

Bernard BARON

Barbara GROCHOWICZ, WSI Opole

## APROKSYMACJA POTENCJAŁU LOGARYTMICZNEGO WARSTWY POJEDYNCZEJ ZADANEJ NA OKRĘGACH

**Streszczenie.** W pracy skonstruowano funkcje kształtu, pozwalające na aproksymację potencjału logarytmicznego zadanego na dowolnie usytuowanych okręgach płaszczyzny. Dla funkcji tych opracowano analityczny opis w postaci jednostajnie zbieżnych szeregów funkcjonalnych, co pozwala na ich obliczanie z dowolnie zadaną dokładnością. Daje to podstawę do dyskretyzacji równań całkowo-brzegowych, równoważnych problemowi Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a.

## LOGARITHMIC POTENTIAL APPROXIMATION OF SINGLE LAYER GIVEN AT THE CIRCLES

**Summary.** The construction of the shape function allowing the approximation of logarithmic potential given at arbitrary situated surface circles [3] has been made in the paper. The analytical description of these functions by means of monotone convergent series has been elaborated which allows for their calculation with the arbitrary chosen accuracy. It makes possible to get discrete form of integral - boundary equations equivalent to Dirichlet problem for two dimensional Laplace equation possible.

### 1. WSTĘP

Dwuwymiarowy model pola elektrycznego można stosować w przypadku rozpatrywania układów przewodów prowadzonych równolegle względem siebie oraz przy założeniu, że odległości między przewodami są dostatecznie małe w porównaniu z ich długością. Model ten można z powodzeniem stosować przy poszukiwaniu maksymalnych wartości natężenia pola elektrycznego na powierzchniach przewodów, jak również przy powierzchni ziemi

w miejscach maksymalnego zwisu przewodów, a więc z dala od ekranującego wpływu konstrukcji słupów.

W pracy podana będzie szczegółowa konstrukcja rozwiązania zewnętrznego problemu Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a dla linii o przewodach walcowych dowolnie usytuowanych w przestrzeni. Ze względu na nieograniczoność przestrzeni jako prototyp rozwiązania przyjęto potencjał logarymiczny warstwy pojedynczej.

## 2. MODEL MATEMATYCZNY POLA ELEKTRYCZNEGO LINII TRÓJFAZOWEJ

Niech na płaszczyźnie  $R^2$  dany jest układ  $C_k$  ( $k=1,2,..N_p$ ) przewodów o promieniu  $r_k$ , o zadanych potencjałach  $v$

$$v_k(t) = \sqrt{2} V_k \sin(\omega t + \varphi_k) \quad (1)$$

oraz zerowym potencjale na powierzchni ziemi. Dla pól wolnozmiennych, tj. dla małych pulsacji  $\omega$  w dowolnym punkcie  $X$  na zewnątrz przewodów potencjał  $V(X,t)$  spełnia równanie Laplace'a:

$$\Delta V(X,t) = 0, \quad (2)$$

$$\text{gdzie: } V(X,t) = \sqrt{2} V(X) \sin[\omega t + \varphi_v(X)] \quad (3)$$

z warunkami brzegowymi na powierzchniach przewodów:

$$V(x_1, x_2, t)|_{x \in C_k} = V(X, t)|_{x \in C_k} = v_k(t) \quad (4)$$

oraz na powierzchni ziemi ( $x_2 = 0$ ):

$$V(x_1, 0, t) = 0.$$

Ponieważ w każdym punkcie  $X$  rozpatrywanej przestrzeni potencjał (3) ma identyczną pulsację  $\omega$ , do dalszej analizy zastosujemy metodę liczb zespolonych.

Dla potencjału zespolonego:

$$\underline{V}(X) = V(X) e^{j\varphi_v(X)} \quad (5)$$

równoważny problem Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a ma postać:

$$\Delta \underline{V}(X) = 0, \quad (6)$$

$$\underline{V}(X)|_{x \in C_k} = \underline{V}_k = V_k e^{j\varphi_k}, \quad (7)$$

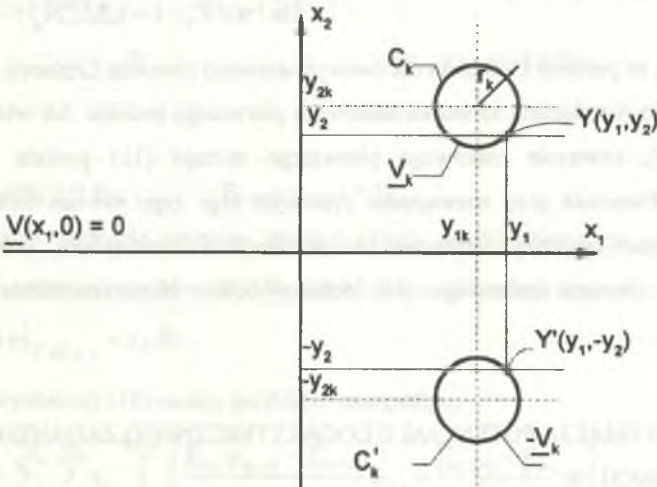
$$\underline{V}(x_1, 0) = 0, \quad (8)$$

przy czym w nieskończoności potencjał jest równy zeru.

W celu zapewnienia warunku brzegowego (8) stosuje się metodę odbicia zwierciadlanego względem osi  $x_1$  (rys.1). Polega ona na wprowadzeniu do rozważań dodatkowych przewodów  $C'_k$  ( $k=1,2,\dots,N_p$ ), będących odbiciem zwierciadlanym przewodów  $C_k$  względem osi  $x_1$ . Ponadto przyjmuje się, że potencjały przewodów  $C'_k$  wynoszą  $-V_k$ , czyli różnią się znakiem względem potencjałów przewodów  $C_k$ . W takim przypadku gęstość powierzchniowa ładunków na przewodach  $C'_k$  wynosi:

$$\underline{\sigma}'_k(Y') = -\underline{\sigma}_k(Y); \quad Y = Y(y_1, y_2); \quad Y' = Y'(y_1, -y_2), \quad (9)$$

gdzie  $\underline{\sigma}_k(Y)$  jest gęstością powierzchniową ładunków na powierzchni przewodu  $C_k$ .



