

Agnieszka SABIK\*  
Politechnika Gdańska

## O METODACH OBLICZANIA NAPRĘŻEŃ POPRZECZNEGO ŚCINANIA W ANALIZIE PŁYT WARSTWOWYCH

**Streszczenie.** W pracy omówiono trzy metody wyznaczania profili naprężeń poprzecznego ścinania ze szczególnym zwróceniem uwagi na możliwości ich zastosowania w analizie konstrukcji warstwowych. Praktyczne porównanie analizowanych metod przeprowadzono dla płyty warstwowej typu sandwich oraz dla płyty kompozytowej o krzyżowym ułożeniu włókien (cross-ply). W obliczeniach zastosowano zastępczy, jednowarstwowy model płyty warstwowej, w którym uwzględniono efekt zig-zag oraz warunki równowagi międzywarstwowej.

## CALCULATION OF TRANSVERSE SHEAR STRESS PROFILES IN ANALYSIS OF MULTILAYERED PLATES

**Summary.** Three approaches of shear stress distribution determination are discussed in the paper. Special attention is paid to their application in multilayered structures analysis. Two numerical examples of sandwich and cross-ply composite plates are given to demonstrate the effectiveness of the methods. Analyses of multilayered plates are performed with an equivalent single layer model taking into account the zig-zag effect and interlaminar equilibrium conditions.

### 1. Wprowadzenie

Najchętniej stosowana obecnie w analizie konstrukcji Metoda Elementów Skończonych wychodzi od słabego sformułowania problemu brzegowego, które postawione może być na kilka sposobów, determinując w ten sposób wybór zmiennych niezależnych. Najpopularniejszą postacią słabą jest zasada przemieszczeń wirtualnych (sformułowanie przemieszczeniowe), ale zamiast niej użyta może być również zasada sił wirtualnych (sformułowanie naprężeniowe) [4] lub zasadny wariacyjny, w tym jedno lub wielopolowe, np.

\*Opiekuni naukowci: Prof. dr hab. inż. Jacek Chróścielewski; Dr inż. Ireneusz Kreja.

Hellinger-Reissnera czy Hu-Washizu (sformułowania mieszane) [7]. W stosowanych niejawnych schematach obliczeniowych sposób wyznaczania rozkładów naprężeń ma podwójnie decydujące znaczenie w trakcie obliczeń. Po pierwsze – na etapie obliczania sztywności; po drugie – w analizie postprocesorowej. W referacie opisane są trzy metody wyznaczania naprężeń poprzecznego ścinania ze zwróceniem uwagi na ich zalety i wady w kontekście zastosowania w obydwóch etapach obliczeń.

## 2. Omówienie metod wyznaczania profili naprężeń poprzecznego ścinania

### 2.1. Prawo Hooke'a

Niewątpliwie najbardziej popularnym sposobem wyznaczania naprężeń jest zastosowanie prawa Hooke'a. W pewnych przypadkach modeli dwuwymiarowych o sformułowaniu przemieszczeniowym pojawia się jednak istotny problem związany z jego użyciem do obliczeń składowych związanych ze ścinaniem poprzecznym. W podejściach budowanych na założeniach hipotezy Bernoulli'ego czy jej odpowiednika dla płyt i powłok – hipotezy Kirchhoff'a, zgodnie z prawem Hooke'a, naprężenia poprzecznego ścinania nie istnieją. W sformułowaniach przemieszczeniowych, bazujących na teorii ścinania pierwszego rzędu natomiast, otrzymywane są stałe w przekroju rozkłady odkształceń postaciowych, co w rezultacie zastosowania prawa Hooke'a prowadzi do niezerowych naprężeń na zewnętrznych powierzchniach analizowanego dźwigara. Nie są w ten sposób zachowane warunki równowagi na obu powierzchniach, a w przypadku konstrukcji uwarstwionych, również na granicach warstw. Ponadto, pojawia się konieczność stosowania współczynników korekty ścinania podczas obliczeń sztywności [10].

