

Agnieszka WINKLER – SKALNA*
Politechnika Śląska, Gliwice

ANALIZA PROPAGACJI FAL DŹWIĘKOWYCH METODĄ ŚLEDZENIA PROMIENIA - NOWA METODOLOGIA PERTURBACYJNA

Streszczenie. W artykule zaprezentowany został nowy system algebraiczny oraz jego zastosowanie do rozwiązywania zagadnień akustycznych. Omówione zostały liczby perturbacyjne, funkcje perturbacyjne oraz perturbacyjne równania różniczkowe cząstkowe. Rozwiązywanie perturbacyjnych zadań akustycznych opisanych równaniami różniczkowymi z perturbacjami jest możliwe podobnie jak dla problemów klasycznych. Nie są konieczne żadne dodatkowe przekształcenia analityczne. Przedstawiona została także dwuwymiarowa metoda śledzenia promienia w obszarze zamkniętym. Perturbacyjna metoda śledzenia promienia bazuje na geometrycznych założeniach optyki, gdzie zaburzone zostają parametry, dla których można łatwo zastosować przybliżone metody oszacowania perturbacyjnych problemów akustycznych. Nowy system algebraiczny został zastosowany w algorytmie pozwalającym na zobrazowanie rozkładu dwuwymiarowego pola akustycznego. Rozpatrzony został wpływ niewielkich zaburzeń wartości parametrów na rozwiązanie zadania.

ANALYSIS OF SOUND WAVE PROPAGATION BY RAY-TRACING METHOD - NEW PERTURBATION METHODOLOGY

Summary. The aim of the paper is to present applications of the new algebraic system theory in acoustic problems. New types of perturbed numbers, functions and partial differential equations are discussed. Classical perturbation acoustic problems described by differential equations can be solved in the new algebraic system as easy as usual. Any additional analytical transformations are not required. A novel 2D ray-tracing model of detailed representation of the indoor environment is presented. Perturbation ray-tracing method is a technique based on geometrical optics with perturbation in parameters which can be an easily applied approximate method for estimating perturbation problems in acoustics. The developed algorithms use the new perturbation methodology where the perturbed images are used to produce 2D - field of illumination zones. It can be easy considered how perturbations (small) of nominal parameter values can change solutions of the considered problems.

* Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Jerzy Skrzypczyk, prof. w Politechnice Śląskiej

1. Wprowadzenie

W dzisiejszych czasach teoria perturbacji znajduje bardzo szerokie zastosowanie w mechanice teoretycznej czy matematyce. Często znalezienie dokładnego rozwiązania danego zadania jest trudne, a czasem nie jest znane rozwiązanie analityczne. Wówczas łatwiej jest wykorzystać znane rozwiązanie zadania podobnego (prostsze), a następnie stosując teorię perturbacji określić przybliżone rozwiązanie pierwotnego zadania. Teorię perturbacji stosuje się także w przypadkach, kiedy podstawowe zagadnienie fizyczne może zostać poddane zaburzeniom (perturbacjom). W takiej sytuacji ważne jest określenie wpływu małych perturbacji parametrów zadania na jego rozwiązanie.

Z kolei metoda śledzenia promienia bazuje na znanej już architektom starożytnej Grecji akustyce geometrycznej. Wykorzystuje ona prawa odbicia fali akustycznej od powierzchni ograniczających obszar oraz od znajdujących się w nim przedmiotów. Modelowe badania dwuwymiarowego rozkładu pola akustycznego w pomieszczeniu, przy zastosowaniu metody śledzenia promienia, dają możliwość zobrazowania tegoż pola oraz oceny jakości akustycznej wnętrza. Możliwe jest także rozszerzenie prezentowanego algorytmu w celu uzyskania trójwymiarowego rozkładu pola akustycznego.

Połączenie nowej metody perturbacyjnej oraz metody śledzenia promienia pozwoli, już na etapie projektowania, na łatwą i szybką analizę wpływu zaburzeń (na przykład przesunięcie fazowe przy odbiciu fali akustycznej, dyfrakcja czy rozproszenie) na rozprzestrzenianie się dźwięku w pomieszczeniu.

2. Liczba perturbacyjna, moduł liczby perturbacyjnej

DEFINICJA 1 [11, 12, 13]. Zdefiniujemy liczbę zwaną dalej liczbą perturbacyjną jako parę uporządkowaną liczb rzeczywistych $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Zbiór liczb perturbacyjnych będziemy oznaczać jako R_ϵ .

