

Agnieszka WINKLER-SKALNA\*  
Politechnika Śląska

## PROPAGACJA FALI AKUSTYCZNEJ W NIEJEDNORODNYM OŚRODKU WARSTWOWYM – NOWA METODA PERTURBACJI II RZĘDU

**Streszczenie.** W artykule analizowana jest propagacja fali akustycznej w warstwowym ośrodku o skończonej grubości, gdzie parametry warstw zależą od położenia. Warunki brzegowe rozpatrywane są dla brzegu sztywnego (typu Dirichleta) oraz dla brzegu odbijającego (typu mieszanego). Wykorzystując metodę perturbacji II rzędu otrzymano dla obu przypadków perturbacyjne wielkości wartości własnych i wektorów własnych równania opisującego położenie. Poprawki perturbacyjne dla wartości własnych i wektorów własnych zostały wyliczone numerycznie z równań perturbacyjnych dla rozpatrywanych przypadków.

## PROPAGATION OF ACOUSTIC WAVES IN LAYERED NONHOMOGENEOUS MEDIUM – A NEW II-ORDER PERTURBATION METHOD

**Summary.** A layered medium of finite height in which the layers are assumed to have position dependent properties is considered. The boundary conditions are analyzed to be either rigid (Dirichlet – type) or of a reflecting type (mixed – type). The perturbation method based on II-order perturbation numbers is used to obtain the eigenvalues and the corresponding eigenfunctions. The corrections to the eigenvalues and eigenfunctions are numerically computed from the perturbation formulae in both cases of interest.

### 1. Wprowadzenie

Konieczność dokładniejszego zrozumienia detekcji sygnałów w akustyce przyczyniła się do wzrostu intensywności badań nad propagacją fal akustycznych.

W pracy równanie Helmholtza zapisano we współrzędnych cylindrycznych i zastosowano metodę rozdzielonych zmiennych. Jednorodny model propagacji fali prowadzi do prostego

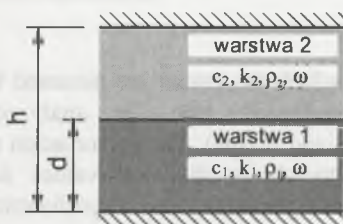
\* Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Jerzy Skrzypczyk, prof. w Politechnice Śląskiej.

zadania dla wartości własnych, gdzie rozwiązaniem jest nieskończony szereg wartości własnych i rodzina ortonormalnych funkcji własnych. Jednak niewielkie zmiany prędkości dźwięku, spowodowane np. zmianami temperatury, wilgotności czy położenia, mogą istotnie wpływać na propagację fali w ośrodku. [8] Rozpatrywana była zależność gęstości ośrodka od położenia w warstwie oraz jej wpływ na wartości własne i funkcje własne zagadnienia, wynikające z równania Helmholtza dla ciśnienia akustycznego w ośrodku warstwowym.

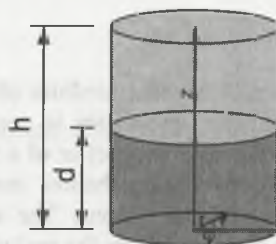
W niniejszej pracy wykorzystano liczby perturbacyjne II rzędu, określone jako uporządkowane trójki liczb rzeczywistych  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  ze specjalnie zdefiniowaną algebrą, patrz [1 - 4]. Wartości własne i funkcje własne zagadnienia otrzymano dla obu przypadków z hierarchicznego układu równań różniczkowych. Wyznaczono także ich części główne oraz części perturbacyjne I i II rzędu.

## 2. Model matematyczny

Rozpatrywany jest model ośrodka (rys. 1) składający się z dwóch warstw o stałej grubości, podobnie jak w pracach [2], [8]. Wysokość ośrodka wynosi  $h$ , dolnej warstwy  $d$ , górnej zaś  $h - d$ . Warunki brzegowe są sformułowane w położeniach  $z = 0$ ,  $z = d$  oraz  $z = h$ . Ciśnienie akustyczne  $p_j$ , gęstość  $\rho_j$ , prędkość  $c_j$  oraz liczba falowa  $k_j$  oznaczają odpowiednie wielkości dla  $j$ -ej warstwy,  $j = 1, 2$ .



