

Stefan PASZEK

Janusz WALCZAK

PROPOZYCJA POSTACI OGÓLNEJ OPERATORA NIELINIOWEGO W PRZESTRZENIACH HILBERTA

Streszczenie. Unifikacja postaci ogólnej operatorów nieliniowych w sygnałowych przestrzeniach funkcyjnych, odpowiadających dziedzinie czasu, jest na ogół niemożliwa. W przestrzeniach ciągowych istnieją natomiast pewne możliwości takiej unifikacji. W pracy przedstawiono propozycję postaci ogólnej (kanonicznej) operatorów nieliniowych w ośrodkowych, ciągowych przestrzeniach l^2 . Podano również sposób transformacji tych operatorów do pierwotnych przestrzeni Hilberta, interpretowanych jako dziedzina czasu. Przedstawiono formuły określające postać zamkniętą operatorów typu wielomianowego. Operatory te opisują nieliniowe rezystancje, indukcyjności i pojemności przy wymuszeniach niesinusoidalnych.

A PROPOSITION OF GENERAL FORM OF NONLINEAR OPERATORS IN THE HILBERT SPACES

Summary. Unification of the global form of the nonlinear operators in the function spaces of signals, conformed to time domain, is generally impossible. In the sequence spaces there are some possibilities of this unification. In this paper a certain proposition of canonical form of nonlinear operators in the sequential and separable spaces l^2 has been given. The method of transformation of these operators to primary Hilbert spaces (time domain) has been presented. The formulae defining close form of nonlinear polynomial have been obtained. These operators describe nonlinear resistances, inductances and capacitances during nonsinusoidal excitations.

1. WSTĘP

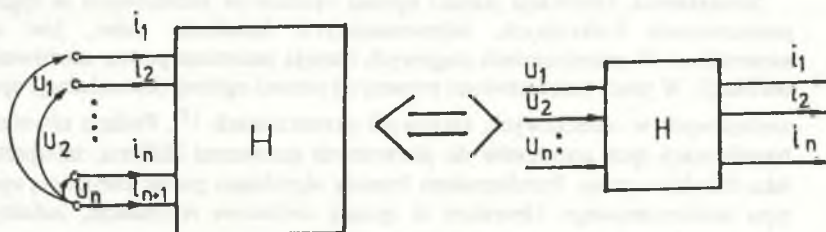
We współczesnej teorii obwodów i sygnałów pojęciu układu wielozaciskowego (rys. 1) przyporządkowuje się pojęcie operatora H (H') odwzorowującego umownie przyjęty zbiór sygnałów wejściowych układu w zbiór sygnałów wyjściowych. Czyli:

$$H: U \rightarrow J \text{ lub } H': J \rightarrow U, \quad (1)$$

gdzie:

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in U, i = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in J, n \in N, \quad (2)$$

U, J - przestrzenie funkcyjne sygnałów napięciowych i prądowych.



Rys. 1. Układ wielozaciskowy
Fig. 1. A multi-terminal system

Zagadnienie wyznaczania postaci ogólnej operatora (1) dla różnych klas obwodów występujących w teorii obwodów zależy od:

- właściwości obwodów należących do tych klas (liniowość, stacjonarność, przyczynowość, pasywność, itp.),
- właściwości przestrzeni funkcyjnych stanowiących dziedzinę i przeciwdziedzinę operacji (1) (przebiegi stałe, sinusoidalne, okresowe, nieokresowe, itp.).

Znane sposoby opisu operatorów liniowych i nieliniowych w przestrzeniach funkcyjnych opisano w pracy [5], a pewną propozycję postaci ogólnej operatorów nieliniowych przedstawiono poniżej.

2. OPERATOR NIELINIOWY W PRZESTRZENIACH HILBERTA

Niech operator nieliniowy η dwójnika odwzorowuje przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}_1$ sygnałów wejściowych w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_2$ sygnałów wyjściowych $\eta: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$.