Niech $z, z_1, z_2 \in R_\epsilon$ oznaczają dowolne liczby perturbacyjne oraz $z = (x,y)$, $z_1 = (x_1,y_1)$, $z_2 = (x_2,y_2)$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i=1,2$. Powiemy, że dwie liczby perturbacyjne są równe: $z_1 \equiv z_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2$ oraz $y_1 = y_2$.

W zbiorze R_ϵ wprowadzone zostały działania dodawania $(+_\epsilon)$ i mnożenia (\cdot_ϵ) w następujący sposób:

$$z_1 +_{\varepsilon} z_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (1)$$

$$z_1 \cdot_{\varepsilon} z_2 := (x_1 x_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (2)$$

TWIERDZENIE 1 [11,12]. Zbiór R_{ε} z działaniami dodawania ($+_{\varepsilon}$) i mnożenia (\cdot_{ε}) określonymi wzorami (1) i (2) oraz z wyróżnionymi elementami: zerowym $0_{\varepsilon} := (0,0)$ oraz jedynekowym $1_{\varepsilon} := (1,0)$ jest ciałem. Ciało to nazwiemy ciałem liczb perturbacyjnych.

W zbiorze R_{ε} zachowane są przemienność i łączność dodawania, a także przemienność i łączność mnożenia oraz prawo rozdzielności.

Określone powyżej ciało R_{ε} nie zawiera ciała liczb rzeczywistych R . Można jednak wykazać, że liczby rzeczywiste mogą być traktowane jako pewne elementy ciała R_{ε} , z zachowaniem działań algebraicznych oraz elementów neutralnych dodawania i mnożenia.

Własności liczb perturbacyjnych, pojęcia analizy perturbacyjnej, takie jak zbieżność, ciągłość itp. patrz - [17, 18, 19, 20].

3. Funkcje zmiennych perturbacyjnych i rzeczywistych

Niech $D \subset R$ i $E \subset R_{\varepsilon}$ będą dowolnymi podzbiórmi zbioru liczb rzeczywistych i zbioru liczb perturbacyjnych odpowiednio. Jeśli każdej parze elementów $t \in D$, $z \in E$ przyporządkujemy pewną liczbę perturbacyjną $r = f(t,z)$, to powiemy, że w zbiorze $D \times E$ została określona funkcja perturbacyjna $f_{\varepsilon}: D \times E \rightarrow R_{\varepsilon}$, zmiennych rzeczywistej i perturbacyjnej [11, 12, 13].

$$r = f_{\varepsilon}(t,z) \quad (3)$$

Niech $f_{\varepsilon}(t,z) = u + \varepsilon v$, przy czym $u(\cdot)$ i $v(\cdot)$ oznaczają funkcje o wartościach rzeczywistych zmiennej rzeczywistej t i zmiennej perturbacyjnej $z = x + \varepsilon y$ lub inaczej trzech zmiennych rzeczywistych t , x oraz y , co możemy zapisać

$$f_{\varepsilon}(t,z) = u(t,z) + \varepsilon v(t,z) = u(t,x,y) + \varepsilon v(t,x,y), \quad (4)$$

dlatego $u(\cdot)$ i $v(\cdot)$ będą oznaczane jak zwykle funkcje rzeczywiste, bez indeksu ε . Funkcje $u(\cdot)$ i $v(\cdot)$ nazwiemy odpowiednio częścią główną i częścią perturbacyjną funkcji $f_{\varepsilon}(\cdot)$.

Można udowodnić, że jeżeli funkcja $f(t,z)$ jest ciągła w punkcie $(t_0, z_0) = (t_0, x_0 + \varepsilon y_0)$, to funkcje $u(t,x,y)$ i $v(t,x,y)$ są ciągłe w punkcie (t_0, x_0, y_0) i odwrotnie.

4. Perturbacyjne równanie różniczkowe zwyczajne

Perturbacyjnym równaniem różniczkowym zmiennej rzeczywistej nazwiemy równanie

$$\frac{dy(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)y(t) + \mathbf{f}(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad y(t_0) = \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \quad (5)$$

gdzie $\mathbf{A}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ jest macierzą o wymiarach $n \times n$, której elementy są perturbacyjnymi rzeczywistymi funkcjami ciągłymi, por. [13, 14, 15].