Rys. 1. Geometria problemu  
Fig. 1. Geometry of the problem



Rys. 2. Cylindryczny układ współrzędnych  
Fig. 2. Cylindrical coordinate system

Rozpatrzmy równanie Helmholtza we współrzędnych cylindrycznych, (rys. 2) opisujące ciśnienie akustyczne  $p^{(j)}$  w  $j$ -tej warstwie:

$$\frac{\partial^2 p^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 p^{(i)}}{\partial z^2} + k_i^2 p^{(i)} = 0 \quad k_i = \frac{\omega}{c_i}, i = 1, 2. \quad (1)$$

Zastosujmy metodę rozdzielenia zmiennych. Załóżmy, że  $p^{(i)}(r, z) = R(r)\varphi^{(i)}(z)$ .

Otrzymamy:

$$\frac{d^2 \varphi^{(i)}}{dz^2} + (k_i^2 - \lambda) \varphi^{(i)}(z) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \lambda R = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Zakładając symetrię radialną rozwiązania możemy analizować tylko pierwszą grupę równań (2).

W dalszych rozważaniach konsekwentnie założono, że podstawa obszaru cylindrycznego jest swobodna oraz że górna część cylindra jest sztywna (warunki Dirichleta – I przypadek) lub odbijająca (warunki mieszane – II przypadek).

### 2.1. Sztywna górna część obszaru cylindrycznego

Założmy, że podstawa cylindra jest swobodna, więc dla powierzchni  $z = 0$  mamy:

$$\varphi^{(1)}(0) = 0. \quad (4)$$

Z ciągłości ciśnienia akustycznego na powierzchni odgraniczającej warstwy  $z = d$  wynika:

$$\varphi^{(1)}(d) = \varphi^{(2)}(d), \quad (5)$$

natomiast z ciągłości gradientu ciśnienia akustycznego na wysokości  $z = d$  wynika:

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{d\varphi^{(1)}(d)}{dz} = \frac{1}{\rho_2} \frac{d\varphi^{(2)}(d)}{dz}, \quad (6)$$

z kolei warunki dla powierzchni sztywnej  $z = h$  dają warunek:

$$\frac{d\varphi^{(2)}(h)}{dz} = 0. \quad (7)$$

Dla wygody przyjmijmy dalej następujące oznaczenia:

$$\gamma_i^2 = k_i^2 - \lambda, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Rozwiązanie ogólne równania (2) ma postać:

$$\varphi^{(1)}(z) = A \sin(\gamma_1 z) + D \cos(\gamma_1 z), \quad 0 \leq z \leq d, \quad (9)$$

$$\varphi^{(2)}(z) = B \sin(\gamma_2 z) + C \cos(\gamma_2 z), \quad d \leq z \leq h. \quad (10)$$

Wykorzystując warunki brzegowe (4) - (7), otrzymamy:

$$D = 0, \quad (11)$$

$$A \sin(\gamma_1 d) = B \sin(\gamma_2 d) + C \cos(\gamma_2 d), \quad (12)$$

$$\rho_2 A \gamma_1 \cos(\gamma_1 d) = \rho_1 (B \gamma_2 \cos(\gamma_2 d) - C \gamma_2 \sin(\gamma_2 d)), \quad (13)$$

$$B \gamma_2 \cos(\gamma_2 h) - C \gamma_2 \sin(\gamma_2 h) = 0. \quad (14)$$



Równania (11) - (14) są jednorodnym układem liniowych równań algebraicznych ze względu na niewiadome A, B, C, D. Taki układ równań posiada rozwiązanie nietrywialne wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\det \begin{pmatrix} \sin(\gamma_1 d) & -\sin(\gamma_2 d) & -\cos(\gamma_2 d) \\ \rho_2 \gamma_1 \cos(\gamma_1 d) & -\rho_1 \gamma_2 \cos(\gamma_2 d) & \rho_1 \gamma_2 \sin(\gamma_2 d) \\ 0 & \cos(\gamma_2 h) & -\sin(\gamma_2 h) \end{pmatrix} = 0. \quad (15)$$