### 2.2. Całkowanie równań równowagi

Innym sposobem wyznaczania naprężeń poprzecznego ścinania jest metoda całkowania równań równowagi, zgodnie z którą, składowe te wyznacza się następująco:

$$\sigma_{xz} = -\int_h (\sigma_{xy,y} + \sigma_{xx,x}) dz, \quad \sigma_{yz} = -\int_h (\sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y}) dz \quad (1)$$

Podstawą obliczania naprężeń ścinania są tu składowe płaskiego stanu naprężenia. Zgodnie z dowolną hipotezą płaskich przekrojów składowe te mają liniowe rozkłady w przekrojach, które po scałkowaniu prowadzą do parabolicznych rozkładów składowych  $\sigma_{xz}$  i

$\sigma_{yz}$ . Dodatkowo rozkłady te spełniają warunki równowagi na zewnętrznych powierzchniach, a także na stykach warstw w przypadku ośrodków uwarstwionych. Wadą tego podejścia jest konieczność wcześniejszego wyznaczenia rozkładów naprężeń  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  i  $\sigma_{xy}$ , podczas gdy jego użycie w analizie postprocesorowej wymaga jedynie ustalenia odpowiedniej kolejności obliczania składowych tensora naprężeń. Zastosowanie tej metody wprost na etapie obliczeń sztywności nie jest możliwe.

### 2.3. Metoda założonych naprężeń

Opisane powyżej metody określa się w literaturze mianem metod *a posteriori* [3], gdyż naprężenia w przypadku żadnej z nich nie są zmiennymi niezależnymi. Jeśli jednak jako słabe sformułowanie problemu przyjęta zostanie zasada sił wirtualnych lub zasada wariacyjna wielopolowa, wskutek czego, zestaw zmiennych niezależnych obejmie również naprężenia, to możliwe stanie się narzucenie rozkładów naprężeń z góry, w tym takich, które spełnią np. warunki równowagi. Jest to podejście typu *a priori* i będziemy je tu nazywać metodą naprężeń założonych. Podstawową wadą tej metody jest jej ograniczone zastosowanie jedynie do modeli o odpowiednim sformułowaniu słabym.

## 3. Modelowanie konstrukcji warstwowych. Metody wyznaczania naprężeń poprzecznego ścinania w kontekście analizy płyt warstwowych

Materiały stosowane do budowy konstrukcji warstwowych cechują niskie wartości modułów poprzecznego ścinania, wskutek czego, przekroje konstrukcji doznają zygzakowej deformacji, co w literaturze określa się mianem efektu zig-zag [4]. Funkcja opisująca rozkład przemieszczeń w przekroju powinna być zatem klasy  $C^0$ . Oczywiście jest również, że wobec znacznej podatności na ścinanie energia odkształceń postaciowych odgrywa bardzo istotną rolę w opisie deformacji. Przyjęcie odpowiedniego opisu rozkładu naprężeń poprzecznego ścinania jest zatem szczególnie istotne w analizach konstrukcji uwarstwionych. Rozkłady te powinny spełniać warunki ciągłości wynikające z założenia braku poślizgu na granicach warstw oraz warunki równowagi na powierzchniach zewnętrznych.

Najodpowiedniejszymi modelami dla konstrukcji warstwowych wydają się podejścia trójwymiarowe. Koszty obliczeń z zastosowaniem tych modeli są jednak zbyt duże, stąd też w praktyce modele 3D stosuje się raczej tylko w analizach lokalnych skomplikowanych stanów

naprężenia [6]. Częściej stosowane są podejścia dwuwymiarowe, w tym tzw. dyskretne modele warstwowe (*quasi 3D*), oraz zastępcze modele jednowarstwowe (*stricte 2D*) [1, 8]. W pierwszych stopnie swobody związane są z powierzchniami środkowymi poszczególnych warstw, w drugich – z powierzchnią środkową płyty.