Rys.1. Odbicie zwierciadlane przewodu  $C_k$  względem osi  $x_1$

Fig.1. Mirror reflection of the conductor  $C_k$  in  $X$  axis

Dla tak sformułowanego problemu poszukuje się rozwiązania równania Laplace'a w postaci potencjału logarytmicznego warstw pojedynczych  $\underline{\sigma}_k(Y)$ , określonych na przewodach  $C_k$  i  $C'_k$  w postaci:

$$\begin{aligned} \underline{V}(X) &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{N_p} \oint_{C_k} \underline{\sigma}_k(Y) \left[ \ln \left| \frac{\overline{XY}'}{|\overline{XY}} \right| \right] dl_Y = \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{N_p} \oint_{C_k} \underline{\sigma}_k(y_1, y_2) \ln \frac{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2}}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}} dl_Y. \end{aligned} \quad (10)$$

Łatwo zauważyć, że gdy  $x_2 = 0$ , potencjał (10) jest równy zeru, ponadto gdy punkt  $X$  zmierza do nieskończoności, to potencjał (10) również zmierza do zera. Z ogólnej teorii potencjału wynika [9], że funkcja (10) spełnia równanie Laplace'a (6) dla funkcji gęstości  $\underline{\sigma}_k(Y)$ , będących funkcjami ciągłymi. Istnieje jednak problem wyznaczenia tych funkcji.

Funkcje  $\underline{\sigma}_k(Y)$  należy dobrać tak, aby funkcja  $\underline{V}(X)$  określona wzorem (10) spełniała ekwipotencjalność na powierzchniach przewodów  $C_k$ :

$$\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{N_p} \oint_{C_k} \underline{\sigma}_k(y_1, y_2) \ln \frac{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2}}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}} dl_y = \underline{V}_l \quad (11)$$

dla  $x \in C_l, l = 1, 2, \dots, N_p$ .

Oznacza to, że problem Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a sprowadza się do wyznaczenia rozwiązania równania całkowego pierwszego rodzaju. Jak wiadomo z teorii potencjału [4], równanie całkowe pierwszego rodzaju (11) posiada jednoznaczne rozwiązanie. Ponieważ przy rozwiązaniu cyfrowym tego typu równań całkowych mogą wystąpić pewne problemy, związane ze stabilnością rozwiązania, dobór wielkości dyskretyzacji równania całkowego (11) dobrany będzie eksperymentalnie na układzie testującym.

### 3. APROKSYMACJA POTENCJAŁU LOGARYTMICZNEGO ZADANEGO NA OKRĘGACH

Oznaczmy przez  $Y_k (y_{1k}, y_{2k})$  współrzędne punktu  $Y_k$  położenia osi przewodu  $C_k$  o promieniu  $r_k$ . Wprowadzając lokalny walcowy układ współrzędnych dla każdego przewodu, współrzędne dowolnego punktu  $Y \in C_k$  mogą być zapisane w postaci:

$$C_k = \{Y(y_1, y_2) : y_1 = y_{1k} + r_k \cos \varphi; y_2 = y_{2k} + r_k \sin \varphi\}. \quad (12)$$

Z myślą o dyskretyzacji równania całkowego wprowadza się podział okręgów  $C_k$  poszczególnych przekrojów poprzecznych przewodów na łuki  $C_{k,i}$ :

$$C_{k,i} = \{Y(y_1, y_2) : Y(y_1, y_2) \in C_k; \varphi_{k,i} \leq \varphi \leq \varphi_{k,i+1}\}. \quad (13)$$

Niech  $Y_{k,i}$  będą punktami podziału tych okręgów. Przyporządkujmy tym punktom tzw. zmienne węzłowe:

$$\underline{E}_{k,i} = \frac{\sigma_{k,i}}{\epsilon_0}, \quad (14)$$

stanowiące składową normalną natężenia pola elektrycznego w punkcie podziału  $Y_{k,i}$  (gdzie  $\sigma_{k,i}$  gęstość powierzchniowa w punkcie  $Y_{k,i}$ ).

Aproksymujemy następnie natężenie pola na powierzchni przewodów  $C_k$  ( $Y \in C_{k,i}$ ) funkcją sklejaną stopnia pierwszego:

$$\underline{E}_{k,i}(\varphi) = \underline{E}_k(y_1, y_2) \Big|_{(y_1, y_2) \in C_{k,i}} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_k(y_1, y_2) =$$

$$= \begin{cases} \frac{\underline{E}_{k,i}\varphi_{k,i+1} - \underline{E}_{k,i+1}\varphi_{k,i}}{\varphi_{k,i+1} - \varphi_{k,i}} + \frac{\underline{E}_{k,i+1} - \underline{E}_{k,i}}{\varphi_{k,i+1} - \varphi_{k,i}} \varphi & \text{dla } (y_1, y_2) \in C_{k,i}; \varphi_{k,i} \leq \varphi \leq \varphi_{k,i+1} \\ 0 & \text{dla } (y_1, y_2) \notin C_{k,i} \end{cases} \quad (15)$$

gdzie:

$$\underline{E}_{k,i}(\varphi_{k,i}) = \underline{E}_{k,i}; \quad \underline{E}_{k,i+1}(\varphi_{k,i+1}) = \underline{E}_{k,i+1}.$$

Uwzględniając następnie walcowe, lokalne układy współrzędnych do opisu konturów przewodów  $C_k$  w postaci wzorów (12), dla których miara całkowania wynosi:

$$dl_Y \Big|_{Y \in C_{k,j}} = r_k d\varphi, \quad (16)$$

potencjał logarytmiczny (10) można przybliżyć następująco:

$$\underline{V}(X) \cong \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} r_k \int_{\varphi_{k,i}}^{\varphi_{k,i+1}} \left[ \frac{\underline{E}_{k,i}\varphi_{k,i+1} - \underline{E}_{k,i+1}\varphi_{k,i}}{\varphi_{k,i+1} - \varphi_{k,i}} \varphi_{k,i} + \frac{\underline{E}_{k,i+1} - \underline{E}_{k,i}}{\varphi_{k,i+1} - \varphi_{k,i}} \varphi \right]$$

$$\ln \frac{\sqrt{(x_1 - y_{1k} - r_k \cos \varphi)^2 + (x_2 + y_{2k} + r_k \sin \varphi)^2}}{\sqrt{(x_1 - y_{1k} - r_k \cos \varphi)^2 + (x_2 - y_{2k} - r_k \sin \varphi)^2}} d\varphi =$$