W ośrodkowych przestrzeniach $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ wyróżnia się bazy:

$$e_1 = \{ {}_1e_0, {}_1e_1, {}_1e_2, \dots, {}_1e_n, \dots \}, \quad e_2 = \{ {}_2e_0, {}_2e_1, {}_2e_2, \dots, {}_2e_n, \dots \}.$$

Operatory $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ odwzorowują wzajemnie jednoznacznie przestrzenie $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ w przestrzenie ciągowe ${}_1l^2, {}_2l^2$ (rys. 2):

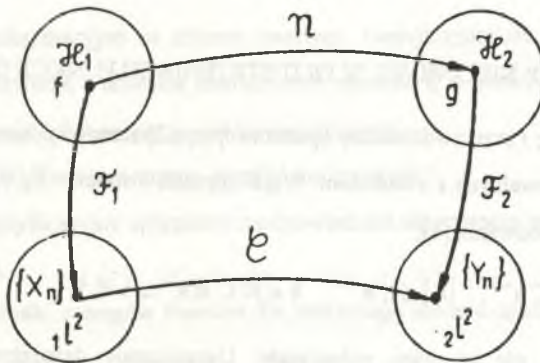
$$\mathcal{F}_1: \mathcal{H}_1 \rightarrow {}_1l^2 \quad \mathcal{F}_2: \mathcal{H}_2 \rightarrow {}_2l^2. \quad (3)$$

Wartości operatorów $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ są określone następująco:

$$\tilde{\mathcal{F}}_1 = \{ X_i = (f, {}_1e_i)_{\mathcal{H}_1}, i \in N, f \in \mathcal{H}_1 \}, \quad (4)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_2 = \{ Y_i = (g, {}_2e_i)_{\mathcal{H}_2}, i \in N, g \in \mathcal{H}_2 \}, \quad (5)$$

gdzie: $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}_1}, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}_2}$ - iloczyny skalarne w przestrzeniach $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$. Operatory $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ przyporządkowują więc wzajemnie jednoznacznie elementom $f \in \mathcal{H}_1, g \in \mathcal{H}_2$ ciągi współczynników Fouriera $\{X_i\} \in {}_1l^2, \{Y_i\} \in {}_2l^2$ względem baz e_1, e_2 .



Rys. 2. Ilustracja odwzorowań $\eta, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \zeta$

Fig. 2. The illustration of maps $\eta, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \zeta$

Odwzorowaniu nieliniowemu η pomiędzy przestrzeniami $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ odpowiada odwzorowanie $\zeta: {}_1l^2 \rightarrow {}_2l^2$ określone następującym wzorem:

$$\zeta: \{Y_n = J_h(X_0, X_1, \dots, X_n, \dots)\}, \quad h \in N. \quad (6)$$

Jeżeli postać operatora ζ (6) jest znana, to możliwe jest przedstawienie operatora η w postaci kanonicznej:

$$g(t) = [\eta f](t) = \sum_{h=0}^{\infty} J_h((f, {}_1e_0)_{\mathcal{H}_1} (f, {}_1e_1)_{\mathcal{H}_1}, \dots, (f, {}_1e_h)_{\mathcal{H}_1}, \dots)_2 e_h. \quad (7)$$

Określenie generatora η sprowadza się więc do określenia operatora ζ działającego w przestrzeniach ciągowych l^2 . W przypadku ogólnym określenie postaci operatora ζ nie jest możliwe. Jeżeli dla konkretnie przyjętych przestrzeni $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ oraz ich baz e_1, e_2 spełnione są warunki:

- 1) operatory liniowe $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ są pełnociągłe,
 - 2) operator nieliniowy ζ jest ograniczony i zwarty,
 - 3) możliwa jest aproksymacja (w określonym sensie) operatora ζ przy pomocy prostszych operatorów, np. wielomianów,
- to określenie postaci kanonicznej operatora η jest możliwe.

Konstrukcję takiego operatora dla obwodów z przebiegami okresowymi opisano poniżej.

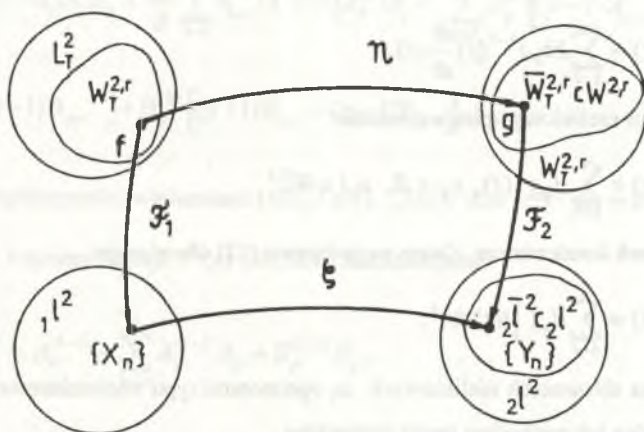
3. OPERATORY NIELINIOWE W PRZESTRZENIACH FUNKCJI OKRESOWYCH