Pamiętając, że  $\gamma_i^2 = k_i^2 - \lambda$ ,  $i = 1, 2$ , po rozwinięciu wyznacznika (15) otrzymamy całą rodzinę wartości własnych  $\lambda_m$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$  Odpowiadające im funkcje własne mają postać:

$$\varphi_m^{(1)}(z) = A \sin(\gamma_1 z), \quad 0 \leq z \leq d, \quad (16)$$

$$\varphi_m^{(2)}(z) = A \sin(\gamma_1 d) \frac{\cos(\gamma_2 (h-z))}{\cos(\gamma_2 (h-d))}, \quad d \leq z \leq h. \quad (17)$$

Dla uproszczenia wprowadzona została normalizacja wartości własnych oraz następująca notacja  $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 1$ ,  $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$ , gdzie  $\delta_{ij}$  – delta Kronekera.

## 2.2. Odbijająca górna powierzchnia obszaru cylindrycznego

Rozważmy podobny przypadek z górną powierzchnią odbijającą. Równania różniczkowe opisujące ciśnienie akustyczne są takie same, jak poprzednio (2). Podobnie bez zmian pozostają warunki brzegowe na powierzchniach  $z = 0$  oraz  $z = d$ , patrz równania (4) - (6). Natomiast warunek brzegowy na powierzchni odbijającej  $z = h$  przyjmuje postać:

$$\frac{d\varphi^{(2)}(h)}{dz} + \alpha \varphi^{(2)}(h) = 0. \quad (18)$$

Zauważmy dalej, że jeżeli  $\alpha = 0$ , to wówczas warunek odbicia staje się warunkiem „sztywnym”, por. (7). Wykorzystując warunki brzegowe (4) - (6) otrzymamy trzy równania układu równań identyczne z równaniami (11) - (13) oraz z warunku (18) równanie postaci:

$$B\gamma_2 \cos(\gamma_2 h) - C\gamma_2 \sin(\gamma_2 h) + \alpha B \sin(\gamma_2 h) + \alpha C \cos(\gamma_2 h) = 0. \quad (19)$$

Równania (11) - (13) i (19) są jednorodnym układem równań algebraicznych z niewiadomymi A, B, C, D. Układ ten ma rozwiązanie nietrywialne wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\det \begin{pmatrix} \sin(\gamma_1 d) & -\sin(\gamma_2 d) & -\cos(\gamma_2 d) \\ \rho_2 \gamma_1 \cos(\gamma_1 d) & -\rho_1 \gamma_2 \cos(\gamma_2 d) & \rho_1 \gamma_2 \sin(\gamma_2 d) \\ 0 & \gamma_2 \cos(\gamma_2 h) + \alpha \sin(\gamma_2 h) & -\gamma_2 \sin(\gamma_2 h) + \alpha \cos(\gamma_2 h) \end{pmatrix} = 0. \quad (20)$$

Pamiętając, że  $\gamma_i^2 = k_i^2 - \lambda$ ,  $i = 1, 2$ , po rozwiązaniu (20) otrzymujemy całą rodzinę wartości własnych  $\lambda_m$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$  Odpowiadające im funkcje własne mają postać:

$$\varphi_m^{(1)}(z) = A \sin(\gamma_1 z), \quad 0 \leq z \leq d, \quad (21)$$

$$\varphi_m^{(2)}(z) = A \sin(\gamma_1 d) \frac{\gamma_2 \cos(\gamma_2(h-z)) + a \sin(\gamma_2(h-z))}{\gamma_2 \cos(\gamma_2(h-d)) + a \sin(\gamma_2(h-d))}, \quad d \leq z \leq h. \quad (22)$$

Dla uproszczenia dokonamy normalizacji wartości własnych, podobnie jak to miało miejsce w poprzednim przypadku.

### 3. Niejednorodne zaburzone warunki brzegowe

Weźmy pod uwagę niejednorodny ośrodek warstwowy, w którym zarówno dolna, jak i górna warstwa ośrodka mogą mieć zmienne parametry fizyczne zależne od położenia. Wynikająca stąd zmienność współczynnika odbicia skutkuje zależnością prędkości falowej od wysokości w obszarze cylindra. Zastosujmy technikę perturbacyjną zaproponowaną przez Skrzypczyka, por. [1] - [4], dla określenia wartości własnych i odpowiadających im wektorów własnych dla przedstawionych wcześniej zagadnień brzegowych.

