ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1996
Seria: ELEKTRYKA z.152 Nr kol.1324

Zygmunt PIĄTEK

ROZKŁAD POLA TEMPERATURY W PRZEWODACH RUROWYCH JEDNOFAZOWEGO TORU PRĄDOWEGO DUŻEJ CZĘSTOTLIWOŚCI

Streszczenie. W pracy rozpatrzono wpływ efektów naskórkowości i zbliżenia na rozkład temperatury w dwóch równoległych przewodach rurowych wiodących prądy sinusoidalne dużej częstotliwości. Do rozwiązania numerycznego wykorzystano metodę różnic skończonych.

DISTRIBUTION OF THE TEMPERATURE FIELD IN THE TUBULAR CONDUCTORS OF HIGH FREQUENCY MONOPHASE LINE

Summary. The paper presents influence of skin and proximity effects on the temperature distribution in two parallel tubular conductors carrying sinusoidal currents of high frequency. For numerical solution the method of finite differences is used.

1. WSTĘP

Przy projektowaniu urządzeń elektrotermicznych wielkiej częstotliwości dużą rolę odgrywa prawidłowy dobór przewodów prądowych łączących między sobą poszczególne elementy układu. Często stosuje się przewody rurowe chłodzone przepływającą w nich wodą. Prawidłowy dobór tych przewodów powinien zapewnić między innymi prawidłową temperaturę pracy przewodu związaną z ilością oddawanego ciepła do otoczenia (dużego nawet dla krótkich odcinków przewodów) i dopuszczalnego obciążenia prądowego. To dopuszczalne obciążenie prądowe przewodów określa się wychodząc z równości strat energetycznych w przewodzie i wymiany energii cieplnej z jego powierzchni do otoczenia przy maksymalnej dopuszczalnej temperaturze przewodu. Uwzględnia się przy tym wzrost rezystancji w wyniku zjawisk naskórkowości i zbliżenia. Do obliczeń wymiany ciepła

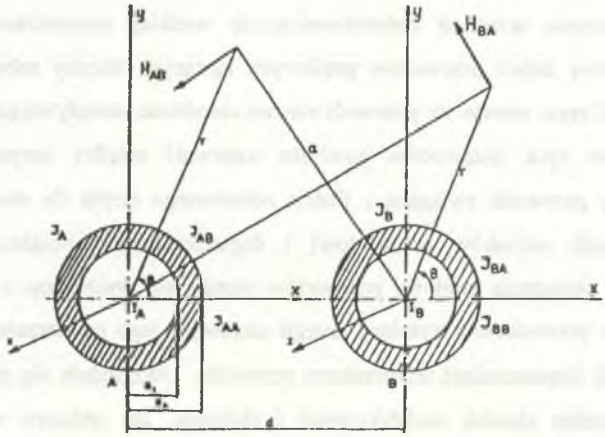
z powierzchni przewodu zakłada się przy tym, stałą na wszystkich jego punktach, temperaturę dopuszczalną [4].

Jednakże, przy uwzględnieniu zjawisk naskórkowości i zbliżenia, rozkład temperatury w przewodzie będzie nierównomierny. Obliczenie tego rozkładu jest celem niniejszej pracy.

Zjawiska naskórkowości i zbliżenia w przewodzie rurowym powoduje nierównomierny rozkład prądu w jego przekroju i w konsekwencji nierównomierny rozkład strat mocy Joule'a. Straty te bezpośrednio określają wewnętrzne źródła ciepła. Zatem rozkład tych źródeł również będzie nierównomierny, co doprowadza do nierównomiernego rozkładu temperatury w przewodzie. Rozkład pola jest tutaj opisany poprzez funkcje Bessela pierwszego i drugiego rodzaju. Rozkład wewnętrznych źródeł ciepła jest więc również opisany tymi funkcjami. Wewnętrzne źródła ciepła wchodzą do równania przewodnictwa cieplnego, które jest równaniem dwóch zmiennych walcowego układu współrzędnych. Ze względu na dwuwymiarowość problemu oraz złożoność funkcji Bessela rozwiązanie analityczne równania przewodnictwa cieplnego nie wydaje się być możliwe. Dlatego też w pracy tej proponuje się rozwiązanie numeryczne, stosując metodę różnic skończonych.