$$= \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} \left[ A(X, Y_k, r_k, \varphi_{k,i}, \varphi_{k,i+1}) \underline{E}_{k,i} + B(X, Y_k, r_k, \varphi_{k,i}, \varphi_{k,i+1}) \underline{E}_{k,i+1} \right], \quad (17)$$

gdzie:  $N_k$  - liczba punktów podziału przewodu  $C_k$ ; natomiast funkcje kształtu  $A(\cdot)$  i  $B(\cdot)$  wyrażają się całkami:

$$A(X, Y_0, r, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{r}{2\pi(\varphi_2 - \varphi_1)} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\varphi_2 - \varphi) \ln \frac{\sqrt{(x_1 - y_{10} - r \cos \varphi)^2 + (x_2 + y_{20} + r \sin \varphi)^2}}{\sqrt{(x_1 - y_{10} - r \cos \varphi)^2 + (x_2 - y_{20} - r \sin \varphi)^2}} d\varphi, \quad (18)$$

$$B(X, Y_0, r, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{r}{2\pi(\varphi_2 - \varphi_1)} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\varphi - \varphi_1) \ln \frac{\sqrt{(x_1 - y_{10} - r \cos \varphi)^2 + (x_2 - y_{20} + r \sin \varphi)^2}}{\sqrt{(x_1 - y_{10} - r \cos \varphi)^2 + (x_2 - y_{20} - r \sin \varphi)^2}} d\varphi \quad (19)$$

Funkcje kształtu (18) i (19) są to funkcje złożone ze względu na: współrzędne  $(x_1, x_2)$  dowolnie usytuowanego punktu  $X$ , współrzędne  $(y_{10}, y_{20})$  punktu  $Y_0$ , położenie osi przewodu o promieniu  $r$  oraz granice całkowania  $\varphi_1, \varphi_2$ .

Potencjał logarytmiczny warstwy pojedynczej (10) jest całką niewłaściwą w przypadku, gdy punkt  $X \in C_k$  leży na powierzchni przewodu  $C_k$  ( $k=1, 2, \dots, N_p$ ).

W pracy pokazane będzie, że niezależnie od położenia punktu  $X$  funkcje kształtu (18) i (19) są wyrażalne za pomocą kombinacji funkcji standardowych, co ma istotnie znaczenie dla dokładności aproksymacji potencjału (10).

#### 4. FUNKCJE KSZTAŁTU DLA PUNKTÓW $X$ LEŻĄCYCH NA ZEWNĄTRZ PRZEWODÓW

Jeżeli punkt  $X$  nie leży na powierzchni przewodu, to wyrażenia występujące pod logarytmem w całkach (18) i (19) można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_1 - y_{10} - r \cos \varphi)^2 + (x_2 - y_{20} - r \sin \varphi)^2} &= \\ &= \left| \overline{XY_0} \right| \left[ 1 - 2\xi(X, Y_0) \cos(\varphi - \alpha(X, Y_0)) + \xi^2(X, Y_0) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{gdzie } \left| \overline{XY_0} \right| = \sqrt{(x_1 - y_{10})^2 + (x_2 - y_{20})^2}, \quad (21)$$

$$\xi(X, Y_0, r) = \frac{r}{|\overline{XY}_0|} < 1, \quad (22)$$

$$\cos \alpha(X, Y_0) = \frac{x_1 - y_{10}}{|\overline{XY}_0|}; \quad \sin \alpha(X, Y_0) = \frac{x_2 - y_{20}}{|\overline{XY}_0|}. \quad (23)$$

Można wykazać, że jeżeli  $\xi < 1$ , to funkcja logarymiczna  $\ln|1 - 2\xi \cos \beta + \xi^2|$  ma następujące rozwinięcie na szereg Fouriera ze względu na  $\beta$ :

$$\ln|1 - 2\xi \cos \beta + \xi^2| = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n} \cos n\beta. \quad (24)$$

Jeżeli  $\xi < 1$ , to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n}$  jest zbieżny, wobec czego szereg funkcyjny (24) ze względu na  $\beta$  jest jednostajnie zbieżny.

Uwzględniając więc rozwinięcie (24) oraz wzór (20) i (21) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} & \ln \sqrt{(x_1 - y_{10} - r \cos \varphi)^2 + (x_2 - y_{20} - r \sin \varphi)^2} = \\ & = \ln |\overline{XY}_0| - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{r}{|\overline{XY}_0|} \right)^n \cos n[\varphi - \alpha(X, Y_0)]. \end{aligned} \quad (25)$$

Postępując analogicznie z drugim pierwiastkiem występującym pod całkami (18) i (19) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x_1 - y_{10} - r \cos \varphi)^2 + (x_2 + y_{20} + r \sin \varphi)^2} = \\ & = |\overline{XY}'_0| \left[ 1 - 2\xi(X, Y'_0) \cos(\varphi + \alpha(X, Y'_0)) + \xi^2(X, Y'_0) \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (26)$$

gdzie:  $Y'_0 = Y'_0(y_{10}, -y_{20})$  - współrzędne osi przewodu odbicia zwierciadlanego,

$$|\overline{XY}'_0| = \sqrt{(x_1 - y_{10})^2 + (x_2 + y_{20})^2}, \quad (27)$$

$$\xi(X, Y'_0, r) = \frac{r}{|\overline{XY}'_0|} < 1 \text{ (zachodzi zawsze dla dowolnego punktu } X), \quad (28)$$

$$\cos \alpha(X, Y'_0) = \frac{x_1 - y_{10}}{\left| \overline{XY'_0} \right|}; \quad \sin \alpha(\overline{X, Y'_0}) = \frac{x_2 + y_{20}}{\left| \overline{XY'_0} \right|}. \quad (29)$$

Zgodnie więc z rozwinięciem (24) logarytm funkcji (26) ma następujące rozwinięcie:

$$\begin{aligned} \ln \sqrt{(x_1 - y_{10} - r \cos \varphi)^2 + (x_2 + y_{20} + r \sin \varphi)^2} = \\ = \ln \left| \overline{XY'_0} \right| - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{r}{\left| \overline{XY'_0} \right|} \right)^n \cos n[\varphi + \alpha(X, Y'_0)]. \end{aligned} \quad (30)$$