Ponieważ rozpatrujemy ośrodek złożony z dwóch warstw, dla uproszczenia przyjmijmy

$$\Phi = \begin{cases} \varphi^{(1)} & 0 \leq z \leq d \\ \varphi^{(2)} & d < z \leq h \end{cases}. \quad (23)$$

Założmy, że warstwy ośrodka są niejednorodne, stąd wynika, że równanie (2) staje się równaniem perturbacyjnym II rzędu w postaci:

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} + k^2 (1 + \epsilon s_0(z) + \epsilon^2 s_1(z)) = \lambda \Phi, \quad (24)$$

gdzie  $s(z) = \epsilon s_0(z) + \epsilon^2 s_1(z)$  jest miarą niejednorodności zależną od położenia we współrzędnych cylindrycznych. Jeżeli  $s(z) = 0$ , to problem redukuje się do zagadnienia ośrodka jednorodnego. Założmy, że zagadnienie własne (24) będzie rozpatrywane w sensie uogólnionym w  $R_{\epsilon^2}$ . Zauważmy dalej, że  $\Phi = \Phi_0 + \epsilon \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2$ ,  $\lambda = \lambda_0 + \epsilon \lambda_1 + \epsilon^2 \lambda_2$ , gdzie  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in R$ . Wówczas równanie (24) przyjmie postać:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi_0}{dz^2} + \epsilon \frac{d^2 \Phi_1}{dz^2} + \epsilon^2 \frac{d^2 \Phi_2}{dz^2} + k^2 \Phi_0 + \epsilon k^2 (\Phi_1 + \Phi_0 s_1(z)) + \epsilon^2 k^2 (\Phi_2 + \Phi_1 s_1(z) + \Phi_0 s_2(z)) = \\ = \lambda_0 \Phi_0 + \epsilon (\lambda_0 \Phi_1 + \lambda_1 \Phi_0) + \epsilon^2 (\lambda_0 \Phi_2 + \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_0) \end{aligned} \quad (25)$$

Jeżeli porównamy współczynniki przy odpowiednich potęgach parametru  $\epsilon$ , to otrzymamy równania nieperturbacyjne:

$$\frac{d^2 \Phi_0}{dz^2} + k^2 \Phi_0 = \lambda_0 \Phi_0, \quad (26)$$

$$\frac{d^2 \Phi_1}{dz^2} + k^2 (\Phi_1 + \Phi_0 s_1(z)) = (\lambda_0 \Phi_1 + \lambda_1 \Phi_0), \quad (27)$$

$$\frac{d^2\Phi_2}{dz^2} + k^2(\Phi_2 + \Phi_{1s_1}(z) + \Phi_{0s_2}(z)) = \lambda_0\Phi_2 + \lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_0. \tag{28}$$

Ponieważ problem własny (26) dotyczy operatora typu Sturm-Liouville'a, posiada on nieskończoną liczbę wartości własnych  $\{\gamma_{01}, \gamma_{02}, \gamma_{03}, \dots, \gamma_{0n}, \dots\}$ , gdzie  $\gamma_{0m} = k^2 - \lambda_{0m}$ . Odpowiadające im funkcje własne oznaczymy  $\{\Phi_{01}, \Phi_{02}, \Phi_{03}, \dots, \Phi_{0n}, \dots\}$ .

Dalej będzie stosowana następująca notacja  $\Phi_p = \Phi_{0p} + \epsilon\Phi_{1p} + \epsilon^2\Phi_{2p}$ ,  $\lambda_p = \lambda_{0p} + \epsilon\lambda_{1p} + \epsilon^2\lambda_{2p}$ ,  $\Phi_{1p} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{pk} \Phi_{0k}$ ,  $\Phi_{2p} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{pk} \Phi_{0k}$ . Zakładamy, że  $\langle \Phi_{0n}, \Phi_{0n} \rangle = 1$  dla dowolnego  $n$ , a  $\langle \Phi_{0n}, \Phi_{0m} \rangle = 0$  dla  $n \neq m$ . Można udowodnić, że:

$$\lambda_{1p} = k^2 \langle s_1(z)\Phi_{0p}, \Phi_{0p} \rangle, \text{ dla } p = 1, 2, 3, \dots, \tag{29}$$

$$\lambda_{2p} = k^2 \langle s_1(z)\Phi_{1p}, \Phi_{0p} \rangle + k^2 \langle s_2(z)\Phi_{0p}, \Phi_{0p} \rangle, \text{ dla } p = 1, 2, 3, \dots, \tag{30}$$