2. PRĄD CAŁKOWITY W PRZEWODZIE RUROWYM

Układ składa się z dwóch przewodów rurowych - rys.1, przez które płyną prądy sinusoidalne o zespolonych wartościach skutecznych odpowiednio I_A oraz I_B.



Rys.1. Przewód rurowy A w polu magnetycznym równoległego przewodu B

Fig.1. Tubular conductor A in the magnetic field of parallel conductor B

W przewodzie A całkowita, zespolona gęstość prądu jest sumą wektorową gęstości prądu własnego $\mathbf{J}_{AA}$ oraz gęstości prądu indukowanego w nim $\mathbf{J}_{AB}$ przez prąd I_B przewodu sąsiedniego:

$$\mathbf{J}_A = \mathbf{J}_{AA} + \mathbf{J}_{AB} = J_{Az}(x, \theta)\,\mathbf{1}_z. \tag{1}$$

Gęstość prądu własnego z uwzględnieniem zjawiska naskórkowości dana jest [5, 6, 8] wzorem:

$$\mathbf{J}_{AA} = J_{AAz}(x)\mathbf{1}_z = \frac{I_A\sqrt{-j}\,\alpha}{2\pi R_2^2}\,U(x)\mathbf{1}_z\,, \tag{2}$$

gdzie:

$$U(x) = \frac{K_1\left(\sqrt{j}\,\alpha y\right)\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-j}\,\alpha x\right) - j\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-j}\,\alpha y\right)K_0\left(\sqrt{j}\,\alpha x\right)}{\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-j}\,\alpha\right)K_1\left(\sqrt{j}\,\alpha y\right) - \mathcal{J}_1\left(\sqrt{-j}\,\alpha y\right)K_1\left(\sqrt{j}\,\alpha\right)}\,, \tag{3}$$

$$y = \frac{R_1}{R_2};\quad 0 \le y \le 1, \tag{4}$$

$$x = \frac{r}{R_2};\quad y \le x \le 1, \tag{5}$$

$$\alpha = mR_2\,, \tag{6}$$

$$m = \sqrt{\omega\mu\gamma}\,. \tag{7}$$

Funkcje $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{J}_1$ oraz K_0, K_1 są odpowiednio funkcjami Bessela pierwszego i drugiego rodzaju rzędu zerowego i pierwszego; ω - pulsacja; μ - przenikalność magnetyczna; γ - konduktywność. Funkcję U(x) traktuje się jako liczbę zespoloną o module $|U(x)|$ i argumencie $\alpha_U(x)$.

Gęstość prądu indukowanego z uwzględnieniem zjawiska zbliżenia dana jest [2, 9] wzorem:

$$\mathbf{J}_{AB} = J_{ABz}(x,\theta)\mathbf{1}_z = \frac{I_B\sqrt{-j}\,\alpha}{\pi R_2^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R_2}{d}\right)^n U_n(x)\cos n\theta\,\mathbf{1}_z\,, \tag{8}$$

gdzie:

$$U_n(x) = \frac{K_{n+1}\left(\sqrt{j}\,\alpha y\right)\mathcal{J}_n\left(\sqrt{-j}\,\alpha x\right) - j\,\mathcal{J}_{n+1}\left(\sqrt{-j}\,\alpha y\right)K_n\left(\sqrt{j}\,\alpha x\right)}{\mathcal{J}_{n-1}\left(\sqrt{-j}\,\alpha\right)K_{n+1}\left(\sqrt{j}\,\alpha y\right) + \mathcal{J}_{n+1}\left(\sqrt{-j}\,\alpha y\right)K_n\left(\sqrt{j}\,\alpha\right)}\,. \tag{9}$$

Funkcje $\mathcal{J}$ oraz K są funkcjami Bessela pierwszego i drugiego rodzaju rzędu n-1, n oraz n+1 ($n \in N$).