Efektywność omawianych metod jest zależna od całokształtu sformułowania modelu obliczeniowego. Prawo Hooke'a, wyrażające związek odkształcenie-naprężenie w punkcie ośrodka, jest podejściem skutecznym w modelach 3D oraz w pewnych modelach dyskretnych warstwowych [3]. W większości modeli dwuwymiarowych, zwłaszcza zastępczych jednowarstwowych, przy jego użyciu pojawiają się oczywiste problemy ze spełnieniem warunków równowagi. O ile na etapie budowy macierzy sztywności prawo Hooke'a jest dość często stosowane z odpowiednimi współczynnikami korekty ścinania [8, 9], to na etapie analizy wyników naprężeń sposób ten jest zastępowany inną metodą. Podczas budowy macierzy sztywności najtrafniejsze wydaje się stosowanie założonych pól naprężeń. Wymagane jest tu jednak odpowiednie sformułowanie słabe. Założone pola naprężeń z kolei w pewnej grupie modeli nie zawsze są zgodne z trójwymiarowymi rozwiązaniami odniesienia, co ogranicza użycie metody w postprocesorze [3]. Bardzo często na tym etapie najefektywniejsza okazuje się metoda całkowania równań równowagi.

#### 4. Zastosowany model płyty warstwowej

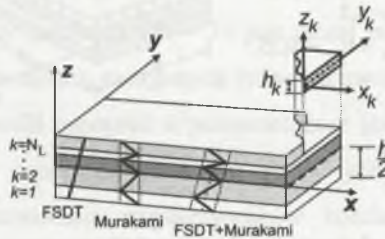
Zastosowany w bieżącej analizie model płyty warstwowej należy do modeli zastępczych jednowarstwowych i został opisany w pracy [2]. Jako sformułowanie słabe przyjęto dwupolową zasadę wariacyjną, określaną w literaturze jako Reissner's Mixed Variational Theorem (RMVT) [4], zgodnie z którą, zmiennymi niezależnymi są przemieszczenia oraz naprężenia poprzeczne, przy czym wskutek pominięcia efektu poprzecznego rozciągania jedynymi zmiennymi naprężeniowymi są  $\sigma_{xz}$  i  $\sigma_{yz}$ . Rozkłady  $\sigma_{xz}$  i  $\sigma_{yz}$  są paraboliczne w każdej warstwie i spełniają warunki równowagi na granicach warstw oraz na powierzchniach zewnętrznych (rys. 1) [2]. Punktem wyjścia dla opisu pola przemieszczeń (2) jest liniowy rozkład teorii ścinania pierwszego rzędu (*First-Order Shear Deformation – FSDT*), do którego dodawana jest funkcja typu zig-zag Murakami'ego  $f(z) = (-1)^k \cdot \xi_k$ , gdzie  $\xi_k = 2z_k / h_k$ , a  $k$  – numer warstwy ( $k = 1, 2, \dots, N_L$ ) (rys. 2):

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{,xyz} &= u(x, y) + \varphi_x(x, y) \cdot z + D_x(x, y) \cdot (-1)^k \cdot \xi_k \\ \mathbf{V}_{,xyz} &= v(x, y) + \varphi_y(x, y) \cdot z + D_y(x, y) \cdot (-1)^k \cdot \xi_k \\ \mathbf{W}_{,xyz} &= w(x, y) \end{aligned} \quad (2)$$

Przyjęty rozkład przemieszczeń jest klasy  $C^0$ . Wykorzystując narzucone warunki ciągłości naprężeń na granicach warstw, zmienne naprężeniowe eliminuje się z zestawu niewiadomych [2, 4]. Ostatecznie elementy skończone posiadają 7 kinematycznych stopni swobody w węźle.