Szeregi funkcyjne (25) i (30) są jednostajnie zbieżne, można je więc całkować wyraz po wyrazie. Podstawiając rozwinięcia (25) i (30) do operacji całkowych (18) i (19) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} A(X, Y_0, r, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{r}{2\pi} \left\{ \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \ln \left| \frac{\overline{XY'_0}}{\overline{XY_0}} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[ \left( \frac{r}{\left| \overline{XY'_0} \right|} \right)^n \sin(n(\varphi_1 + \alpha(X, Y'_0))) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left( \frac{r}{\left| \overline{XY'_0} \right|} \right)^n \sin(n(\varphi_1 - \alpha(X, Y'_0))) \right] - \\ - \frac{1}{\varphi_2 - \varphi_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left( \frac{r}{\left| \overline{XY'_0} \right|} \right)^n \left[ \cos(n(\varphi_2 - \alpha(X, Y_0))) - \cos(n(\varphi_1 - \alpha(X, Y_0))) \right] + \\ + \frac{1}{\varphi_2 - \varphi_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left( \frac{r}{\left| \overline{XY'_0} \right|} \right)^n \left[ \cos(n(\varphi_2 + \alpha(X, Y'_0))) - \cos(n(\varphi_1 + \alpha(X, Y'_0))) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} B(X, Y_0, r, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{r}{2\pi} \left\{ \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \ln \left| \frac{\overline{XY'_0}}{\overline{XY_0}} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[ \left( \frac{r}{\left| \overline{XY'_0} \right|} \right)^n \sin(n(\varphi_2 - \alpha(X, Y_0))) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left( \frac{r}{\left| \overline{XY'_0} \right|} \right)^n \sin(n(\varphi_2 + \alpha(X, Y'_0))) \right] + \\ + \frac{1}{\varphi_2 - \varphi_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left( \frac{r}{\left| \overline{XY'_0} \right|} \right)^n \left[ \cos(n(\varphi_2 - \alpha(X, Y_0))) - \cos(n(\varphi_1 - \alpha(X, Y_0))) \right] - \\ - \frac{1}{\varphi_2 - \varphi_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left( \frac{r}{\left| \overline{XY'_0} \right|} \right)^n \left[ \cos(n(\varphi_2 + \alpha(X, Y'_0))) - \cos(n(\varphi_1 + \alpha(X, Y'_0))) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$



Funkcje kształtu (31) i (32) można przedstawić w bardziej zwartej postaci. W tym celu zauważmy, że uporządkowanie sumy ze względu na "i" we wzorze (17) daje:

$$V(X) = \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} C(X, Y_k, r_k, \varphi_{k,i-1}, \varphi_{k,i}, \varphi_{k,i+1}) E_{k,i}, \quad (33)$$

gdzie:

$$C(X, Y_o, r_k, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = B(X, Y_o, r_k, \varphi_1, \varphi_2) + A(X, Y_o, r_k, \varphi_2, \varphi_3). \quad (34)$$

Zakładając równomierny podział przewodu na elementy

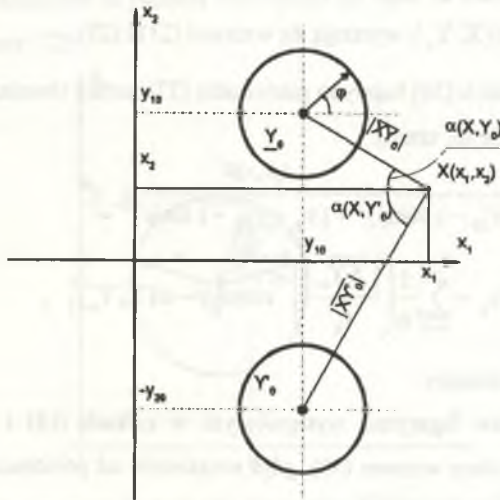
$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_3 - \varphi_2 \quad (35)$$

oraz podstawiając do definicji (34) wzory (31) i (32) po serii przekształceń trygonometrycznych otrzymuje się następującą zwartą postać funkcji kształtu:

$$F(X, Y_o, r, \Delta\varphi, \varphi) = C(X, Y_o, r, \varphi - \Delta\varphi, \varphi, \varphi + \Delta\varphi) =$$

$$= \frac{r}{2\pi} \left\{ \Delta\varphi \ln \left| \frac{\overline{XY'_o}}{\overline{XY_o}} \right| + \frac{4}{\Delta\varphi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n \frac{\Delta\varphi}{2})}{n^3} \left( \frac{r}{|\overline{XY_o}|} \right)^n \cos(n(\varphi - \alpha(X, Y_o))) - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{\Delta\varphi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n \frac{\Delta\varphi}{2})}{n^3} \left( \frac{r}{|\overline{XY'_o}|} \right)^n \cos(n(\varphi - \alpha(X, Y'_o))) \right\}. \quad (36)$$



Rys.2. Interpretacja geometryczna funkcji kształtu (36)

Fig.2. Geometrical interpretation of the shape function (36)

Jeżeli punkt  $X$  leży na zewnątrz okręgu o promieniu  $r$ , a o środku w punkcie  $Y_o$ , to funkcja kształtu (36) jest szeregiem jednostajnie zbieżnym. Stosując funkcje kształtu w postaci (36), aproksymacja potencjału logarymicznego warstwy pojedynczej (33) przyjmie postać:

$$\underline{V}(X) = \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} F(X, Y_k, r_k, \Delta\varphi_k, \varphi_{k,i}) \underline{E}_{k,i} . \quad (37)$$

## 5. FUNKCJE KSZTAŁTU DLA PUNKTÓW $X$ LEŻĄCYCH WEWNĄTRZ PRZEWODÓW

Jeżeli punkt  $X$  nie leży na powierzchni przewodu, lecz w jego wnętrzu, to wyrażenie występujące w całkach (18) i (19) można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x_1 - y_{10} - r \cos\varphi)^2 + (x_2 - y_{20} - r \sin\varphi)^2} = \\ & = r_k \left[ 1 - 2\xi(X, Y_o, r) \cos(\varphi - \alpha(X, Y_o)) + \xi^2(X, Y_o, r) \right]^{\frac{1}{2}} , \end{aligned} \quad (38)$$

gdzie:

$$\xi(X, Y_o, r) = \frac{|\overline{XY_o}|}{r} < 1 , \quad (39)$$

natomiast  $|\overline{XY_o}|$  i  $\alpha(X, Y_o)$  wyrażają się wzorami (21) i (23).