Mnożąc wartość zespoloną gęstości prądu J_{Az} przez jej wartość sprzężoną J^*_{Az} i zakładając przy tym, że $|I_A| = |I_B| = |I|$, otrzymuje się [7] wzór:

$$|J_{Az}(x,\theta)|^2 = J_{Az} J^*_{Az} = \frac{|I|^2 \alpha^2}{\pi^2 R_2^4} A(x,\theta) , \tag{10}$$

w którym $A(x,\theta) = B(x) + C(x,\theta) + D(x,\theta)$ (11)

oraz $$B(x) = \frac{1}{4} |U(x)|^2 , \tag{12}$$

$$C(x,\theta) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_2}{d}\right)^n |U_n(x)| \cos\left[\alpha_{U_n}(x)\right] \cos n\theta \right\}^2 + \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_2}{d}\right)^n |U_n(x)| \sin\left[\alpha_{U_n}(x)\right] \cos n\theta \right\}^2 , \tag{13}$$

$$D(x,\theta) = |U(x)| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_2}{d}\right)^n |U_n(x)| \cos\left[\alpha_{U_n}(x) - \alpha_U(x) + \varphi\right] \cos n\theta , \tag{14}$$

gdzie $\varphi = \alpha_B - \alpha_A$ jest kątem przesunięcia fazowego między prądami I_A oraz I_B o fazach początkowych odpowiednio α_A i α_B. Rozkład gęstości prądu całkowitego zależy od wartości tego kąta - dla $\varphi = 0$ (rys.2) zauważa się charakterystyczne „wypieranie" prądu całkowitego na zewnątrz układu; dla $\varphi = 180^0$ - do wewnątrz układu.

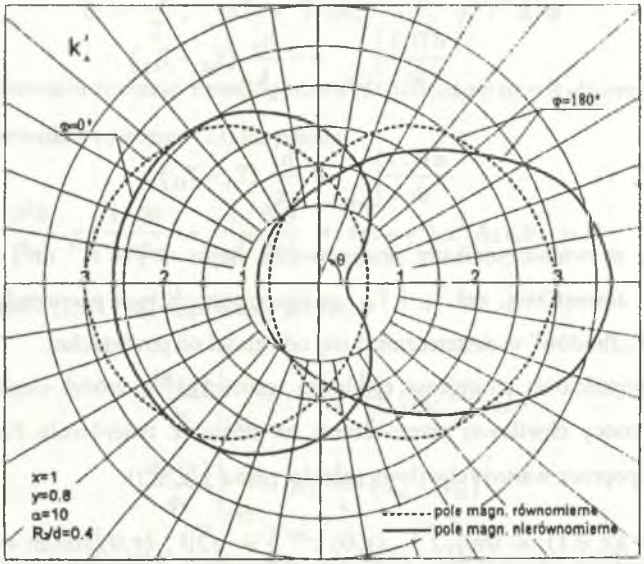
Na rys.2 rozkład gęstości prądu przedstawiono poprzez współczynnik:

$$k_A^J = \frac{|J_{Az}(x,\theta)|}{J_0} = \alpha \left(1 - y^2\right) \sqrt{A(x,\theta)} , \tag{15}$$

gdzie $$J_0 = \frac{|I|}{\pi \left(R_2^2 - R_1^2\right)} \tag{16}$$

Dla n=1 wzór (10) określa wartość skuteczną gęstości prądu całkowitego w przewodzie rurowym A przy założeniu, że pole magnetyczne, w którym przewód ten się znajduje, jest polem równomiernym określonym z twierdzenia Ampera wzorem:

$$H_{AB} = \frac{I_B}{2\pi d} \tag{17}$$



Rys.2. Rozkład gęstości prądu całkowitego na powierzchni zewnętrznej przewodu rurowego

Fig.2. The distribution of the complex current density on the external surface of the conductor

3. POLE TEMPERATURY

W rozważanym przypadku przewodu rurowego wewnętrzne źródła ciepła wytworzone są przez prąd wypadkowy o gęstości J_A, będący funkcją czasu t oraz dwóch współrzędnych r oraz θ walcowego układu współrzędnych. Pole temperatury jest zatem funkcją skalarną trzech zmiennych - $T = f(r, \theta, t)$.