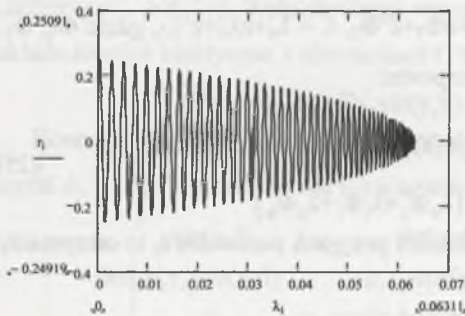
$$\Phi_{1p} = \alpha_{pp} \Phi_{0p} + \sum_{i \neq p} \frac{\chi_{pi}}{\lambda_{0i} - \lambda_{0p}} \Phi_{0i}, \tag{31}$$

$$\Phi_{2p} = \beta_{pp} \Phi_{0p} + \sum_{i \neq p} \frac{\eta_{pi}}{\lambda_{0i} - \lambda_{0p}} \Phi_{0i}. \tag{32}$$

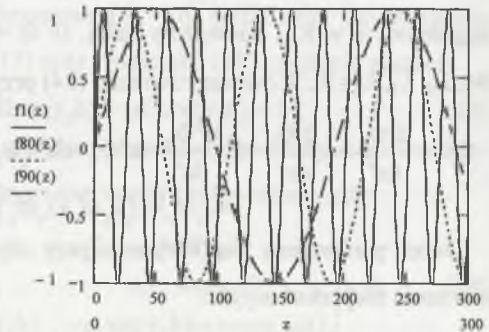
Współczynniki  $\chi_{pi}$  oraz  $\eta_{pi}$  są wyznaczone z rozkładu Fouriera znanych funkcji.

### 4. Przykład numeryczny

Załóżmy, że  $h = 1300$  [m],  $d = 750$  [m],  $c_1 = 1500$  [m/s],  $c_2 = 1495$  [m/s],  $\omega = 376.991$  [rad/s],  $\rho_1 = 1.0 \times 10^3$  [kg/m<sup>3</sup>],  $\rho_2 = 1.0 \times 10^3$  [kg/m<sup>3</sup>].



Rys. 3. Lewa strona rozwinięcia wyznacznika (16)  
Fig. 3. The LHS of Eq. (16)



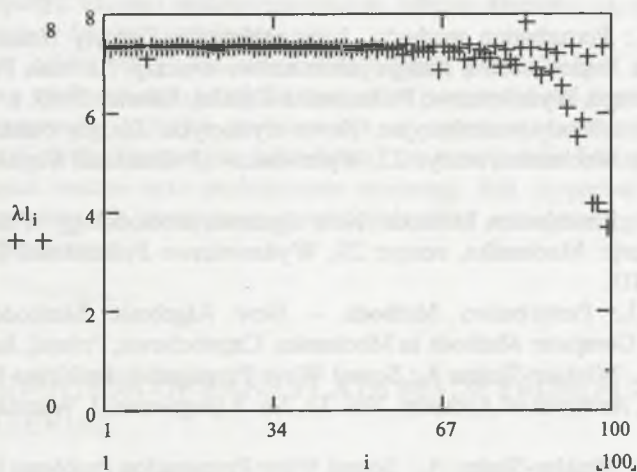
Rys. 4. 1., 80., 90. – funkcje własne  $\varphi^{(1)}(x)$   
Fig. 4. 1-st, 80-th, 90-th eigenfunctions  $\varphi^{(1)}(x)$



Założmy, że w rozpatrywanym przykładzie występuje liniowe zaburzenie współczynnika refrakcji dane wzorami:

$$s_1(z) = \begin{cases} 0 & 0 \leq z \leq d \\ d-z & d < z \leq h \end{cases}, \quad s_2(z) = 0. \quad (33)$$