Ze względu na warunek (38) logarytm pierwiastka (37) można również rozwinąć na szereg Fouriera (24). Otrzymuje się szereg:

$$\begin{aligned} & \ln \sqrt{(x_1 - y_{10} - r \cos\varphi)^2 + (x_2 - y_{20} - r \sin\varphi)^2} = \\ & = \ln r_k - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{|\overline{XY_o}|}{r_k} \right)^n \cos n[\varphi - \alpha(X, Y_o)] , \end{aligned} \quad (40)$$

który jest jednostajnie zbieżny.

Drugi ze składników logarytmu występujących w całkach (18) i (19) ma identyczne rozwinięcie na szereg dany wzorem (30), gdyż niezależnie od położenia punktu  $X$  w prawej półpłaszczyźnie  $x_2 \geq 0$  jest on jednostajnie zbieżny. Podstawiając więc rozwinięcie (39) oraz

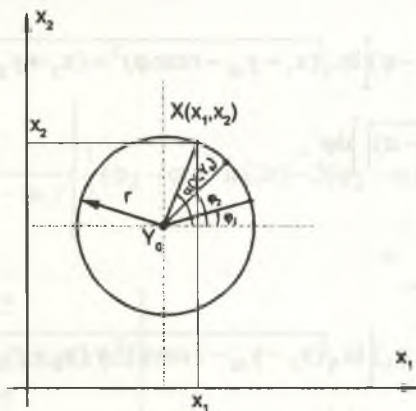
(30) do całek (18), (19) i całkując wyraz po wyrazie otrzymuje się zgodnie z definicją (34) i (36) następującą postać funkcji kształtu:

$$F(X, Y_0, r, \Delta\varphi, \varphi) = \frac{r}{2\pi} \left\{ \Delta\varphi \ln \frac{|XY_0|}{r} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n \frac{\Delta\varphi}{2})}{n^3} \left( \frac{|XY_0|}{r} \right)^n \cos(n(\varphi - \alpha(X, Y_0))) - \right. \\ \left. - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n \frac{\Delta\varphi}{2})}{n^3} \left( \frac{r}{|XY_0|} \right)^n \cos(n(\varphi + \alpha(X, Y_0))) \right\}. \quad (41)$$

Jeżeli więc punkt  $X$  leży wewnątrz okręgu o promieniu  $r$ , na którym zadana jest warstwa pojedyncza potencjału logarytmicznego, to do jego aproksymacji zastosujemy funkcje kształtu (41).

## 6. FUNKCJE KSZTAŁTU DLA PUNKTÓW $X$ LEŻĄCYCH NA POWIERZCHNI PRZEWODÓW

Jeżeli punkt  $X$  leży na powierzchni przewodów, wówczas potencjał logarytmiczny (10) staje się całką niewłaściwą, lecz zbieżną. Obliczenie tej całki, a dokładniej jej przybliżenie (17), nie może być dokonane za pomocą rozwinięcia jej jądra na szereg Fouriera zgodnie z wzorem (25). Parametr (22):



Rys.3. Oznaczenia do wzoru na funkcję  $F(\cdot)$  dla punktu  $X$  leżącego na konturze przewodu  
Fig.3. Denotations used in the relation describing function  $F(\cdot)$  for the point laying on the contour of a conductor

$$\xi(X, Y_0, r) = \frac{r}{|XY_0|} = 1 \quad (42)$$

jest wówczas równy jedności i nie można stosować rozwinięcia (24).

Oznaczmy przez:

$$\alpha = \alpha(X, Y_0) \quad (43)$$

kąt określający położenie punktu  $X$  na okręgu o promieniu  $r$ , a o środku w punkcie  $Y_0$ .

Współrzędne punktu  $X(x_1, x_2)$  wyrażają się wówczas wzorami:

$$x_1 = y_{10} + r \cos \alpha; \quad x_2 = y_{20} + r \sin \alpha. \quad (44)$$

Podstawiając wzory (44) pod pierwiastek całek (18) i (19) otrzymuje się:

$$\sqrt{(x_1 - y_{10} - r \cos \varphi)^2 + (x_2 - y_{20} - r \sin \varphi)^2} = r\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(\varphi - \alpha)}. \quad (45)$$

Ze wzoru (45) widać, że całki (18) i (19) są niewłaściwe, gdyż dla  $\varphi = \alpha$  wyrażenia pod logarytmem przyjmują wartość zerową.

W dalszej kolejności wykazana będzie ich zbieżność i sposób ich obliczenia. Podstawmy w tym celu wzór (45) do całek (18) i (19). Otrzymuje się wówczas:

$$\begin{aligned} A(X, Y_0, r, \varphi_1, \varphi_2) \Big|_{|XY_0|=r} &= \\ &= \frac{r}{2\pi(\varphi_2 - \varphi_1)} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\varphi_2 - \varphi) \left[ \ln \sqrt{(x_1 - y_{10} - r \cos \varphi)^2 + (x_2 + y_{20} + r \sin \varphi)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \ln \left| r\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(\varphi - \alpha)} \right| \right] d\varphi, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} B(X, Y_0, r, \varphi_1, \varphi_2) \Big|_{|XY_0|=r} &= \\ &= \frac{r}{2\pi(\varphi_2 - \varphi_1)} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\varphi - \varphi_1) \left[ \ln \sqrt{(x_1 - y_{10} - r \cos \varphi)^2 + (x_2 + y_{20} + r \sin \varphi)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \ln \left| r\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(\varphi - \alpha)} \right| \right] d\varphi, \end{aligned} \quad (47)$$

gdzie  $\alpha = \alpha(X, Y_0)$  określa kąt położenia punktu  $X$  na okręgu o promieniu  $r$ .