W tym przypadku równanie przewodnictwa cieplnego przyjmuje postać [11]:

$$\frac{\rho c}{k}\frac{\partial T(r,\theta,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(r,\theta,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T(r,\theta,t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T(r,\theta,t)}{\partial \theta^2} + \frac{q'''(r,\theta,t)}{k}, \tag{18}$$

gdzie: c - ciepło właściwe w [J K^{-1} kg^{-1}]; ρ - gęstość masy w [kg m^{-3}]; k - przewodność cieplna w [W m^{-1} K^{-1}]; q''' - gęstość objętościowa strumienia cieplnego wewnętrznych źródeł ciepła w [W m^{-3}].

Równanie (18) rozwiązywane będzie z warunkami brzegowymi III rodzaju [11, 12]:

$$\left.\frac{dT(r)}{dr}\right|_{r=R_2} = -\frac{h_2}{k}\left(T_{s2} - T_{f2}\right), \tag{19}$$

$$\left.\frac{dT(r)}{dr}\right|_{r=R_1} = \frac{h_1}{k}\left(T_{s1} - T_{f1}\right), \tag{20}$$

gdzie h_1 i h_2 są współczynnikami przejmowania ciepła w [W K^{-1} m^{-2}] na powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej, zaś T_{s1} i T_{s2} są temperaturami tych powierzchni, T_{f1} i T_{f2} są temperaturami „fluidów" w dostatecznie dużej odległości od powierzchni.

Gęstość objętościowa strumienia cieplnego wewnętrznych źródeł ciepła jest gęstością objętościową mocy chwilowej przetwarzanej na ciepło. Z twierdzenia Poyntinga moc ta wyrażona jest poprzez wartość chwilową gęstości prądu j (r, θ, t):

$$j(r,\theta,t) = \mathrm{Im}\left\{\sqrt{2}\, J_{Az}(r,\theta)\, e^{j\omega t}\right\} = \sqrt{2}\left|J_{Az}(r,\theta)\right| \sin(\omega t + \alpha_J), \tag{21}$$

gdzie $\left|J_{Az}(r,\theta)\right|$ jest wartością skuteczną wektora gęstości prądu, zaś α_J jest jego fazą.

Wobec tego wartość chwilową mocy ciepła Joule'a przedstawia się następująco:

$$q'''(r,\theta,t) = \frac{1}{\gamma} j^2(r,\theta,t) = \frac{\left|J_{Az}(r,\theta)\right|^2}{\gamma}\left\{1 - \cos\left[2\left(\omega t + \alpha_J\right)\right]\right\}. \tag{22}$$

Z równania (18) oraz ze wzoru (22) wynika, że temperatura $T = f(r,\theta,t)$ zawiera w stanie ustalonym składową zmienną o pulsacji 2ω. Składową tę można jednak pominąć ze względu na znaczną bezwładność cieplną przewodu i mały okres funkcji harmonicznej prądu [8]. Przy tym uproszczeniu równanie (18) można zapisać w postaci:

$$\frac{\partial^2 T(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T(r,\theta)}{\partial \theta^2} + \frac{\left|J_{Az}(r,\theta)\right|^2}{k\gamma} = 0. \tag{23}$$

Aby rozkład pola temperatury był niezależny od natężenia prądu płynącego w przewodzie, wprowadza się:

$$T^* = \frac{\left|I_s\right|^2}{4\pi^2\left(R_2^2 - R_1^2\right)\gamma k} \tag{24}$$

i wtedy dla temperatury zmodyfikowanej ϑ otrzymuje się:

$$\vartheta = \frac{T}{T^*}; \quad dT = T^* d\vartheta; \quad d^2T = T^* d^2\vartheta . \tag{25}$$