Zauważmy, że ponieważ każdą macierz perturbacyjną \mathbf{A} można przedstawić jako parę uporządkowaną dwóch macierzy liczbowych $(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1)$, gdzie $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, więc zgodnie z przyjętą uproszczoną notacją będziemy dalej pisać $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \varepsilon \mathbf{A}_1$. Podobnie $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \varepsilon \mathbf{f}_1$, $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0 + \varepsilon \mathbf{c}_1$, $\mathbf{f}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Równanie (5) będzie często zapisywane w równoważnej postaci

$$\frac{dy(t)}{dt} = (\mathbf{A}_0(t) + \varepsilon \mathbf{A}_1(t))y(t) + \mathbf{f}_0(t) + \varepsilon \mathbf{f}_1(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad y(t_0) = \mathbf{c} = \mathbf{c}_0 + \varepsilon \mathbf{c}_1 \quad (6)$$

5. Równanie falowe z perturbacyjnymi parametrami

Nowy system algebraiczny znajduje zastosowanie w klasycznych zadaniach różniczkowych z parametrami perturbacyjnymi, w takich dziedzinach jak mechanika teoretyczna, matematyka, fizyka czy akustyka. [15,16] Podany przykład dotyczy zagadnień perturbacyjnych dynamicznych, np. drgań. Zaletą nowej metody jest przedstawiony sposób rozszerzenia liniowego równania falowego z perturbacyjnymi parametrami oraz warunkami początkowymi i brzegowymi. Specjalne procedury numeryczne pozwalają na łatwe rozwiązanie zadania perturbacyjnego. Rozpatrzmy następujące perturbacyjne równanie membrany drgającej, w którym zaburzone zostały: długość boków membrany, parametr równania oraz warunki początkowe i brzegowe:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u_\varepsilon(t, x, y) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u_\varepsilon(t, x, y) - \frac{1}{c_\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_\varepsilon(t, x, y) = 0_\varepsilon \quad (7)$$

gdzie $t \in [0, \infty]$, $x \in [0, a_\varepsilon]$, $y \in [0, b_\varepsilon]$, $c_\varepsilon = c_0 + \varepsilon c_1$, $a_\varepsilon = a_0 + \varepsilon a_1$, $b_\varepsilon = b_0 + \varepsilon b_1 \in \mathbb{R}_\varepsilon$. Perturbacyjne warunki początkowe przyjmują postać:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x, y, 0) &= x(x - a_\varepsilon)y(y - b_\varepsilon) & x \in (0, a_\varepsilon) \\ u_{t_\varepsilon}(x, y, 0) &= 0_\varepsilon & y \in (0, b_\varepsilon) \end{aligned} \quad (8)$$

natomiast perturbacyjne warunki brzegowe zapiszemy następująco:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(0, y, t) &\equiv 0_\varepsilon & u_\varepsilon(a_\varepsilon, y, t) &\equiv 0_\varepsilon & t \in (0, \infty) \\ u_\varepsilon(x, 0, t) &\equiv 0_\varepsilon & u_\varepsilon(x, b_\varepsilon, t) &\equiv 0_\varepsilon \end{aligned} \quad (9)$$

6. Algorytm śledzenia propagacji perturbacyjnej fali dźwiękowej

Przeanalizujmy możliwość prognozowania zaburzonej emisji akustycznej (Acoustic Emission, ε -AE) sygnału emitowanego wewnątrz przestrzeni zamkniętej (pomieszczenia). Przyczyną powstawania takiej ε -AE mogą być, np. zewnętrzne lub wewnętrzne zakłócenia (hałasy). Z kolei, tłumienie tego sygnału może zależeć nie tylko od zaburzonych parametrów materiału, od którego odbija się fala dźwiękowa, ale często także od niepewnej geometrii wnętrza. Na przykład, propagacja fali jest zjawiskiem bardzo złożonym ze względu na fakt istnienia skomplikowanych nieregularnych kształtów oraz występującą często nieciągłością gęstości i krzywizną powierzchni. W przeciwieństwie do metod i modeli badania rozkładu pola akustycznego opisywanych w licznej literaturze, prezentowana metoda wprowadza perturbacyjny promień dźwiękowy do modelu propagacji z zaburzeniami brzegu, czyli kształtu i wymiarów pomieszczenia i znajdujących się w nim przedmiotów, a także wprowadzone zostaje zaburzenie odbicia fali dźwiękowej.

