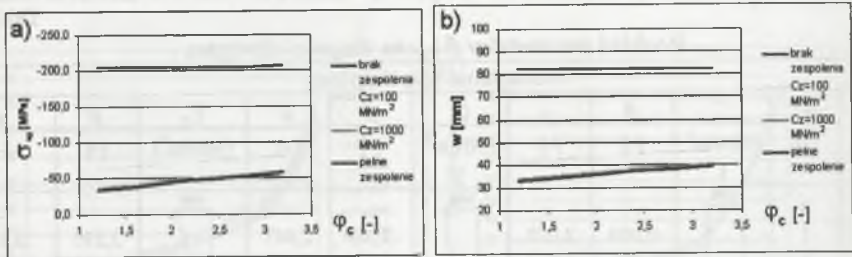
Przyjęto obciążenie wywołujące w przekroju  $x = L/2$  moment zginający  $M_y = 4,0 \text{ MNm}$ . Rozpatrzono wpływ wartości parametru  $\beta$  (przy stałej sztywności zespolenia na długości dźwigara) na wartości sił wewnętrznych i naprężeń w części stalowej przekroju zespolonego (rys. 7). Dodatkowo, przeanalizowano zmienność naprężeń  $\sigma_{ag}$  i ugięć  $w$  w funkcji wartości współczynnika pełzania betonu  $\varphi_c$  dla różnych poziomów sztywności zespolenia (rys. 8).



Rys. 7. Zmienność: a)  $M_a$ ,  $a \cdot N_a$  ( $x = L/2$ ); b)  $\sigma_{ag}$ ,  $\sigma_{ad}$  ( $x = L/2$ ) w funkcji parametru  $\beta$   
 Fig. 7. Values of: a)  $M_a$ ,  $a \cdot N_a$  ( $x = L/2$ ); b)  $\sigma_{ag}$ ,  $\sigma_{ad}$  ( $x = L/2$ ) in dependence of  $\beta$  parameter

Widoczne jest, że przyrost wartości parametru  $\beta$  powoduje spadek siły osiowej  $N_a$  oraz wzrost momentu zginającego  $M_a$  w przekroju belki stalowej. Szczególnie przy dużych wartościach  $\beta$  dążących do granicznej (brak zespolenia) następuje szybki wzrost wyężenia przekroju ( $\sigma_{ag}$ ).

Wpływ parametru  $C_z$  na zachowanie dźwigara w funkcji współczynnika pełzania  $\varphi_c$  największy jest w dźwigarach o dużej sztywności zespolenia (rys. 8).



Rys. 8. Zmienność: a)  $\sigma_{ag}(x = L/2)$ ; b)  $w(x = L/2)$  w funkcji współczynnika  $\varphi_c$   
 Fig. 8. Values of: a)  $\sigma_{ag}(x = L/2)$ ; b)  $w(x = L/2)$  in dependence of  $\varphi_c$  coefficient

## 6. Podsumowanie

Zjawisko zespolenia podatnego bywa pomijane w obliczeniach dźwigarów zespolonych ze względu na uciążliwość obliczeniową. Tymczasem, może ono znacząco zredukować nośność i negatywnie wpływać na trwałość konstrukcji. Dotyczy to szczególnie dźwigarów mostowych, gdzie połączenie poddawane jest oddziaływaniu znaczących obciążeń cyklicznych [3]. Przedstawiony został wpływ stopnia zespolenia (w szerokim spektrum wartości) na wybrane wielkości statyczne, przemieszczenia i wyężenie układu. Przedstawiono opis analityczny zjawiska oraz zaproponowano modele MES belki zespolonej podatnie.

## LITERATURA

1. Furtak K.: Mosty zespolone, Wydanie I, PWN, Warszawa-Kraków 1999.
2. Hegger J., Sedlacek G., Doeinghaus P., Trumpf H.: Untersuchungen zur Duktilitaet der Verbundmuettel bei Anwendung von Hochfestem Stahl und hochfestem Beton, Stahlbau 70 (2001), Heft 7, s. 436-446.
3. Gattesco N., Giuriani E.: Experimental Study on Stud Shear Connectors Subjected to Cyclic Loading, Journal of Constructional Steel Research, 1996, vol.38, No.1, s.1-21.