Po zmodyfikowaniu zmiennej r według wzoru (5) oblicza się $dr = R_2 dx$ oraz $dr^2 = R_2^2 dx^2$, co pozwala sprowadzić równanie (23) do postaci:

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\theta^2} + 4(1-y^2)\alpha^2 A(x,\theta) = 0 . \tag{26}$$

Warunki brzegowe (15) i (16) mają wtedy postać:

$$\left.\frac{d\vartheta(x)}{dx}\right|_{x=1} = -R_2 \frac{h_2}{k}\left(\vartheta_{s2} - \vartheta_{f2}\right), \tag{27}$$

$$\left.\frac{d\vartheta(x)}{dx}\right|_{x=y} = R_2 \frac{h_1}{k}\left(\vartheta_{s1} - \vartheta_{f1}\right) . \tag{28}$$

W rozważanym przypadku rozwiązanie sposobem analitycznym równania (26) z warunkami brzegowymi (27) i (28) jest trudne ze względu na funkcje Bessela, opisujące wewnętrzne źródła ciepła. Dlatego też proponuje się rozwiązanie numeryczne. W tym celu wybiera się metodę różnic skończonych, aproksymującą różnicami skończonymi równanie różniczkowe przewodnictwa cieplnego dla poszczególnych elementów dyskretyzacji [11, 12].

Rozpatrywane pole temperatury dzieli się siatką składającą się z segmentów (rys. 3) o wymiarach:

- w kierunku zmiennej x o jednakowych krokach dyskretyzacji (różnicowych):

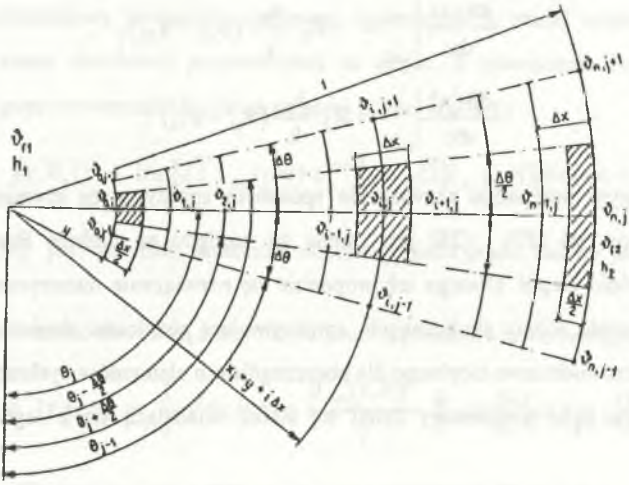
$$\Delta x = \frac{1-y}{n} \quad \text{za pomocą punktów} \quad x_i = y + i\,\Delta x; \quad (i = 0,1,2,\ldots,n) ,$$

- w kierunku zmiennej θ o jednakowej szerokości (uwzględniając symetrię gęstości prądu względem osi odciętych oraz pomijając zjawisko opływu):

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{m} \quad \text{za pomocą punktów} \quad \theta_j = j\,\Delta\theta; \quad (j = 0,1,2,\ldots,m) .$$

W równaniu (26) pochodne zastępuje się przez ich przybliżone wartości - ilorazy różnicowe centralne [10]:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{i,j} &= \frac{\vartheta_{i+1,j} - \vartheta_{i-1,j}}{2\Delta x}, \\
\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}\right)_{i,j} &= \frac{\vartheta_{i+1,j} - 2\vartheta_{i,j} + \vartheta_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}, \\
\text{oraz} \quad \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \theta^2}\right)_{i,j} &= \frac{\vartheta_{i,j+1} - 2\vartheta_{i,j} + \vartheta_{i,j-1}}{(\Delta \theta)^2}
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$



Rys. 3. Siatka z węzłami wewnętrznymi i granicznymi

Fig. 3. Net with internal and boundary nodes

W każdym obszarze elementu różnicowego gęstość objętościową mocy przetwarzanej na ciepło oblicza się - na mocy twierdzenia Poyntinga - za pomocą całki podwójnej z funkcji A(x, θ)x.