Silna fizykalna analogia pomiędzy propagacją światła i dźwięku pozwala na wzajemne wykorzystanie zależności i zjawisk zachodzących w obu przypadkach. Zarówno promienie świetlne, jak i dźwiękowe ulegają odbiciu na brzegach obszaru i kąt padania promieni jest równy kątowi odbicia. Wiemy także, że promień padający i odbity leżą w tej samej płaszczyźnie. Zarówno dla światła, jak i dla dźwięku mamy do czynienia ze stratą energii po odbiciu. Algorytm ε -RayAE bezpośrednio wykorzystuje tę analogię, swobodnie przechodząc z zagadnień świetlnych na dźwiękowe, w kolejnych krokach:

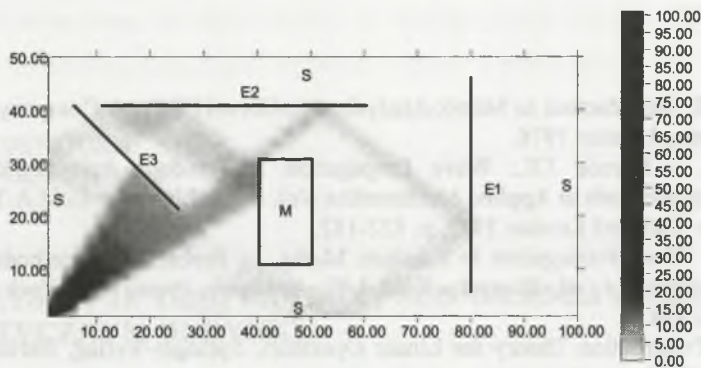
- Źródło dźwięku generuje dźwięk w postaci perturbacyjnego pola wektorowego (plain perturbed vector field, ε -PVF), czyli wiązki promieni. Filtr ε -PVF, zapamiętuje tylko te wektory (promienie), których zwrot i kierunek są zgodne z kierunkiem propagacji dźwięku (tzn. promień reprezentuje kierunek rozumiany w sensie słabego uporządkowania, por. [13,14]), które leżą w analizowanej

płaszczyźnie oraz należą do badanego obszaru. Każdy z tych wektorów posiada odpowiadającą mu wartość perturbacyjnej energii akustycznej (ε -acoustic energy path, ε -AEP).

- Generuje się zbiór końców brzegów odcinków reprezentujących (w słabym sensie) elementy powodujące odbicie/przenikanie promienia akustycznego ε -AE - ekrany, ściany, meble itp. W ten sposób powstaje mapa przedstawiająca propagację fali ε -AE bezpośrednio i/lub wewnątrz pomieszczenia. Każda krawędź segmentu w ε -AEP odnosi się do ε -AES.
- Tworzona jest reprezentacja rozmieszczenia czujników pomiarowych.
- Dla wszystkich lokalizacji czujników testowane są wszystkie promienie ε -AEP's oraz zapisywane wartości czasów przejścia pojedynczych promieni ε -AES przez otoczenie odpowiadające otoczeniu danego czujnika.

7. Przykład

Rozpatrzmy pomieszczenie o wymiarach rzutu 10 x 5. W lewym dolnym narożniku znajduje się źródło emitujące dźwięk o rozkładzie jednostajnym wewnątrz kąta 30° . W pokoju znajdują się trzy ekrany akustyczne (E1, E2, E3) oraz prostokątny element (mebel M), patrz rys. 1. Wszystkie wymiary, lokalizacja oraz współczynniki pochłaniania dźwięku dla poszczególnych przeszkód oraz budowa wewnętrzna (parametry ośrodka) mogą być zaburzone. Wartości perturbacyjnego poziomu ciśnienia akustycznego w każdym punkcie pokoju mogą być obliczone przy zastosowaniu prezentowanej metody. Wartości główne losowych perturbacyjnych współczynników pochłaniania dźwięku poszczególnych ścian, ekranów i parametrów ośrodka są znane jako wartości ustalone. Wszystkie wartości są bezwymiarowe.