Niech dziedzinę i przeciwdziedzinę operatora η (rys.2) stanowi przestrzeń L_T^2 przebiegów okresowych, całkowalnych z kwadratem. Współczynniki Fouriera X_h, Y_h (4),(5) posiadają w tym wypadku oszacowania [1]:

$$|X_n| \leq C h^{-\alpha}, \quad |Y_n| \leq C h^{-\alpha}, \quad h \in N, C \in R^+, \alpha > 0,5, \quad (8)$$

operatory $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ nie są więc pełnociągłe. Ograniczenie dziedziny i przeciwdziedziny operatora η do przestrzeni Sobolewa $W_T^{2,r} \subset L_T^2$ (gdzie przez $r > 1$ oznacza się maksymalny rząd pochodnej funkcji $f \in W_T^{2,r}$) powoduje, że współczynniki Fouriera (4),(5) spełniają warunki (8) ze współczynnikiem $\alpha > 1$ [1]. Operatory $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ odwzorowują więc przestrzeń

$W_T^{2,r}$ w kostki Hilberta przestrzeni l^2 (rys. 3), są zatem one zwarte i prawie skończenie wymiarowe. Wynika stąd, że możliwe jest operowanie na skończenie wymiarowych reprezentacjach operatorów $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, a w efekcie tego operowanie na skończenie wymiarowej reprezentacji operatora ζ , którą zgodnie z twierdzeniem aproksymacyjnym Stone'a-Weierstrassa przedstawić można w postaci ciągu wielomianów [5].



Rys. 3. Diagram odwzorowania nieliniowego w przestrzeni Sobolewa $W_T^{2,r}$

Fig. 3. The diagram of nonlinear map in the Sobolev Space $W_T^{2,r}$

Wielomiany aproksymacyjne na zbiorze zwartym (współczynników Fouriera sygnałów wejściowych) aproksymują z dowolną dokładnością operator ζ o przeciwdziedzinie obciętej do zbioru współczynników Fouriera sygnałów wyjściowych.

Postać operatora wielomianowanego określić można przez:

- eksperyment identyfikacyjny sprzężony z odpowiednim algorytmem aproksymacji funkcji wielu zmiennych,
- zastosowanie techniki szeregów Fouriera dla założonego modelu operatora η działającego w przestrzeniach $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$.

Podejście takie zastosowano poniżej w celu określenia operatora kanonicznego ζ dla nieliniowych rezystancji, pojemności i indukcyjności.

Rezystor nieliniowy jest opisany równaniem:

$$u(t) = f_R(i(t)) = \sum_{k=1}^n a_k i^k(t) \quad , \quad a_k \in R, \quad u, i \in W_T^{2,r}. \quad (9)$$

Induktor nieliniowy opisują równania :

$$u(t) = \frac{d\psi}{dt}(t) \quad , \quad y(t) = \sum_{k=1}^n b_k i^k(t) \quad , \quad b_k \in R, \quad u, i \in W_T^{2,r}, \quad (10)$$

gdzie: ψ - strumień magnetyczny skojarzony w uzwojeniu induktora.

Napięcie na induktorze określa więc wzór:

$$u(t) = \sum_{k=1}^n k b_k i^{k-1}(t) \frac{di}{dt}(t). \quad (11)$$

Kondensator nieliniowy opisuje równanie:

$$u(t) = \sum_{k=1}^n d_k q^k(t), \quad c_k \in R, \quad u, i \in W_T^{2,r}, \quad (12)$$

gdzie: q -ładunek kondensatora. Zatem na podstawie (12) obowiązuje:

$$u(t) = \sum_{k=1}^n d_k \left(\int i(t) dt \right)^k. \quad (13)$$

Napięcia na elementach nieliniowych są operatorami typu wielomianowego określonymi na prądzie, całce lub pochodnej prądu dwójników.

Niech prąd i napięcia na dwójnikach nieliniowych określają wzory:

$$i(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{l=1}^m A_l \cos l\omega_0 t + B_l \sin l\omega_0 t, \quad (14)$$

$$u(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{l=1}^s C_l \cos l\omega_0 t + D_l \sin l\omega_0 t. \quad (15)$$

Wykorzystując wzory określające współczynniki Fouriera funkcji, będącej iloczynem dwóch funkcji wyrażonych szeregiem Fouriera [4], oblicza się iteracyjnie współczynniki szeregu Fouriera funkcji $i^k(t)$ na podstawie znajomości współczynników Fouriera funkcji $i^{k-1}(t), i(t)$. W podobny sposób można rekurencyjnie określać współczynniki Fouriera funkcji $i^k(t) i'(t)$ oraz funkcji $(\int i(t) dt)^k$. Wykorzystując powyższe wzory, wzory opisujące charakterystyki elementów nieliniowych (9), (10), (12) i przyrównując współczynniki uzyskanych w ten sposób szeregów Fouriera z odpowiednimi współczynnikami szeregu (15), uzyskuje się analityczny opis rozpatrywanych elementów nieliniowych.