Dla węzłów wewnętrznych równanie różniczkowe (26) sprowadza się do równania o różnicach skończonych:

$$\left[1-\frac{\Delta x}{2(y+i\Delta x)}\right]\vartheta_{i-1,j}-2\left[1+\frac{(\Delta x)^2}{(y+i\Delta x)^2(\Delta\theta)^2}\right]\vartheta_{i,j}+\left[1+\frac{\Delta x}{2(y+i\Delta x)}\right]\vartheta_{i+1,j}+$$
$$+\frac{\Delta x}{(y+i\Delta x)^2(\Delta\theta)^2}(\vartheta_{i,j-1}+\vartheta_{i,j+1})=-\frac{4\Delta x\alpha^2(1-y^2)}{(y+i\Delta x)\,\Delta\theta}E_{i,j}, \tag{30}$$

w którym

$$E_{i,j}=\int_{\theta_j-\frac{\Delta\theta}{2}}^{\theta_j+\frac{\Delta\theta}{2}}\int_{y+i\Delta x-\frac{\Delta x}{2}}^{y+i\Delta x+\frac{\Delta x}{2}}A(x,\theta)x\,dx\,d\theta. \tag{31}$$

Dla węzłów położonych na powierzchni wewnętrznej przewodu układa się równanie bilansów elementarnych z uwzględnieniem warunku brzegowego (28), z którego wyprowadza się równanie różnic skończonych:

$$\left[1+\frac{\Delta x}{2y}+\frac{R_2h_1}{k}\Delta x+\frac{(\Delta x)^2}{y^2(\Delta\theta)^2}\right]\vartheta_{0,j}-\left[1+\frac{\Delta x}{2y}\right]\vartheta_{1,j}-\frac{(\Delta x)^2}{2y^2(\Delta\theta)^2}(\vartheta_{0,j-1}+\vartheta_{0,j+1})=$$
$$=\frac{R_2h_1}{k}\Delta x\,\vartheta_{f1}+\frac{4\Delta x\,\alpha^2(1-y^2)}{y\Delta\theta}E_{0,j}, \tag{32}$$

w którym
$$E_{0,j}=\int_{\theta_j-\frac{\Delta\theta}{2}}^{\theta_j+\frac{\Delta\theta}{2}}\int_{y}^{y+\frac{\Delta x}{2}}A(x,\theta)\,x\,dx\,d\theta. \tag{33}$$

Dla węzłów położonych na powierzchni zewnętrznej przewodu układa się równanie bilansów elementarnych z uwzględnieniem warunku brzegowego (27), z którego wyprowadza się równanie różnic skończonych:

$$\left[1-\frac{\Delta x}{2}+\frac{R_2h_2}{k}\Delta x+\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta\theta)^2}\right]\vartheta_{n,j}-\left[1-\frac{\Delta x}{2}\right]\vartheta_{n-1,j}-\frac{(\Delta x)^2}{2(\Delta\theta)^2}(\vartheta_{n,j-1}+\vartheta_{n,j+1})=$$
$$=\frac{R_2h_2}{k}\Delta x\,\vartheta_{f2}+\frac{4\Delta x\,\alpha^2(1-y^2)}{\Delta\theta}E_{n,j}, \tag{34}$$

w którym

$$E_{n,j}=\int_{\theta_j-\frac{\Delta\theta}{2}}^{\vartheta_j+\frac{\Delta\theta}{2}}\int_{1-\frac{\Delta x}{2}}^{1}A(x,\theta)x\,dx\,d\theta. \tag{35}$$