Rys. 1. Wartość główna perturbacyjnego poziomu ciśnienia akustycznego dla współczynników pochłaniania dźwięku: $S = 0.1$, $E1, E2 = 0.3$, $E3 = 0.9$, $M = 0.3$

Fig. 1. The main value of perturbed sound pressure level for absorbent coefficients: $S = 0.1$, $E1, E2 = 0.3$, $E3 = 0.9$, $M = 0.3$

8. Wnioski

Obliczenia prowadzone przy zastosowaniu nowej metody perturbacyjnego rachunku różniczkowego są równoważne klasycznym metodom perturbacyjnym I rzędu. Zalety nowego systemu algebraicznego są następujące:

- można pominąć skomplikowane obliczenia analityczne, które są typowe dla rozszerzeń aproksymacji wartości rozwiązania dla nieskończonych szeregów. Sprowadza się to do rozszerzenia wartości rozwiązania i rozszerzenia perturbacyjnych parametrów zadania;
- uproszczenie wszystkich obliczeń analizy matematycznej, które pojawiają się w analitycznym sformułowaniu danego zadania;
- większość znanych klasycznych wyników teorii równań różniczkowych może być w prosty sposób adaptowana do nowego systemu obliczeniowego bez większych różnic.

Nowy system algebraiczny daje nam cały zestaw bardzo prostych i użytecznych narzędzi matematycznych, które w prosty sposób mogą być zastosowane zarówno w obliczeniach analitycznych, jak i komputerowych perturbacyjnych zadań różniczkowych.

Przedstawiony przykład pokazuje prostotę aplikacji sformułowania perturbacyjnego do tworzenia modeli pozwalających na badanie wpływu zaburzeń na propagację dźwięku w pomieszczeniach. Dalszy rozwój metody pozwoli na uwzględnienie takich zjawisk akustycznych, jak przesunięcia fazowe przy odbiciu fali akustycznej, rozproszenie czy dyfrakcja.

LITERATURA

1. Bellman, R.: Introduction to Matrix Analysis. Mc-Graw-Hill Book Company, Inc.L, New York Toronto, London 1976.
2. Dence D., - Spence J.E.: Wave Propagation in Random Anisotropic Media, in Probabilistic methods in Applied Mathematics Vol. 3, ed. Bharucha-Reid A.T., Academic Press, New York and London 1973, p. 122-182.
3. Frisch U.: Wave Propagation in Random Media, in Probabilistic methods in Applied Mathematics Vol. 1, ed. Bharucha-Reid A.T., Academic Press, New York and London 1968, p. 76-198.
4. Kato, T.: Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1966.
5. Lanlaster, P.: Theory of Matrices. Academic Press, New York, London 1978.
6. Lim T., Nivesrangasan P., Corney J.R., Steel J.A. and Reuben R.L.: Predicting AE Attenuation in Structures by Geometric Analysis, Proc. of International Conference on Shape Modeling and Applications SMI 05, IEEE Computer Society, p. 1-8.
7. Murdock J. A.: Perturbations - Theory and Methods, SIAM, J.Wiley & Sons, Inc., New York 1999.
8. Rayleigh, L.: The Theory of Sound, vol.I. London 1927.
9. Rellich, F.: Störungstheorie der Spektralzerlegung, I, Math. Ann., p. 113, 600-619, 1936.
10. Schrodinger, E.: Quantisierung als Eigenwertproblem, Ann. Physik, 80, 1926, 437-490.
11. Skrzypczyk J.: Perturbation methods - New arithmetic. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., s. Budownictwo, z. 101 Gliwice 2003.
12. Skrzypczyk J.: Perturbation methods I- Algebra, Functions, Linear Equations, Eigenvalue Problems: New Algebraic Methodology, Proc. of International Conference NEW TRENDS IN STATICS AND DYNAMICS OF BUILDINGS, October 2004, Faculty of Civil Engineering SUT Bratislava, Slovakia, p. 55-58.
13. Skrzypczyk J.: Perturbation Methods - New Algebraic Methodology. Proc. of CMM-2005 – Computer Methods in Mechanics, June 21-24, 2005, Częstochowa, Poland, Częstochowa 2005.
14. Skrzypczyk J. Winkler A.: Perturbation methods II- Differentiation, Integration and Elements of Functional Analysis with Applications to Perturbed Wave Equation, Proc. of International Conference NEW TRENDS IN STATICS AND DYNAMICS OF BUILDINGS, October 2003, Faculty of Civil Engineering SUT Bratislava, Slovakia, p. 147-150.
15. Winkler A.: Ocena wpływu perturbacji parametrów zadania brzegowego na rozwiązanie równania Helmholtza. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., s. Budownictwo, z.104 Gliwice 2005.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Bohdan Mochnacki