Przyjmijmy dla drugiej części całek we wzorach (46) i (47) następujące oznaczenia:

$$A_1(r, \alpha, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{r}{2\pi(\varphi_2 - \varphi_1)} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\varphi_2 - \varphi) \ln|r\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(\varphi - \alpha)}| d\varphi \quad (48)$$

$$B_1(r, \alpha, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{r}{2\pi(\varphi_2 - \varphi_1)} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\varphi - \varphi_1) \ln|r\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(\varphi - \alpha)}| d\varphi \quad (49)$$

i stosując w całkach (48) i (49) podstawienie:

$$\varphi - \alpha = 2x, \quad (50)$$

uzyskuje się przekształcenie do następującej postaci:

$$A_1(r, \alpha, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{r}{2\pi(\varphi_2 - \varphi_1)} \left\{ \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)^2 \ln(2r) + 2(\varphi_2 - \alpha) \int_{\frac{\varphi_1 - \alpha}{2}}^{\frac{\varphi_2 - \alpha}{2}} \ln|\sin(x)| dx - \right. \\ \left. - 4 \int_{\frac{\varphi_1 - \alpha}{2}}^{\frac{\varphi_2 - \alpha}{2}} x \ln|\sin(x)| dx \right\}, \quad (51)$$

$$B_1(r, \alpha, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{r}{2\pi(\varphi_2 - \varphi_1)} \left\{ \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)^2 \ln(2r) - 2(\varphi_2 - \alpha) \int_{\frac{\varphi_1 - \alpha}{2}}^{\frac{\varphi_2 - \alpha}{2}} \ln|\sin(x)| dx + \right. \\ \left. + 4 \int_{\frac{\varphi_1 - \alpha}{2}}^{\frac{\varphi_2 - \alpha}{2}} x \ln|\sin(x)| dx \right\}. \quad (52)$$

Z konstrukcji wzorów (51) i (52) wynika, że ich stosowanie wymaga znajomości następujących całek nieoznaczonych:

$$c \ln \sin(x) = \int \ln |\sin x| dx, \quad (53)$$

$$cx \ln \sin(x) = \int x \ln |\sin x| dx. \quad (54)$$

Całki (53) i (54) mają analityczne rozwinięcia [5]. Pierwsza z nich dana jest następującym szeregiem zbieżnym dla dowolnego  $x$

$$c \ln \sin(x) = x \ln|x| - x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} B_n x^{2n-1}}{n(2n+1)!}, \quad (55)$$

gdzie  $B_n$  są to liczby Bernoulliego:

$$B_n = \frac{2n!}{\pi^{2n} 2^{2n-1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^{2n}}. \quad (56)$$

$$\text{Np. } B_1 = \frac{1}{6}; \quad B_2 = \frac{1}{30}; \quad B_3 = \frac{1}{42}; \quad B_4 = \frac{1}{30}; \quad B_5 = \frac{5}{66}.$$

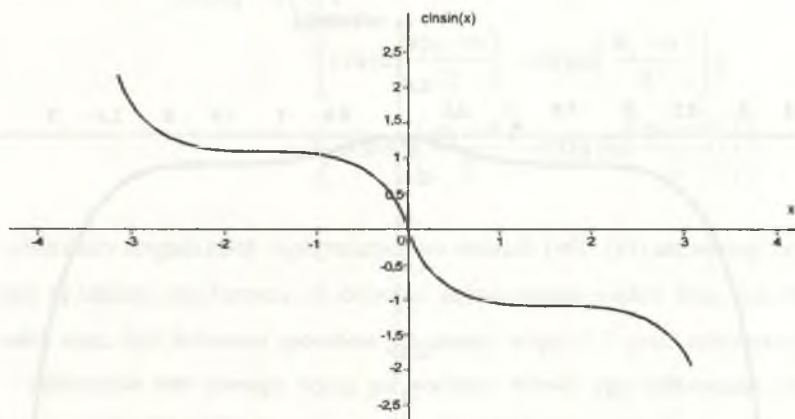
Jeżeli podstawić liczby Bernoulliego (56) do szeregu (55), to funkcja  $c \ln \sin(x)$  jako całka nieoznaczona z  $\ln |\sin x|$  wyrażona będzie za pomocą następującego szeregu:

$$c \ln \sin(x) = x \ln|x| - x - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n+1}, \quad (57)$$

gdzie:

$$a_n = \frac{1}{n(2n+1)\pi^{2n}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^{2n}}. \quad (58)$$

Wykres funkcji  $c \ln \sin(x)$  w przedziale  $(-2\pi, +2\pi)$  przedstawiono na rys.4. Z przebiegu tej funkcji wynika, że jest ona funkcją nieparzystą, tj.  $c \ln \sin(-x) = -c \ln \sin(x)$  i w zerze przyjmuje wartość zero.

Rys.4. Całka nieoznaczona  $\int \ln|\sin x| dx$ Fig.4. Indefinite integral  $\int \ln|\sin x| dx$ 

Nie istnieje natomiast pochodna tej funkcji w zerze, gdyż:

$$\frac{d}{dx} \ln|\sin(x)| = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cot(x). \quad (59)$$

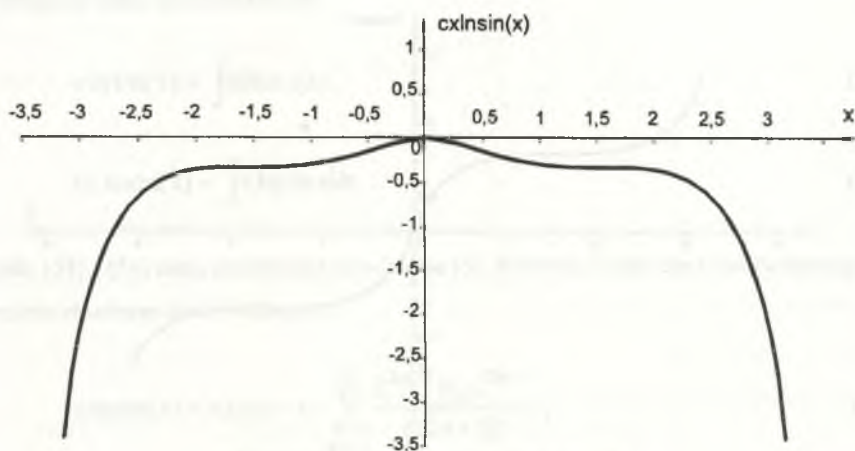
Oznacza to, że całki występujące we wzorach (51) i (52) są całkami niewłaściwymi, lecz zbieżnymi i dla ich obliczenia należy skorzystać ze wzorów (53) i (57).