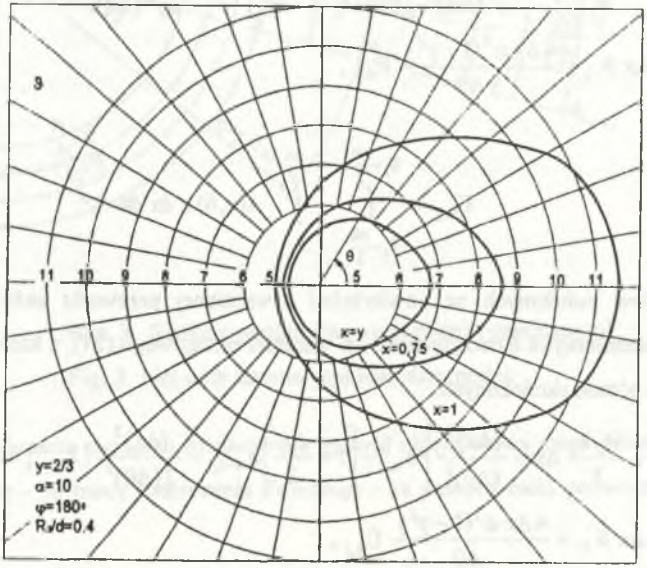
Całki (31), (33) i (35) oblicza się numerycznie wg metod zawartych w pracach [1, 3] lub też za pomocą oryginalnych programów komputerowych. Po ich obliczeniu otrzymuje się układ równań algebraicznych typu (30), (32) i (34). Po numerycznym rozwiązaniu tego układu równań otrzymuje się temperatury w każdym z węzłów przyjętej siatki dyskretyzacji.

Parametry fizyczne przewodu k oraz γ ustala się dla średniej wartości temperatury przewodu. Parametry te są funkcjami temperatury, dlatego też po ukończeniu obliczeń należy, w miarę potrzeby, skorygować wartości tych parametrów i powtórzyć w sposób iteracyjny obliczenia.

Dla przykładu obliczeniowego przyjęto następujące dane:

$R_2 = 0{,}03$ m; $y = 2/3$; $\gamma = 35 \cdot 10^6$ Sm^{-1} (aluminium); $k = 200$ $Wm^{-1}K^{-1}$; $h_1 = 2 \cdot 10^3$ $Wm^{-2}K^{-1}$ (chłodzenie wodą); $h_2 = 250$ $Wm^{-2}K^{-1}$ (konwekcja wymuszona); $T_{f1} = 353$ K; $T_{f2} = 293$ K; $|I| = 10$ kA; $\alpha = 10$.

Dla tak przyjętych wartości rozkład temperatury zmodyfikowanej przedstawiono na rys.4.



Rys.4. Rozkład temperatury zmodyfikowanej w przewodzie rurowym z uwzględnieniem zjawiska naskórkowości i zbliżenia

Fig.4. The modified temperature distribution in a tubular conductor with regard to the skin and proximity effects

4. ZAKOŃCZENIE

Otrzymane rozwiązanie obejmuje cały zakres parametru α, tj. częstotliwości, odległości względnej między przewodami danej przez stosunek R_2/d oraz cały zakres przesunięcia fazowego φ między prądami w przewodach. W szczególności dla kąta $\varphi=180^0$ (linia jednofazowa) występuje charakterystyczne wypieranie prądu do środka układu przewodów [5], a więc dla $\theta=0^0$ wewnętrzne źródła ciepła mają największą moc i w konsekwencji temperatury tych punktów osiągają największe wartości.

Porównując otrzymane wyniki z temperaturami otrzymanymi, dla tego samego przewodu rurowego, przy występowaniu tylko zjawiska naskórkowości [8] lub tylko zjawiska zbliżenia [9], stwierdza się, że zjawiska te występując jednocześnie powodują wzrost temperatury przewodu.

Poprawność przyjętej metody różnic skończonych można sprawdzać obliczając z prawa Newtona [1] gęstość liniową strumienia cieplnego w [Wm^{-1}], odpowiadającą ciepłu odprowadzonemu z przewodu. Ciepło to, zgodnie z bilansem termicznym, jest równe energii strat cieplnych w ekranie:

$$q' = 2\pi R_1 h_1 \left(T_{s1} - T_{f1}\right) + 2\pi R_2 h_2 \left(T_{s2} - T_{f2}\right) = p_l \,. \tag{36}$$

W równaniu (36) p_l jest mocą strat cieplnych przypadającą na jednostkę długości przewodu wywołaną prądem całkowitym z uwzględnieniem zjawisk naskórkowości i zbliżenia. Wzór określający tę moc podano w pracy [7].