Rys. 1. Założone pole naprężeń ścinania  
Fig. 1. Assumed shear stress distribution



Rys. 2. Pole przemieszczeń  
Fig. 2. Displacement field

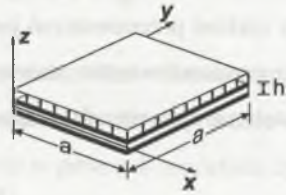
## 5. Przykłady i dyskusja na temat efektywności metod wyznaczania naprężeń

Przyjęte sformułowanie modelu umożliwia porównanie wszystkich omawianych metod wyznaczania naprężeń poprzecznego ścinania. Ponieważ jednak – ze względu na zbyt duże uproszczenie podejścia w stosunku do opisu trójwymiarowego – z góry można przewidzieć niespełnienie warunków równowagi naprężeń przy zastosowaniu prawa Hooke'a, badanie efektywności tej metody jest w tym przypadku bezcelowe i zostanie pominięte.

Porównanie metody całkowania równań równowagi i metody naprężeń założonych przeprowadzono na podstawie dwóch przykładów płyt warstwowych pochodzących z pracy [5]. Przedmiotem analizy są kwadratowe, swobodnie podparte i obciążone równomiernym obciążeniem  $q$  płyty sandwicz (rys. 3) oraz cross-ply 0/90/0 (rys. 4). Rozwiązanie odniesienia otrzymano w [5] modelem dyskretnym warstwowym (*quasi* 3D), w którym wykorzystano

mieszane sformułowanie wariacyjne RMVT i zastosowano wielomian czwartego stopnia do opisu rozkładu przemieszczeń oraz naprężeń poprzecznych w warstwach.

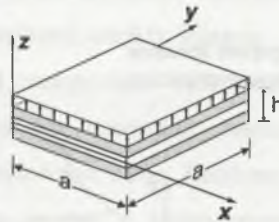
<b>okładki:</b>	<b>wypełnienie:</b>
$h_o = 0.1h$	$h_w = 0.8h$
$E_1 / E_2 = 25$	$E_1 / E_2 = 1$
$G_{13} / E_2 = G_{13} / E_2 = 0.5$	$G_{12} / E_2 = G_{23} / E_2 = 0.06$
$G_{23} / E_2 = 0.2$	$G_{12} / E_2 = 0.016$
$\nu_{12} = 0.25$	$\nu_{12} = 0.25$



Rys. 3. Płyta typu sandwich

Fig. 3. Sandwich plate

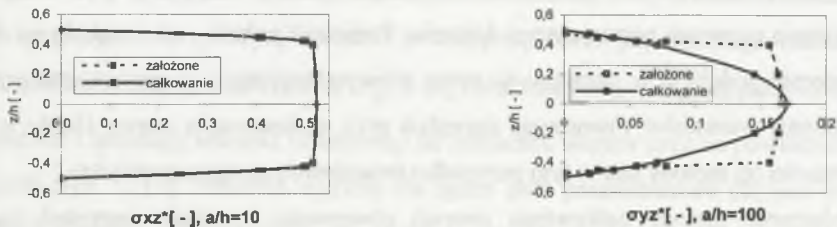
$E_L / E_T = 25$
$G_{LT} / E_T = G_{Lz} / E_T = 0.5$
$G_{TT} / E_T = 0.2$
$\nu_{LT} = \nu_{Lz} = \nu_{TT} = 0.25$