Druga z całek (54) może być obliczona w wyniku całkowania przez części oraz na podstawie funkcji (57). Z całkowania przez części otrzymuje się:

$$cx \ln \sin(x) = \int x \ln|\sin(x)| dx = x \cdot c \ln \sin(x) - \int c \ln \sin(x) dx. \quad (60)$$

Podstawiając do wzoru (60) funkcję  $c \ln \sin(x)$  daną szeregiem (57), otrzymuje się po scałkowaniu wyrazu po wyrazie następujący wynik:

$$cx \ln \sin(x) = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n+2} a_n x^{2n+2}, \quad (61)$$

Rys.5. Całka nieoznaczona  $\int x \ln|\sin x| dx$ Fig.5. Indefinite integral  $\int x \ln|\sin x| dx$ 

gdzie współczynniki  $a_n$  wyrażają się wzorem (58).

Wykres funkcji  $cx\ln\sin(x)$  przedstawiono w przedziale  $(-2\pi, +2\pi)$  na rys.5. Z przebiegu funkcji wynika, że jest ona funkcją parzystą, tj.  $cx\ln\sin(-x) = cx\ln\sin(x)$ . W konstrukcjach funkcji (57) i (61) występują człony  $x \ln|x|$ ,  $x^2 \ln|x|$ . Należy więc pamiętać, że w obliczeniach numerycznych wyrażenia te przyjmują wartość zerową dla  $x=0$  mimo że  $\ln|x|$  nie istnieje w tym punkcie. Uwzględniając funkcje (53) i (54) dane wzorami (57) i (61) we wzorach (51) i (52) otrzymuje się:

$$A_1(r, \alpha, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{r}{2\pi(\varphi_2 - \varphi_1)} \left\{ \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)^2 \ln(2r) + 2(\varphi_2 - \alpha) \left[ c \ln \sin\left(\frac{\varphi_2 - \alpha}{2}\right) - c \ln \sin\left(\frac{\varphi_1 - \alpha}{2}\right) \right] - 4 \left[ cx \ln \sin\left(\frac{\varphi_2 - \alpha}{2}\right) - cx \ln \sin\left(\frac{\varphi_1 - \alpha}{2}\right) \right] \right\}, \quad (62)$$



$$B_1(r, \alpha, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{r}{2\pi(\varphi_2 - \varphi_1)} \left\{ \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)^2 \ln(2r) - 2(\varphi_1 - \alpha) \right. \\ \left. \left[ c \ln \sin\left(\frac{\varphi_2 - \alpha}{2}\right) - c \ln \sin\left(\frac{\varphi_1 - \alpha}{2}\right) \right] + \right. \\ \left. + 4 \left[ cx \ln \sin\left(\frac{\varphi_2 - \alpha}{2}\right) - cx \ln \sin\left(\frac{\varphi_1 - \alpha}{2}\right) \right] \right\}. \quad (63)$$

Po obliczeniu drugich całek występujących we wzorach (46) i (47) zauważmy, że pierwsze ich całki są całkami regularnymi dla dowolnie usytuowanego punktu  $X(x_1, x_2)$ . Obliczenie tych całek może być dokonane sposobem pokazanym w pkt. 2.1 przez podstawienie wzoru (30) i całkowanie tam szeregu wyraz po wyrazie. Wynik tego całkowania oraz wynik całkowania całek (48) i (49) danych wzorem (62) i (63) daje następującą postać całek (46) i (47):

$$A(X, Y_0, r, \varphi_1, \varphi_2) \Big|_{\overline{XY_0}=r} = \frac{r}{2\pi} \left\{ \frac{-1}{\varphi_2 - \varphi_1} \left[ \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)^2 \ln(2r) + 2(\varphi_2 - \alpha) \right. \right. \\ \left. \left. \left( c \ln \sin\left(\frac{\varphi_2 - \alpha}{2}\right) - c \ln \sin\left(\frac{\varphi_1 - \alpha}{2}\right) \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - 4 \left( cx \ln \sin\left(\frac{\varphi_2 - \alpha}{2}\right) - cx \ln \sin\left(\frac{\varphi_1 - \alpha}{2}\right) \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) \ln |\overline{XY_0}'| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( \frac{r}{|\overline{XY_0}'|} \right)^n \sin(n(\varphi_1 + \alpha(\overline{X, Y_0}')) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\varphi_2 - \varphi_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left( \frac{r}{|\overline{XY_0}'|} \right)^n \left[ \cos(n(\varphi_2 + \alpha(X, Y_0'))) - \cos(n(\varphi_1 + \alpha(X, Y_0'))) \right] \right\}, \quad (64)$$

$$\begin{aligned}
 B(X, Y_0, r, \varphi_1, \varphi_2) \Big|_{|\overline{XY_0}|=r} &= \frac{r}{2\pi} \left\{ \frac{-1}{\varphi_2 - \varphi_1} \left[ \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)^2 \ln(2r) - 2(\varphi_2 - \alpha) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left( c \ln \sin \left( \frac{\varphi_2 - \alpha}{2} \right) - c \ln \sin \left( \frac{\varphi_1 - \alpha}{2} \right) \right) \right] + \\
 &\quad \left. + 4 \left( cx \ln \sin \left( \frac{\varphi_2 - \alpha}{2} \right) - cx \ln \sin \left( \frac{\varphi_1 - \alpha}{2} \right) \right) \right\} + \quad (65) \\
 &+ \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) \ln |\overline{XY'_0}| - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( \frac{r}{|\overline{XY'_0}|} \right)^n \sin(n(\varphi_2 + \alpha(\overline{X}, Y'_0))) - \\
 &- \frac{1}{\varphi_2 - \varphi_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left( \frac{r}{|\overline{XY'_0}|} \right)^n \left[ \cos(n(\varphi_2 + \alpha(X, Y'_0))) - \cos(n(\varphi_1 + \alpha(X, Y'_0))) \right],
 \end{aligned}$$

gdzie:  $|\overline{XY'_0}|$  wyraża się wzorem (27),  $\cos \alpha(X, Y'_0)$ ;  $\sin \alpha(X, Y'_0)$  wzorami (29),

$\alpha$  - kąt położenia punktu  $X(x_1, x_2)$  na okręgu o promieniu  $r$  i środku w punkcie  $Y_0$ .