Jeżeli rozwiążemy na drodze numerycznej wyznacznik (15), to otrzymamy rodzinę wartości własnych  $\lambda_m$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ . W rozpatrywanym przykładzie istnieje 100 rozwiązań. Odpowiednie funkcje własne otrzymamy z odpowiadających im równań (16) - (17), patrz rys. 4. Wartości wielkości perturbacyjnych pierwszego rzędu  $\lambda_1$  oraz drugiego rzędu  $\lambda_2$  dla wartości własnych, w przypadku „sztywnych” warunków brzegowych, otrzymujemy z równań (29) - (30) po podstawieniu odpowiednich funkcji własnych danych równaniami (16) - (17).



Rys. 5. Perturbacje I rzędu  $\lambda_1$  wartości własnych

Fig. 5. First perturbations  $\lambda_1$  of eigenvalues

## 5. Wnioski

Ciśnienie akustyczne w rozpatrywanym ośrodku warstwowym o skończonej grubości opisane jest równaniem Helmholtza o perturbowanych współczynnikach. Pokazano, że wartości własne i funkcje własne w zadaniu z brzegiem sztywnym są szczególnym przypadkiem rozwiązania dla bardziej ogólnych warunków brzegowych.

Zastosowano tu nową metodę perturbacyjną. Założono, że gęstość ośrodka zależy od położenia, co powoduje taką samą zależność liczby falowej. W rozpatrywanym przykładzie założono perturbacje liczby falowej, będące liniową funkcją położenia. W rozważanym

przypadku perturbacje wartości własnych nie są istotne i zaburzone wartości własne pozostają zbliżone do wartości bez perturbacji. W pewnych przypadkach jednak, wpływ zaburzeń może być istotny. Rysunek 4 przedstawia przykładowe trzy funkcje własne, rysunek 5 natomiast, perturbacje I rzędu wartości własnych, spowodowane perturbacją liczby falowej.

Obliczenia z wykorzystaniem nowych liczb perturbacyjnych prowadzą do zastosowań, które są z matematycznego punktu widzenia równoważne klasycznym metodom perturbacyjnym II rzędu. Rozpatrywany model matematyczny może być uogólniony w przypadku większej liczby warstw, a nowa metoda zastosowana do bardziej skomplikowanych problemów brzegowych.

## LITERATURA

1. Skrzypczyk J.: Perturbation methods New arithmetic. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria: Budownictwo, Księga jubileuszowa z okazji 70. lecia Prof. dra hab. inż. W. Starosolskiego, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2003, s. 391-398.
2. Skrzypczyk J.: Metody perturbacyjne Nowa arytmetyka. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria: Mechanika, zeszyt: 23, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2004, s. 363-368.
3. Skrzypczyk J.: Perturbation Methods New algebraic methodology With Applications In Mechanics, seria: Mechanika, zeszyt: 29, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2005, s. 413-418.
4. Skrzypczyk J.: Perturbation Methods – New Algebraic Methodology. Proc. of CMM 2005 – Computer Methods in Mechanics, Częstochowa, Poland, June 21-24 2005.
5. Skrzypczyk J., Winkler-Skalna A.: Sound Wave Propagation Problems New Perturbation Methodology. Archives of Acoustic, Vol. 31, No. 4 (Supplement), Warszawa 2006, p. 115-122.
6. Skrzypczyk J., Winkler-Skalna A.: Sound Wave Propagation Problems New Perturbation Methodology. Proc. of International Conference New Trends In Statics And Dynamics of Buildings, Faculty of Civil Engineering SUT Bratislava, Slovakia, October 2006, p. 97-100.
7. Skrzypczyk J., Wnkler-Skalna A.: Acoustic waves in layered nonhomogeneous medium: A new II-order perturbation approach. Materiały XLVI Sympozjum Modelowanie w Mechanice, Gliwice 2007.
8. Zaman F. D., Al-Muhammed Z. I. A.: Acoustic waves in a layered inhomogeneous ocean. Elsevier, Applied of Acoustics, No. 61, 2000, p. 427-440.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Bohdan Mohnacki