W przypadku induktora nieliniowego operator ζ określają wzory:

$$C_l = b_l l B_l w_0 + \frac{w_0}{2} \sum_{k=l}^{n-l} b_{k+l} (k+l) \left\{ A_0^{(k)} l B_l + \sum_{p=l}^{(k-l)m} A_p^{(k)} \left[(p-l) B_{p-l} + \right. \right. \\ \left. \left. + (p+l) B_{p+l} \right] + B_p^{(k)} \left[(p-l) A_{p-l} + (p+l) A_{p+l} \right] \right\}, \quad (16)$$

$$D_l = -b_l l A_l w_0 + \frac{w_0}{2} \sum_{k=l}^{n-l} b_{k+l} (k+l) \left\{ A_0^{(k)} l A_l + \sum_{p=l}^{(k-l)m} A_p^{(k)} \left[(p-l) A_{p-l} + \right. \right. \\ \left. \left. + (p+l) B_{p+l} \right] + B_p^{(k)} \left[(p+l) B_{p-l} + (p-l) B_{p+l} \right] \right\}, \quad (17)$$

gdzie: b_k - współczynniki wielomianu (10), $l \in \{1, \dots, km\}$; $k, m \in \mathbb{N}$; $C_0 = 0$, $A_p^{(k)}$, $B_p^{(k)}$ - współczynniki Fouriera funkcji $i^k(t)$ określone zależnościami:

$$A_0^{(k)} = A_0^{(k-l)} + \sum_{p=l}^m A_p^{(k-l)} A_p + B_p^{(k-l)} B_p, \quad (18)$$

$$A_l^{(k)} = \frac{A_0^{(k-l)}}{2} + \frac{l}{2} \sum_{p=l}^{(k-l)m} A_p^{(k-l)} (A_{p-l} + A_{p+l}) + B_p^{(k-l)} (B_{p-l} + B_{p+l}), \quad (19)$$

$$B_l^{(k)} = \frac{A_0^{(k-l)}}{2} + \frac{l}{2} \sum_{p=l}^{(k-l)m} A_p^{(k-l)} (B_{p+l} + B_{p-l}) - B_p^{(k-l)} (A_{p+l} - A_{p-l}); \quad (20)$$

indeks p oznacza numer harmoniczej.

W podobny sposób określić można wzory opisujące operator ζ dla rezystora (9) i kondensatora (12) [4].

Przedstawiona metoda umożliwia określenie analitycznych wzorów opisujących operator ζ w postaci ciągu wielomianów. Współczynniki tych wielomianów mogą być obliczone analitycznie z wykorzystaniem symbolicznych języków programowania (np. Mathematica).

4. PRZYKŁADOWE OBLICZENIA OPERATORA ζ DLA INDUKTORA NIELINIOWEGO

Operator ζ może być wyznaczony poprzez identyfikację, której ideę opisano poniżej. Na wejście dwójnika nieliniowego podawany jest sygnał prądowy o charakterze dyskretnego białego szumu, o zmiennej w programowalny sposób amplitudzie i o widmie obciętych do częstości $m\omega_0$ ($m \in N$). Odpowiedzi napięciowe dwójnika są rejestrowane i stanowią blok danych procedury aproksymacyjnej funkcji wielu zmiennych wielomianami wielu zmiennych, opierającej się na algorytmie Levenberga-Marquardta [2], [3] i służącej do wyznaczenia współczynników (C, D) (15).