Funkcje kształtu (64) i (65) pozwalają aproksymować również potencjał logarymiczny warstwy pojedynczej dany wzorem (10) w przypadku, gdy punkty  $X$  leżą na powierzchni przewodów  $C_1$  ( $x \in C_1$ ) za pomocą wzoru (33). Należy wówczas uwzględnić przypadek (porównaj wzór (34)):

$$\begin{aligned}
 C(X, Y_0, r, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \Big|_{|\overline{XY_0}|=r} &= B(X, Y_0, r, \varphi_1, \varphi_2) \Big|_{|\overline{XY_0}|=r} + \\
 &+ A(X, Y_0, r, \varphi_2, \varphi_3) \Big|_{|\overline{XY_0}|=r}, \quad (66)
 \end{aligned}$$

gdzie funkcje  $B(\cdot)$  i  $A(\cdot)$  występujące we wzorze (66) wyrażają się wzorami (64) i (65).

Zakładając równomierny podział poszczególnych okręgów o promieniu  $r$  na elementy, tj.

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_3 - \varphi_2$$

oraz podstawiając do wzoru (66) wzory (64) i (65), po serii przekształceń trygonometrycznych otrzymuje się następującą zwartą postać funkcji kształtu dla punktów  $X$  leżących na tym okręgu:

$$\begin{aligned}
F(X, Y_0, r, \Delta\varphi, \varphi) \Big|_{|XY_0|=r} &= C(X, Y_0, r, \varphi - \Delta\varphi, \varphi, \varphi + \Delta\varphi) \Big|_{|XY_0|=r} = \\
&= \frac{r}{2\pi} \left\{ \Delta\varphi \ln \left( \frac{|XY'_0|}{2r} \right) + \frac{1}{\Delta\varphi} \left[ 4(\varphi - \alpha) c \ln \sin \left( \frac{\varphi_2 - \alpha}{2} \right) - \right. \right. \\
&- 2(\varphi - \alpha - \Delta\varphi) c \ln \sin \left( \frac{(\varphi - \alpha - \Delta\varphi)}{2} \right) - 2(\varphi - \alpha + \Delta\varphi) c \ln \sin \left( \frac{(\varphi - \alpha + \Delta\varphi)}{2} \right) + \\
&+ 4cx \ln \sin \left( \frac{(\varphi - \alpha - \Delta\varphi)}{2} \right) - 8cx \ln \sin \left( \frac{(\varphi - \alpha)}{2} \right) + 4cx \ln \sin \left( \frac{(\varphi - \alpha + \Delta\varphi)}{2} \right) \left. \right] - \\
&- \frac{4}{\Delta\varphi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \left( n \frac{\Delta\varphi}{2} \right)}{n^3} \left( \frac{r}{|XY'_0|} \right)^2 \cos(n(\varphi + \alpha(X, Y'_0))) \left. \right\}, \quad (67)
\end{aligned}$$

gdzie:  $\alpha$  - kąt położenia punktu  $X$  na okręgu o promieniu  $r$  i środka  $Y_0$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 - y_{10}}{r}; \quad \sin \alpha = \frac{x_2 - y_{20}}{r};$$

$$\cos \alpha(X, Y'_0) = \frac{x_1 - y_{10}}{|XY'_0|}; \quad \sin \alpha(X, Y'_0) = \frac{x_2 + y_{20}}{|XY'_0|}.$$

Wzór (67) w połączeniu ze wzorami (41) i (36) wyczerpuje wszystkie możliwości konstrukcji funkcji  $F(\cdot)$ , w zależności od współrzędnych  $(x_1, x_2)$  dowolnie usytuowanego punktu  $X$  względem okręgu o środku w punkcie  $Y_0(y_{10}, y_{20})$  i promieniu  $r$ . Niezależnie więc od położenia punktu  $X$ , potencjał logarytmiczny warstwy pojedynczej zadany na okręgach (wzór (10)) można aproksymować następująco:

$$\underline{V}(X) \cong \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} F(X, Y_k, r_k, \Delta\varphi_k, \varphi_{k,i}) \underline{E}_{k,i}. \quad (68)$$

## 7. WNIOSKI

Opracowany algorytm aproksymacji potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej określonej na okręgach za pomocą kombinacji funkcji standardowych (41) i (67) pozwala na bardzo dokładne rozwiązanie numeryczne równań całkowych równoważnych problemowi Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a. Umożliwia on badanie pola

elektrycznego w dwuwymiarowym modelu linii przesyłowych o dowolnych napięciach i konfiguracjach. Istnieje więc możliwość badania rozkładów natężenia pola elektrycznego na powierzchni przewodów roboczych i odgromowych jak również w dowolnym punkcie leżącym na zewnątrz tych przewodów lub na powierzchni ziemi za pośrednictwem jednego algorytmu obliczeniowego.

#### LITERATURA

1. Baron B.: Analiza numeryczna równań całkowo-brzegowych pól elektrycznych pewnej klasy modeli obliczeniowych. ZN Pol. Śl. s. Elektryka z.97, Gliwice 1985.
2. Bronsztejn L.N., Siemiendiajew K.A.: Matematyka, cz.IV. PWN, Warszawa 1986.
3. Tozoni O.W.: Raszczot elektromagnitnych polej na wycislitelnych maszinach. Kijew 1967.
4. Wolska-Bochenek J., Borzymowski A., Chmaj J., Tryjarska M.: Zarys teorii równań całkowych i równań różniczkowych cząstkowych. PWN, Warszawa 1981.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy Skubis, prof. WSI Opole

Wpłynęło do Redakcji dnia 15 grudnia 1995 r.

#### Abstract

Numerical solution of boundary integral equations equivalent to Dirichlet problem for two dimensional Laplace equation requires the approximation of integral operator of the logarithmic potential of single layer type. To obtain minimization of the costs of numerical calculation the shape function has been constructed in the form of analytical function. Such functions allow to approximate the logarithmic potential given at arbitrary situated circles on the surface. Construction of the shape functions for the points situated variously in relation to the circles have been described by the equations (36), (41) and (67). For those functions analytical description has been elaborated in the form of function series. It makes possible to calculate then with arbitrary chosen accuracy. Basing shape functions potential distributions can be examined in an arbitrary chosen point X according to equation (68).