Rys. 4. Płyta cross-ply 0/90/0

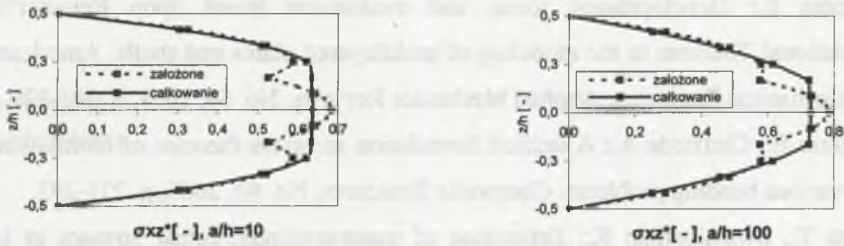
Fig. 4. Cross-ply plate 0/90/0

Przeprowadzono analizę ekstremalnych naprężeń poprzecznych  $\sigma_{xz}(x=a, y=a/2)$  i  $\sigma_{yz}(x=a/2, y=a)$  w płytach o różnych proporcjach  $a/h$ . Zastosowano następującą normalizację wyników:  $\sigma_{xz}^* = \sigma_{xz} / (q \cdot (a/h))$ . Ze względu na symetrię analizowano ćwiartkę płyty. W obliczeniach zastosowano siatkę 4x4 izoparametrycznych elementów 9-węzłowych z techniką całkowania selektywnie zredukowanego. Porównanie rezultatów przedstawiają rys. 5 - 6.



Rys. 5. Naprężenia poprzecznościanowania w płytach sandwich

Fig. 5. Shear stress distribution in sandwich plates



Rys. 6. Naprężenia poprzecznego ścinania w płytach cross-ply  
 Fig. 6. Shear stress distribution in cross-ply plates

Z porównania otrzymanych rezultatów dla naprężeń z rozwiązaniami odniesienia w [5] wynika, że metoda całkowania równań równowagi w każdym z analizowanych przypadków płyt prowadzi do poprawnych rezultatów. Jak wynika z rys. 5 - 6, założone pola naprężeń nie zawsze są zgodne z rozwiązaniem *quasi* 3D. Należy przypuszczać, że uzyskana tą metodą zgodność w przypadku płyty sandwich  $a/h = 10$  jest raczej przypadkowa. Przeprowadzona analiza potwierdziła, że w modelach zastępczych jednowarstwowych najbardziej skutecznym narzędziem wyznaczania profili naprężeń w postprocesorze jest metoda całkowania równań równowagi. Założone pola naprężeń wprowadza się w tych podejściach jedynie w celu ominięcia konieczności stosowania współczynników korekcyjnych ścinania na etapie obliczania sztywności. Sposób ich przyjęcia ma zatem również decydujący wpływ na wyniki końcowe, w tym rezultaty z metody całkowania równań równowagi.

## LITERATURA

1. Altenbach H.: An alternative determination of transverse shear stiffnesses for sandwich and laminated plates. *International Journal of Solid and Structures*, No. 37, 2000, p. 3503-3520.
2. Brank B., Carrera E.: Multilayered shell finite element with interlaminar continuous shear stresses: a refinement of the Reissner-Mindlin formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, No. 48, 2000, p. 843-874.
3. Carrera E.: A priori vs. a posteriori evaluation of transverse stresses in multilayered orthotropic plates. *Composite Structures*, No. 48, 2000, p. 245-260.

4. Carrera E.: Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner's Mixed Variational Theorem in the modeling of multilayered plates and shells. American Society of Mechanical Engineers. Applied Mechanics Reviews, No. 54, 2001, p. 301-329.
5. Carrera E., Ciuffreda A.: A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems. Composite Structures, No. 69, 2005, p. 271-293.
6. Kant T., Swaminathan K.: Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites – a selective review and survey of current developments. Composite Structures, No. 45, 2000, p. 65-75.
7. Ramm E.: From Reissner plate theory to three dimensions in large deformations shell analysis. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Nr 80, 2000, s. 61-68.
8. Rohwer K., Friedrichs S., Wehmeyer J. N.: Analyzing Laminated Structures from Fibre-Reinforced Composite Material – An Assessment. Technische Mechanik, No. 25, 2005, p. 59-79.
9. Sze K. Y., He L.-W., Cheung Y. K.: Predictor–corrector procedures for analysis of laminated plates using standard Mindlin finite element models. Composite Structures, No. 50, 2000, p. 171-182.
10. Tanov R., Tabiei A.: A simple correction to the first order shear deformation shell finite elements formulations. Finite Elements in Analysis and Design, No. 35, 2000, p. 189-197.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Sławomir Kosiński