Przykładowe obliczenia przeprowadzono dla induktora nieliniowego o charakterystyce (10), aproksymowanej wielomianem 3 i 9 stopnia (rys. 4), przy wymuszeniu prądowym:

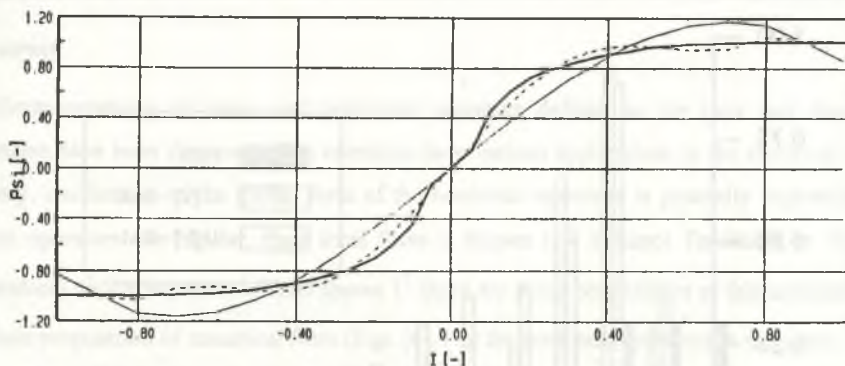
$$i(t) = 2A_0 + A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \cos 2\omega_0 t, \quad \omega_0 = 1. \quad (21)$$

Obliczenia wykonano na podstawie wzorów rekurencyjnych (16), (17). Na rys. 5 i 6 przedstawiono przebiegi czasowe i prążki interferencyjne prądu wymuszającego oraz odpowiedzi napięciowe przy aproksymacji wielomianem 3 i 9 stopnia.

Następnie przeprowadzono identyfikację operatora ζ wielomianem wielu zmiennych metodą Levenberga-Marquardta. Zakładając ciąg wymuszeń prądowych (poprzez zmianę amplitud harmoniczných prądu (18)) wyznaczono odpowiednie wielomiany aproksymacyjne (opisujące operator ζ) dla uzyskanych odpowiedzi napięciowych induktora. Następnie obliczono i porównano odpowiedzi napięciowe induktora metodą dokładną (wzory (16), (17) oraz metodą Levenberga-Marquardta dla wymuszenia prądowego (18)). Błąd obliczeń dla omawianego przykładu określa wzór :

$$e = \sum_{i=1}^n \left\{ \left| C_i' - C_i^2 \right|^2 + \left| D_i' - D_i^2 \right|^2 \right\} = 1.8 \cdot 10^{-3}, \quad (22)$$

- gdzie:
- indeks "1" odnosi się do harmoniczných odpowiedzi napięciowych (C_i', D_i') określonych na podstawie wzorów rekurencyjnych,
 - indeks "2" odnosi się do harmoniczných odpowiedzi (C_i^2, D_i^2) operatora ζ określonego metodą Levenberga-Marquardta.



Rys. 4. Aproxymacja charakterystyki $\Psi = f(I)$ induktora nieliniowego.

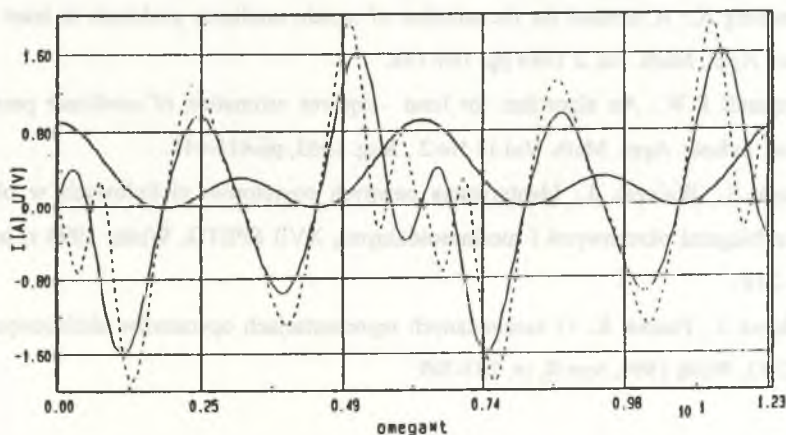
— - wielomian 3 stopnia, - wielomian 9 stopnia

Fig. 4. Approximation of the characteristic $\Psi = f(I)$ of the nonlinear inductor.