Z przeprowadzonych obliczeń wynika również, że określanie strat cieplnych i na ich podstawie obliczenie temperatury średniej - jednakowej w każdym punkcie - przewodu może doprowadzić do znacznych błędów w ocenie temperatury maksymalnej przewodu.

W rzeczywistości, jak pokazały przeprowadzone obliczenia, temperatura maksymalna może znacznie różnić się od obliczonej na podstawie strat cieplnych. Spowodowane jest to nierównomiernym rozkładem wewnętrznych źródeł ciepła.

LITERATURA

1. Arbenz K., Wohlhauser A.: Analyse numérique. Presses Polytechniques Romandes, Lausanne 1981.
2. Baron B., Piątek Z.: Metoda obliczania prądów wirowych indukowanych w ekranie rurowym przez prąd w przewodzie równoległym. Rozprawy Elektrotechniczne t. XXVII, z.1, 1981.
3. Bourdeau M., Gelinas J.: Analyse numérique élémentaire. Gaëtan Morin Éditeur, Québec 1982.
4. Donskij A.W.: Nagrzewanie indukcyjne i pojemnościowe. WNT, Warszawa 1970.
5. McLachlan N.W.: Funkcje Bessela dla inżynierów. PWN, Warszawa 1970.
6. Moon P., Spencer D.E.: Foundations of electrodynamics. D.Van Nostrand Company, INC, New York 1960.
7. Piątek Z., Szendzielorz A.: Wybór optymalnej grubości ścianki przewodu rurowego chłodzonego ciekłym azotem w nierównomiernym polu magnetycznym. Materiały sympozjum „Metody matematyczne w elektrotechnice", Zakopane, październik 1983.
8. Piątek Z.: Pole temperatury w przewodzie rurowym przy występowaniu naskórkowości. Materiały XIII SPETO'91, Gliwice-Wisła, 1990.
9. Piątek Z.: The temperature field in tubular scrreen produced by currents induced by current of parallel conductor. XVIII SPETO'95, Gliwice-Ustroń, maj 1995.
10. Samarski A., Andreiev V.: Méthode aux différences pour équations elliptiques. MIR, Moskou 1978.
11. Vriendt A.B.de.: La transmission de la chaleur. Gaëtan Morin Éditeur, Québec 1982.
12. Wiśniewski S.: Wymiana ciepła. PWN, Warszawa 1979.

Recenzent: Dr hab. inż. Tadeusz Skoczkowski,
prof. Instytutu Elektrotechniki, Warszawa

Wpłynęło do Redakcji dnia 9 października 1995 r.

Abstract

The paper presents influence of the skin and proximity effects on the temperature distribution in two parallel tubular conductors carrying sinusoidal currents of high frequency (Fig.1). On the basis of definite own current density (with regard to the skin effect) (2) and induced current density (with regard to the proximity effects) (8), the density of total current in the conductor is determined (10), (11), (12), (13) and (14). Then the internal sources of heat (22) described by the Bessel's functions are determined. The distribution of these sources in the conductor is irregular and it causes the irregular distribution of temperatures. The internal thermal sources appear in the equation of the thermal conduction (18) which can not be solved analytically considering the Bessel's function occuring in it and because of the double aspect of the problem, i.e. the dependence of the internal sources of heat (and also of the temperature) on two variables of the circular-cylinder coordinates (23). That is why the numerical solution is proposed in that paper. For the solution the method of finite differences is used ((29) and Fig.3). On the basis of numerical solution graph of the temperature distribution for the different frequency and geometrical conductor parametres has been plotted (Fig.4). The obtained result can serve to calculation of the heat exchange between the tubular conductor and the environment and as consequence it can be helpful to fixing the admissible current.