— - 3 degree polynomial, - 9 degree polynomial

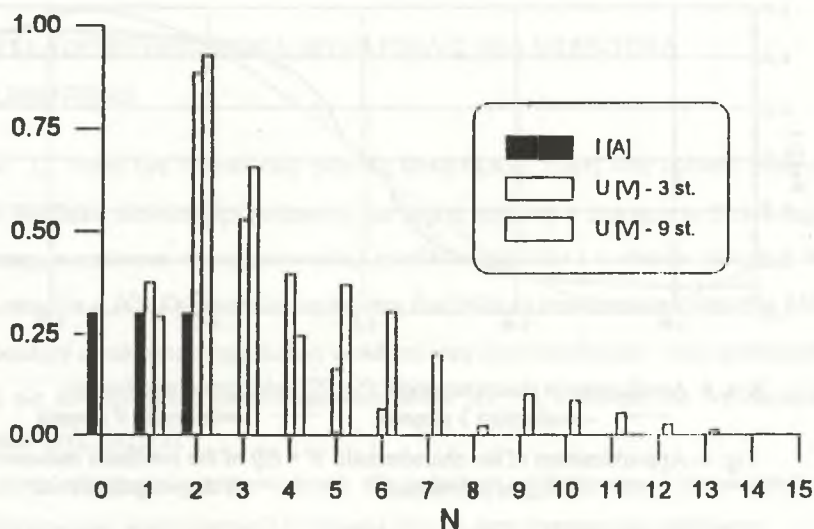
5. WNIOSKI

Przy wielomianowym opisie skończonego rzędu nieliniowych rezystorów, indukatorów i kondensatorów można uzyskać w dziedzinie widmowej opis tych nieliniowości w postaci zamkniętej. Dla ograniczonego widma prądu opis wielomianowy nieliniowości prowadzi w sposób naturalny do operatora ζ opisanego ciągiem wielomianów. Współczynniki tych wielomianów można obliczać rekurencyjnie lub też metodą eksperymentu identyfikacyjnego.



Rys. 5. Przebiegi czasowe prądu wymuszającego (—) oraz odpowiedzi napięciowe na induktorze nieliniowym przy aproksymacji wielomianem 3 (—) i 9 stopnia (.....)

Fig. 5. Time plots of the forced current (—) and voltage outputs on the terminal of nonlinear inductor with the polynomial approximation the 3 (—) and 9 (.....) degree



Rys. 6. Prążki interferencyjne prądu wymuszającego oraz odpowiedzi napięciowe na induktorze nieliniowym przy aproksymacji wielomianem 3 i 9 stopnia

Fig. 6. Interference striae of the forced current and voltage outputs on the terminal of nonlinear inductor with the polynomial approximation of the 3 and 9 degree

LITERATURA

1. Korniejczuk N. P.: Toczyje konstanty w teorii pribliżenija. „Nauka”, Moskwa 1987.
2. Levenberg K.: A method for the solution of certain nonlinear problems in least squares. Quart. Appl. Math. No. 2 1944 pp. 164-168.
3. Marquardt P.W.: An algorithm for least - squares estimation of nonlinear parameters., J. Soc. Industr. Appl. Math. Vol.11 No.2, Aug. 1963, pp.431-441.
4. Paszek S., Walczak J.: Identyfikacja pewnych operatorów nieliniowych w obwodach z przebiegami okresowymi i niesinusoidalnymi, XVII SPETO, Wisła. 1994 r, tom II ss. 211-218.
5. Walczak J., Paszek S.: O kanonicznych reprezentacjach operatorów nieliniowych, XVII SPETO, Wisła 1994, tom II, ss. 203-209.

Recenzent: Prof. Politechniki Krakowskiej Dr hab. inż. Maciej Siwczynski

Wpłynęło do Redakcji dnia 20 czerwca 1995 r.

Abstract

Representations of linear and nonlinear operators defined in the time and frequency domains have been discussed. The operators have various applications in the electrical circuit theory. Unification of the global form of the nonlinear operators is generally impossible. If these operators are regular, their local form is known (for instance Fredholm or Volterra operators). In the sequence Hilbert spaces l^2 there are some possibilities of this unification. A certain proposition of canonical form (Eqs. (6), (7)) for nonlinear operators in the space l^2 has been given. Determination of this form is based on maps of nonlinear operators between primary spaces (time domain) and sequence spaces l^2 (Eqs. (4), (5)). The method has been applied to identification of the form of nonlinear operators in the Hilbert cube of Sobolev space of nonsinusoidal signals. Then the method has been considered for nonlinear operators ζ in the form of polynomial of arbitrarily finite rank. The operators ζ describe nonlinear resistances (Eqs. (9)), inductances (Eqs. (10)) and capacitances (Eqs. (12)). A recurrence method of determining of these operators in the space l^2 has been given. The operators have been obtained in the closed form (Eqs. (16),(17) for inductance). More over, an identification algorithm based on Levenberg-Marquardt approximation of functions of several variables has been also given. An illustrative example to compare both methods has been presented too.